Digitized by Google

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EM. III NAPOLI
B. Prov.
VII 3
438

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio X
Palchetto 6
Num.° d' ordine 14
23916

11 E 26

110
3
41

B Prov
VIII
438

Digitized by Google

Digitized by Google

Verſuch
einer
kritiſchen Geſchichte
der
Algebra.

Nach den Quellen bearbeitet

von

Dr. G. H. F. Neſſelmann,
Privat-Docenten an der Univerſität zu Königsberg.

Erſter Theil.
Die Algebra der Griechen.

Berlin,
Verlag von G. Reimer.
1842.

Digitized by Google

641068

Die

Algebra

der

Griechen.

Nach den Quellen bearbeitet

von

Dr. G. H. F. Neſſelmann,
Privat-Docenten an der Univerſität zu Königsberg.

Berlin,
Verlag von G. Reimer.
1842.

Digitized by Google

Seinen verehrten Lehrern

Herrn

Profeſſor Dr. C. G. J. Jacobi

in Königsberg

und

Herrn

Profeſſor C. F. Buchner

in Elbing

als ein ſchwaches Zeichen ſeiner Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

von

dem Verfaſſer.

Digitized by Google

Ihr geiſtreicher mathematiſcher Unterricht, meine hoch- verehrten Herren, hat in mir das Intereſſe für die Geſchichte dieſer Wiſſenſchaft theils auf der Schule zuerſt geweckt, theils auf der Univerſität immer mehr und mehr genährt. Ich thue alſo, indem ich Ihnen dieſe Bogen widme, nicht viel mehr, als daß ich Ihnen das erſte auf der von Ihnen in Bewegung geſetzten Maſchine gewonnene Product zur Anſicht und Beurtheilung vorlege. Nehmen Sie es gütig auf! Und wenn das gegenwärtige Erzeugniß auch noch weiter nichts als Nachſicht verdienen ſollte, ſo hoffen Sie mit mir auf die Zukunft. Der Geiſt iſt das wahre Perpetuum Mobile, die einzige Ma-

ſchine, die ſich durch den Gebrauch nicht abnutzt, ſondern ſchärſt. Empfangen Sie meinerſeits die Verſicherung, daß eine wenigſtens nicht ganz ungünſtige Beurtheilung von Ihnen mit zu den ſchönſten Belohnungen gehören würde, die ich mir von meiner Arbeit verſpreche.

G. H. F. Neſſelmann.

Digitized by Google

Vorrede.

Indem ich dem gelehrten Publicum hiemit den erſten Band eines größern Werks in die Hände liefere, wird es nur weniger Worte bedürfen, um einigermaßen den Standpunct anzugeben, von dem aus es beurtheilt zu werden wünſcht. Es war nicht meine Abſicht, aus ältern Geſchichtswerken eine Menge hiſtoriſcher Data zu excerpiren und dieſelben in eine friſche Form gießend dem Publicum ein angenehmes Unterhaltungsbuch zu liefern, aus welchem Weniger-Unterrichtete allenfalls hie und da auch etwas Neues lernen könnten. Ebenſo wenig lag es in meinem Plane, ein Conglomerat flüchtig von der Oberfläche aufgeraffter Thatſachen, die man nach Willkühr reckt und modelt, auf das Prokruſtesbette eines philoſophiſchen Syſtems zu ſpannen. Ich wollte, wie der Titel beſagt, eine kritiſche Geſchichte ſchreiben, ich wollte die Geſchichte der Algebra, nicht wie die Tradition ſie lehrt, ſondern wie ſie ſich aus dem ausdauernden und ge-

wiſſenhaften Studium der Quellen ergiebt, erforſchen und demgemäß treu darſtellen. Aber das Grundelement der Kritik iſt der Zweifel. Darum habe ich aus frühern Geſchichtswerken keine Thatſache eher als ſolche angenommen, als bis die eigene Anſchauung mich von der Wahrheit und Haltbarkeit derſelben überzeugt hatte. Begreiflicherweiſe habe ich bei dieſem Geſchäfte oft Gebäude niederreißen müſſen, und bin leider nicht immer im Stande geweſen, auf den Ruinen einen neuen Bau aufzuführen. Ob ich aber bloß niedergeriſſen habe, mögen ſachverſtändige und wohlwollende Leſer beurtheilen.

Vielleicht dürfte Einer und der Andre der Meinung ſein, als habe ich Manches in den Bereich meiner Darſtellung hereingezogen, was derſelben hätte fern bleiben ſollen. Der Vorwurf iſt vielleicht gerecht, vielleicht auch nicht; über Anſichten läßt ſich indeß ſchwer rechten. Jedenfalls aber ertrüge ich den Vorwurf, mehr als nöthig gegeben zu haben, lieber als den entgegengeſetzten.

Eine beſchränkte, oft drückende äußere Lage, der Aufenthalt neben einer ſehr unvollſtändigen öffentlichen Bibliothek, der faſt gänzliche Mangel an genügenden Vorarbeiten, und Mißverhältniſſe mancher Art, die mir oft die zu dem Gelingen eines ſolchen Werkes erforderliche freudige Stimmung und Gemüthsruhe raubten, haben meine Arbeit zu ei-

nem faſt ununterbrochenen Ankämpfen gegen innere und äuſere Hinderniſſe gemacht. Mehr als einmal drohten die Hinderniſſe mich zu überwältigen, und ich war zuweilen nahe daran, das begonnene Werk über den Haufen zu werfen. Immer aber ſiegte wieder das einmal gewonnene und lange genährte Intereſſe für den Gegenſtand, und je größer die Hinderniſſe waren, die ich zu bekämpfen hatte, mit deſto größerer Freude ſehe ich jetzt den erſten Theil der mühevollen, ſorgenreichen Arbeit vollendet. Ob das Publicum ebenſovielen Grund haben wird, ſich darüber zu freuen, weiß ich nicht; jedenfalls aber hoffe ich, bei billigen Beurtheilern einige Nachſicht zu finden, wenn ſie die Spuren meiner innern Stimmung der Arbeit hie und da eingedrückt ſehen.

Nicht weniger ungünſtig waren die Schickſale des fertigen Manuſcripts. Zuerſt war ich genöthigt, daſſelbe vor ſeiner völligen Vollendung bogenweiſe aus den Händen zu geben, was den kleinen Übelſtand herbeigeführt hat, daß manche gelegentliche Bemerkung ſich zweimal vorfindet, wofür ich die Leſer gebührender Weiſe um Entſchuldigung bitten muß. Sodann ſah ich mich, nachdem die erſten achtzehn Bogen nicht ohne langen, unnützen Zeitverluſt abgedruckt waren, genöthigt, einen neuen Verlag zu ſuchen, und es vergingen wieder beinahe acht Monate, bis ich mein Werk in den Händen des jetzigen Herrn Verlegers für immer geſichert ſah.

Alle dieſe Mißverhältniſſe haben das Erſcheinen dieſes Bandes um beinahe zwei Jahre verzögert.

Die Entfernung vom Druckorte geſtattete mir nur ausnahmsweiſe, die Correctur ſelbſt zu beſorgen; es iſt daher nicht meine Schuld, daß in der erſten Hälfte des Werks eine mehr als gebührliche Anzahl zum Theil arger Druckfehler mit in den Kauf kommt. Der jetzige Herr Verleger hat auch dafür Sorge getragen, daß die Correctur den Händen eines ſachverſtändigen und ſelbſt als mathematiſcher Schriftſteller bekannten Gelehrten anvertraut iſt.

G. H. F. Neſſelmann.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniß.

Erſtes Kapitel.

Einleitung. Vorarbeiten. Plan gegenwärtigen Werkes.

S. 1—39.

	Seite
Hiſtoriographen der Mathematik bei den Griechen	1
Peter Ramus	8
Joſeph Blancanus	9
Gerh. Joh. Voſſius	10
Joh. Wallis	11
Milliet Dechales	12
J. C. Heilbronner	15
J. M. Frobeſius	17
J. F. Montucla	18
Saverien	19
A. G. Käſtner	24
P. Coſſali	25
Charles, Boſſut	27
Delambre	28
Chasles	29
Vorläufiger Überblick über die Geſchichte	30
Perioden derſelben	34
Über Citate	35
Über Darſtellung älterer Anſichten	37

Zweites Kapitel.

Über die verſchiedenen Namen der Algebra.

S. 40—61.

Arithmetik, Logiſtik bei den Griechen	40
Namen der Algebra bei den Indern	44
Bei den Arabern	45
Algebra et Almucabala, Algebra, bei den Abendländern	51
Ars magna, arte maggiore	53
Practica speculativa	54

Seite

Ars rei et census, arte della cosa, ars cossica, die Coß 55
Arithmetica speciosa Arithm. universalis 58
Ars analytica, Analyſis 59

Drittes Kapitel.

Über Zahlenſyſteme und Zahlzeichen.

S. 62—104.

Hiſtoriſches über den Urſprung der Zahlzeichen 62
Verſchiedene Methoden der Zahlenbezeichnung 65
Zahlenſyſteme der Sprachen 69
Semitiſch-Griechiſches Zahlenſyſtem 72
Griechiſches Myriadenſyſtem bei Camerarius und Montfaucon 81
Syſtem des Noviomagus bei Heilbronner 83
Syſtem des Herodianus 84
Römiſches Zahlenſyſtem 86
Über die Stelle in Boethius Geometrie, welche den Pythagoräern das Zahlenſyſtem mit Stellenwerth zuſchreibt 92

Viertes Kapitel.

Die Logiſtik der Griechen.

S. 105—148.

Gebrauch der Zahlen. Älteſte Arten zu rechnen 105
Archimed's Kreismeſſung nebſt Eutokius Commentar 108
Archimed's Pſammites 122
Multiplicationsregeln des Apollonius, nach Pappus 125
Sexageſimalrechnung der Aſtronomen 136

Fünftes Kapitel.

Die Griechiſche Arithmetik.

S. 149—242.

Pythagoras, Platon, Archytas. Rechtwinkliges Dreieck in rationalen Zahlen 149
Euklides. Zweites Buch der Elemente, identiſche Zahlenformeln. Barlaams Bearbeitung derſelben 153
Siebentes bis neuntes Buch. Rationale Arithmetik 156
Zehntes Buch. Irrationale Arithmetik 165
Sieb des Eratoſthenes 186
Nikomachus Einleitung in die Arithmetik 188
Erſtes Buch 191
Zweites Buch 200
Sein Verhältniß zu Euklides 217
Bearbeitungen und Literatur ſeines Werks 220
Theon von Smyrna 223
Thymaridas 232
Jamblichus 236

Sechſtes Kapitel.

Hiſtoriſches über Diophantus und ſeine Schriften.

S. 243—293.

Seite
I. Diophantus oder Diophantes? 244
Diophant's Zeitalter. Jenſeitige Grenze 245
Dieſſeitige Grenze 247
Reſultat 251
II. Schickſale ſeines Werks. Mangelhaftigkeit der vorhandenen Handſchriften 256
Zeugniſſe für das einſtmalige Vorhandenſein der dreizehn Bücher 257
Was und wieviel uns fehlt, wo und ſeit wann? 264
III. Literatur. Commentar des Maximus Planudes 273
Arabiſche Bearbeitung des Mohammed Abulwafa 274
Erſte Bekanntſchaft der Abendländer mit Diophant 276
Bombelli's beabſichtigte Überſetzung 277
Überſetzung von W. Xylander 278
Überſetzung von Joſeph Auria 280
Erſte Griechiſche Ausgabe von Bachet de Meziriac 281
Zweiter Abdruck derſelben mit Fermat's Randgloſſen 282
Die Schrift über die Polygonzahlen ins Deutſche überſetzt von Poſelger 283
Vollſtändige Deutſche Überſetzung von Otto Schulz 283
IV. Ob Diophant Erfinder der Algebra geweſen 284

Siebentes Kapitel.

Form der Diophantiſchen Algebra.

S. 294—313.

Symbole und Rechnungszeichen 294
Weſen ſeiner Bezeichnungsmethode und ihr Verhältniß zu andern Methoden 300
Die Schranken, in welche ſie ihn einſchließt 305

Achtes Kapitel.

Diophant's Behandlung der Gleichungen.

S. 314—354.

I. Beſtimmte Gleichungen. 1. Ungemiſchte 315
2. Gemiſchte quadratiſche Gleichungen 317
3. Kubiſche Gleichungen 328
II. Unbeſtimmte Gleichungen 329
1. Des zweiten Grades. a) Einfache Gleichung 329
b) Doppelte Gleichung 335
2. Höherer Grade. a) Einfache Gleichung 343
b) Doppelte Gleichung 352
Nachträgliche Überſicht 353

Neuntes Kapitel.

Diophant's Auflöſungsmethoden.

S. 355—436.

1. Geſchickte Annahme der Unbekannten 356

Digitized by Google

Seite
2. Methode der Zurückrechnung und Nebenaufgabe 369
3. Gebrauch des Symbols für die Unbekannte in verschiedenen Bedeutungen 382
4. Methode der Grenzen 391
Methode der Beinahegleichheit 401
5. Auflösung durch bloße Reflexion 405
6. Auflösung in allgemeinen Ausdrücken 413
7. Willkührliche Bestimmungen und Annahmen 421
8. Gebrauch des rechtwinkligen Dreiecks 435

Zehntes Kapitel.

Diophant's Porismata.
S. 437—461.

Über Porismata überhaupt 437
Die drei Diophantischen Porismata 440
Identische Zahlenformeln 446
Zerlegbarkeit der Zahlen in Quadrate 450

Elftes Kapitel.

Diophant's Schrift über die Polygonalzahlen.
S. 462—476.

Inhalt der Schrift 463
Behandlungsweise des Stoffs 470

Zwölftes Kapitel.

Die arithmetischen Epigramme der Griechen.
S. 477—491.

Die Griechische Anthologie 477
Das von Lessing bekannt gemachte Epigramm, vorgeblich aus Archimedes Zeit 481

Zusätze und Berichtigungen 492

Erſtes Kapitel.

Einleitung. Vorarbeiten. Plan gegenwärtigen Werkes.

Sobald in einem Volke die erſten Keime des Selbſtbewußtſeins erwachen, regt ſich in ihm das Bedürfniß nach einer Nationalgeſchichte, welche jenes aufſtrebende Selbſtbewußtſein zur Vollendung bringe. Ein Volk ohne Geſchichte iſt ein Kopf, der den Körper nicht ſieht, auf dem er ſteht; es iſt eine Gegenwart, der das Bewußtſein fehlt, daß ſie auf einer thatſächlichen Vergangenheit beruht. In dieſem drückenden Gefühle der Leere und der Bewußtloſigkeit früherer Exiſtenz entwickelt ſich bei den Völkern, ſobald ſie auf eine gewiſſe Stufe der geiſtigen Cultur getreten ſind, zuerſt das hiſtoriſche Element in der Form des Nationalepos und geht von da allmählig in wirkliche Geſchichte über. Dieſe Thatſache beweiſen uns faſt alle Völker des Alterthums, welche nicht auf dem urſprünglichen Standpuncte der rohen Natur ſtehen geblieben ſind, und es gehört zu den Ausnahmen, welche indeß wohl in örtlichen oder ſonſt ſpeciellen Beziehungen ihren Grund haben, wenn ein gebildetes Volk, wie z. B. das Indiſche, den Schritt vom Epos zur eigentlichen Geſchichte nicht gemacht hat.

Dieſes nämliche Bedürfniß nach Geſchichte, welches emporſtrebende Völker beſeelt, läßt ſich auch unter den Verehrern und Fortbildnern der Wiſſenſchaften und Künſte wahrnehmen, und zwar um ſo deutlicher und beſtimmter, je mehr den letzteren der Stoff zu ihrer Fortbildung von innen her zukommt; am früheſten ſind daher die Fortſchritte der Theologie, der Mathematik und der Poeſie geſchichtlich bearbeitet worden. Indem ich es Anderen überlaſſe, die Wahrheit dieſer Bemerkung an den andern Wiſſenſchaften nachzuweiſen, wende ich mich ausſchließlich zu derjenigen unter ihnen, deren Geſchichte der Zweck gegenwärtigen Buches iſt.

Die Geſchichte der Mathematik iſt, wie es ſcheint, ſehr frühe behandelt worden. Ein gewiſſer Perigenes, deſſen Zeitalter mir nicht bekannt iſt, ſoll über die Mathematiker det Chaldäer geſchrieben

haben, jedoch iſt die Nachricht unſicher [1]). Intereſſanter und beſtimmter iſt die Kenntniß, daß zwei Schüler des Ariſtoteles, nämlich **Theophraſtus von Lesbos** und **Eudemus aus Rhodus** Geſchichten der Mathematik geſchrieben haben. In dem von Diogenes Laertius gegebenen Cataloge der faſt unzähligen Schriften **Theophraſt's** befindet ſich eine Geſchichte der Geometrie in vier Büchern (Ἱστοριῶν γεωμετρικῶν α' β' γ' δ' [2])), eine Geſchichte der Aſtronomie in ſechs Büchern (Ἀστρολογικῆς ἱστορίας α' β' γ' δ' ε' ς') und eine Geſchichte der Arithmetik in einem Buche (Ἀριθμητικῶν ἱστοριῶν α') [3]). Alle drei Werke ſind verloren gegangen, und meines Wiſſens iſt dieſe Nachricht bei Diogenes Laertius die einzige, welche uns Kunde von denſelben giebt; wenigſtens habe ich bei keinem andern griechiſchen Auctor jene Geſchichten citirt gefunden, und ob zwei Stellen aus des Simplicius Commentar über Aristoteles de coelo lib. II., welche Menage [4]) anführt, gerade ſich auf die Geſchichte der Aſtronomie beziehen, wie Meurſius glaubt, iſt ungewiß.

Der zweite, **Eudemus**, hat eine Geſchichte der Geometrie (γεωμετρικὴ ἱστορία) und eine Geſchichte der Aſtronomie geſchrieben. Die erſtere nennen Proklus [5]) und Eutokius [6]), die zweite citiren Diogenes Laertius, Anatolius und Clemens Alexandrinus [7]). Auch

---

1) In dem Index VII der Historia Philosophiae aut. Th. Stanlejo (Lips. 1711. 4to.) heißt es in dem Artikel Mars: „audi Scholiastem Apollonii „ad III. Arg. v. 1375. ubi de planeta Martis: Περιγένης, ait, ἐν τῷ περὶ „τῆς Χαλδαϊκῆς (ita legendum vidit I. Rutgers. Var. Lect- Lib. V. c. VI.) „τῶν Μαθηματικῶν etc." Für Χαλδαϊκῆς wird nämlich Χαλκιδικῆς geleſen. Vergl. Fabricii bibl. Graeca L. III. p. 540. (ed. 1716).

2) Ed. Meibomii l. V. sign. 48. p. 292. (ἱστορικῶν Druckfehler).

3) ib. sign. 50.

4) V. In Diog. Laertium Aeg. Menagii observationes et emendationes etc., welche den zweiten Theil der Meibom'ſchen Ausgabe ausmachen, p. 212.

5) S. deſſen Commentar über das erſte Buch der Euklidiſchen Elemente am Ende des dritten Buchs; ed. Basil. p. 92. Εὔδημος δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς Θαλῆν τοῦτο ἀνάγει τὸ θεώρημα. Vergl. außerdem ebend. S. 79. 87. 99. 109. Seite 35 citirt Proklus deſſelben Verfaſſers βιβλίον περὶ γωνίας.

6) S. deſſen Commentar über Archimed's κύκλου μέτρησις in der Einleitung (S. 77. der Gutenäckerſchen Ausgabe). Eutokius nennt den Titel der Schrift im Singularis.

7) Diog. I, 23. erzählt, daß Thales zuerſt Aſtronomie getrieben und Sonnenfinſterniſſe vorhergeſagt habe, ὥς φησιν Εὔδημος ἐν τῇ περὶ τῶν ἀστρολο-

dieſe beiden Werke ſind nicht bis auf unſere Zeit gekommen, und die Citate bei Diogenes, Eutokius, Proklus u. ſ. w., von denen die des Letzteren meiſtens die Erfinder einzelner geometriſcher Sätze angeben, ſind Alles, was wir davon übrig behalten haben. Dieſer Verluſt iſt um ſo mehr zu bedauern, als die Geſchichte ſowohl Eudem's als Theophraſt's gerade eine Periode zu ihrem Gegenſtande hatte, welche jetzt wohl für uns immer in ein magiſches Dunkel gehüllt bleiben wird, nämlich die Zeit vor Euklides.

Wenn eine Lesart bei Diogenes Laertius richtig iſt, ſo kann man vermuthen, daß auch Xenokrates, ein Zeitgenoſſe der beiden vorigen, außer einem Werke über Geometrie noch ein mathematiſch-hiſtoriſches Werk geſchrieben hat. Es findet ſich nämlich in dem Katalog ſeiner Werke eines unter dem Titel περὶ γεωμετρῶν βιβλία ε', de geometris libri quinque[8]), das in dieſem Sinne noch nirgend aufgeführt iſt. Einige Hiſtoriker, wie Ramus, Blancanus, Heilbronner[9])

γουμένων ἱστορίᾳ. Dazu ſagt Menage: Idem testatur et Clemens Stromat. I. Θαλῆν δὲ Εὔδημος ἐν ταῖς ἀστρολογικαῖς ἱστορίαις τὴν γενομένην ἔκλειψιν τοῦ ἡλίου προειπεῖν φησί etc. (alſo mit abweichendem Titel; der Titel, wie Diogenes ihn ausſpricht, iſt wahrſcheinlich richtiger, weil die Form deſſelben nicht ſo gewöhnlich iſt). Idem ex ejusdem Eudemi Astrologica historia prodidit Theo Smyrnaeus. (Der aſtronomiſche Theil ſeines Werks iſt noch nicht gedruckt worden.) At Proclus in IV. primi Euclidis testatur Thaleti hoc ab Eudemo tribui ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις. Potuit idem utroque in opere dixisse, ait Vossius de Historicis Graecis lib. 3. ubi eum vide. Nun befinden ſich aber die aus Proklus beigebrachten Worte nicht im vierten, ſondern, wie in Note 5. geſagt iſt, am Ende des dritten Buchs; dazu kommt noch, daß an dieſer Stelle ſo wenig, wie an irgend einer andern des Commentars von Proklus von einer Sonnenfinſterniß die Rede iſt. Vielmehr ſagt Proklus, Eudemus ſchreibe in ſeinen geometriſchen Geſchichten die Erfindung des Satzes Eukl. Elem. I, 26. (Congruenz zweier Dreiecke aus Gleichheit zweier Winkel und einer Seite) dem Thales zu. Wir haben hier alſo ein Beiſpiel, wie ein falſches Citat ſich fortpflanzt, weil Einer dem Andern es nachcitirt, ohne auf die Quelle zurückzugehen. — Anatolius in dem von Fabricius mitgetheilten Fragment (Bibl. gr. L. III. p. 277.) ſagt: Εὔδημος ἱστορεῖ ἐν ταῖς ἀστρολογίαις ὅτι Οἰνοπίδης εὗρε πρῶτος τὴν τοῦ ζωδιακοῦ διάζωσιν etc. Das ſoll doch wohl dieſelbe Geſchichte der Aſtronomie ſein.

8) Diog. Laert. IV, 13. Aber ein Cod. Cantabrig. lieſt περὶ γεωμετρικῶν βιβλία ε'. De rebus geometricis libri V. Dann hat Xenokrates zwei Werke über Geometrie geſchrieben; denn in demſelben Capitel wird noch περὶ γεωμετρίας α' β', de geometria duo (libri) genannt.

9) *P. Rami scholae mathem.* p. 21. nach der zweiten Lesart: de geometria duos, de geometricis rebus quinque. *J. Blancani chronol. ma-*

u. A. nehmen es als ein Werk über Geometrie, vielleicht auf Grund der andern Lesart, Andere, wie Dechales und Montucla, nennen es gar nicht. Da es indeß ebenfalls verloren iſt, ſo möge es genügen, hier bloß darauf aufmerkſam gemacht zu haben.

Nun ſcheint die Geſchichte der Mathematik viele Jahrhunderte hindurch nicht wieder bearbeitet worden zu ſein. Zwar wird von Ramus, Blancanus, Weidler, Montucla, Saverien u. A. [10]) erzählt, daß Geminus von Rhodus (Proklus ſchreibt überall Γεμῖνος; wenn das richtig iſt, iſt es wohl nicht der lateiniſche Name. Suidas hat nur Γεμίνιος, ὄνομα κύριον) Verfaſſer eines Werkes ſei, welches ſie enarrationes geometricae nennen; es iſt mir aber bis jetzt nicht gelungen, die Quelle aufzufinden, aus welcher dieſe Nachricht hervorgegangen iſt. Einige von ihnen geben Proklus als Quelle an; das iſt aber unrichtig; zwar wird allerdings Geminus von Proklus oft genannt, aber ich habe an keiner Stelle ſeines Commentars irgend eine Hindeutung auf ein hiſtoriſches Werk dieſes Mathematikers finden können; vielmehr ſcheint Geminus ein theoretiſches, und nach Proklus Ausdrücken zu ſchließen, ein vorzügliches Lehrbuch der Geometrie geſchrieben zu haben, deſſen Auctorität Proklus bei widerſtreitenden Anſichten über geometriſche Vorſtellungen in der Regel als letzte Entſcheidung in Anſpruch nimmt [11]).

---

them. p. 45. Xenocrates Chalcedonius Platonis auditor de geometria primum duos, deinde quinque lib. composuit. Das iſt Conjectur; denn bei Diogenes werden a. a. O. die fünf Bücher περὶ γεωμετρῶν oder γεωμετρικῶν eher genannt, als die beiden περὶ γεωμετρίας. *Heilbronner, hist. math. univ.* p. 155. ſchreibt wörtlich aus Blancanus ab. Vergl. Fabricii Bibl. Graeca L. III. p. 68.

10) *Rami schol. math.* p. 35. Libros geometricarum enarrationum sex conscripserat, a quibus plerisque in locis Proclus est adjutus. *Blancani chron. math.* p. 45. Scripsit praetera lib. 6. geometricarum enarrationum. *Weidler historia astronomiae* (Vitemb. 1741. 4to) p. 145. Contexuerat enim Geminus libros VI. enarrationum geometricarum, quibus passim Proclus fuit adjutus. *Montucla hist. des mathém.* T. 1. p. V. préf. Enfin peu avant l'ère chrétienne Géminus avoit de nouveau écrit l'histoire de la géometrie. Die genaueſte Kenntniß von dieſem Werke ſcheint *Savérien* zu haben; er ſagt nämlich (Hist. des progrès de l'esprit humain p. 77.): Il composa un ouvrage divisé en six livres, intitulé Enarrationes Geometricae (ſchwerlich, denn Gem. war ein Grieche), dans lequel il exposa d'une manière fort claire les découvertes les plus importantes.

11) Ich will hier zur Begründung meiner Ausſage alle Stellen des Commentars von Proklus nennen, in welchen Geminus citirt wird, und zwar nach

Ja eine Stelle bei Proklus ſcheint ſogar geradezu anzudeuten, daß ſeit dem vierten Jahrhundert v. Chr., d. h. ſeit Theophraſt's und Eudem's Zeiten, keine neue Geſchichte der Geometrie mehr erſchienen iſt. Der genannte Auctor giebt nämlich in dem vierten Capitel des zweiten Buchs ſeines Commentars eine intereſſante hiſtoriſche Überſicht über die berühmteſten Mathematiker von Thales bis Euklides, und ſagt daſelbſt, bevor er Euklides ſelbſt nennt: οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς

---

der Ausgabe des Originals (Basileae 1533 fol. bei Euklid) und nach der lateiniſchen Überſetzung des Barocius (Patavii 1560 fol.).

Ed.	p.	11	l.	30	Bar.	p.	22	l.	6
„	„	29	„	31	„	„	61	„	14
„	„	31	„	3	„	„	63	„	34
„	„	—	„	29	„	„	64	„	35
„	„	32	„	47	„	„	67	„	27
„	„	49	„	18	„	„	100	„	31
„	„	—	„	33	„	„	101	„	17
„	„	51	„	8	„	„	104	„	12
„	„	—	„	27	„	„	105	„	5
„	„	—	„	37	„	„	—	„	21
„	„	52	„	3	„	„	106	„	12
„	„	—	„	44	„	„	108	„	2
„	„	—	„	48	„	„	—	„	8
„	„	53	„	39	„	„	110	„	18
„	„	56	„	13	„	„	116	„	8
„	„	66	„	10	„	„	139	„	2
„	„	—	„	11	„	„	—	„	4
„	„	68	„	4	„	„	143	„	11
„	„	—	„	6	„	„	—	„	15
„	„	74	„	38	„	„	159	„	12

Ich möchte vermuthen, daß alle in der vorigen Note genannten Auctoren ihre Angabe aus dem Elenchus librorum, qui in eodem hoc volumine citati sunt welchen Barocius ſeiner Überſetzung vorausgeſchickt, entnommen haben. Da finden wir nämlich Libri geometricarum enarrationum Gemini. Es kann dieſes ein urſprünglicher Irrthum des Überſetzers ſein, indem er aus den häufigen Citaten des Geminus und aus der Analogie der geometriſchen Geſchichten des Eudemus auf ein ähnliches Werk des erſteren geſchloſſen hat. Die ſechs Bücher, in welche das Werk des Geminus eingetheilt geweſen ſein ſoll, rühren wahrſcheinlich von einer zweiten Verwechſelung her, indem Eutokius in dem Commentar zu Apollonius Kegelſchnitten des Geminus ſechſtes Buch praeceptionum mathematicarum citirt (der Comm. des Eutokius zu Apollonius iſt bis jetzt nur lateiniſch gedruckt). Vielleicht auch, daß eine alte Überſetzung da ſchon den Ausdruck enarrationum gebraucht.

ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν[12]), d. h. „Diejenigen, welche die Geſchichten (nämlich der Geometrie) geſchrieben haben, haben bis hieher die Entwickelung der Wiſſenſchaft fortgeführt.“ Der letztgenannte Mathematiker iſt ein gewiſſer Philippus[13]), ein Schüler Plato's; bis auf ihn alſo erſtreckten ſich die damals vorhandenen Geſchichten der Mathematik. Dieſelben hörten alſo da auf, wo für uns, denen die vor-euklidiſche Zeit immer noch wie eine kaum anbrechende Morgenröthe in mehr als Halbdunkel gehüllt erſcheint, die Geſchichte recht eigentlich erſt anfängt. Schwerlich aber würden wohl ſpäter lebende Hiſtoriographen, wie Geminus, der etwa ein halbes Jahrhundert vor Chr. lebte, hier aufgehört und die erſt von Euklides in eine wiſſenſchaftliche Form gebrachte Geometrie ohne Geſchichte gelaſſen haben; Stoff gaben wohl, um Mehrer nicht zu gedenken, die noch nach Jahrtauſenden angeſtaunten Arbeiten eines Archimedes und Apollonius in reichem Maaße her. Alſo iſt wohl von Eudemus bis zur Zeit des Proklus im fünften Jahrhundert nach Chriſto keine neue Geſchichte der Geometrie erſchienen.

Und doch haben wir noch vor Proklus eine Geſchichte, und zwar eine pragmatiſche Geſchichte der Mathematik und der Geometrie insbeſondre, die aber Proklus, obgleich er den Verfaſſer derſelben mehrmals nennt, nicht als eine ſolche anzuerkennen ſcheint. Es iſt das allbekannte und nicht genug zu ſchätzende Werk von Pappus aus dem vierten Jahrhundert. Der berühmte Verfaſſer giebt in ſeinen Μαθηματικαὶ συναγωγαὶ in acht Büchern, von denen aber leider die beiden erſten bis auf ein kleines Fragment des zweiten, von welchem weiter unten die Rede ſein wird, verloren gegangen ſind, eine herrliche Überſicht über die Leiſtungen ſeiner Landsleute in der Geo-

12) Ed. Bas. p. 19. Bar. p. 39.

13) In der Baſeler Ausgabe heißt er Φίλιππος ὁ Μεταῖος. Ebenſo bei Dechales cursus mathem. T. 1. p. 8. Barocius giebt Ph. Mendaeus, und ſo die Meiſten, z. B. Ramus l. l. p. 20. Blancanus p. 44. Dechales p. 65. u. A. — Fabricius (Bibl. Gr. L. III. p. 385. 386.) und daraus wahrſcheinlich Frobeſius (Histor. et dogmat. in mathesin introd. p. 99—101) haben dieſes Capitel abdrucken laſſen, und beide leſen Φ. ὁ Μεδμαῖος. Ebenſo hat Montucla T. 1. p. 180. Philippe de Medmée; — Fabricii bibl. Graeca L. III. p. 85. und von da Weidler hist. astr. p. 111. „Philippus Medmeus, (e Medama Bruttiorum oppido) Italus, Platonis discipulus etc. De ventis eum scripsisse, Stephanus de urbibus in Μέδμα testatur.“ Alſo iſt dieſe dritte Lesart wohl die richtige.

metrie und der Arithmetik; er begnügt ſich aber nicht, wie ſo viele neueren Hiſtoriker, bloße Namen und Büchertitel zu nennen, ſondern er geht ausführlich in die Sache ein, führt die wichtigſten Sätze und Lehren theoretiſch vollſtändig aus, und giebt den Inhalt von vielen jetzt größtentheils verloren gegangenen Büchern ſo genau und ausführlich an, daß es neueren Mathematikern möglich geworden iſt, nach dieſen Angaben jene Werke wiederherzuſtellen. Sein Werk iſt eine reiche Vorrathskammer alles deſſen, was Griechenland in der Geometrie erzeugt hat, und darum von ſo unſchätzbarem Werthe, weil ohne den Fleiß ſeines Verfaſſers ſo vieles Herrliche für uns ſpurlos untergegangen wäre. Schade, daß gerade der Theil ſeines Werkes, der uns für unſeren nächſten Zweck am meiſten intereſſirt, nicht vollſtändig bis auf unſere Zeit gekommen iſt; die beiden erſten Bücher dieſer Συναγωγαί ſind wahrſcheinlich für die Griechiſche Arithmetik das geweſen, was die folgenden ſechs Bücher für die Geometrie waren. Den Nachforſchungen des berühmten Wallis iſt es gelungen, ein Fragment, wie es ſcheint, den Schluß des zweiten Buchs aufzufinden, welches hinreichend iſt, den Verluſt des übrigen Theils uns ſchmerzhaft empfinden zu laſſen. Wallis machte ſeinen Fund im Jahre 1688 im Original bekannt, ein Glück, welches dem geometriſchen Theile dieſes vorzüglichen Werkes noch nicht zu Theil geworden iſt. Wir haben bis jetzt nur lateiniſche Überſetzungen davon, die überdies Manches zu wünſchen übrig laſſen [14]).

Von hier an aber ſchweigt die Geſchichte der Mathematik bei den Griechen wirklich. Zwar geben der Commentar des Proklus über das erſte Buch der Euklidiſchen Elemente, und die Commentare des Eutokius von Askalon über einige Werke Archimed's und über die Kegelſchnitte des Apollonius manche willkommene hiſtoriſche Notizen, aber das hiſtoriſche Element tritt bei ihnen doch ſehr in den Hintergrund, und die Notizen kommen ziemlich vereinzelt und nur ſo gelegentlich zum Vorſchein. Ganz hiſtoriſchen Inhalts iſt nur das ſchon erwähnte vierte Capitel des erſten Buchs von Proklus [15]), welchem

14) Pappi Alexandrini mathematicae collectiones, a Federico Commandino in lat. conversae et commentariis illustratae. Venet. 1589. fol. (Am Ende ſteht Pisauri 1588.) Auch Bononiae 1660. fol. Der Anfang des fünften Buchs iſt 1824 in Paris fol. griechiſch herausgekommen. Möchten wir doch bald eine vollſtändige griechiſche Ausgabe dieſes wichtigen Werkes ſehen!

15) Nach Barocius Eintheilung; die Baſeler Ausgabe macht gar keine Abſchnitte; es ſteht daſelbſt S. 19.

ches in einer gedrängten, aber recht guten Überſicht die Geſchichte der Geometrie bis auf Euklides enthält, und wenigſtens allemal nützlicher iſt als ſeine weitſchweifigen philoſophiſchen Unterſuchungen über Dinge, die ohne dieſelben viel klarer ſind. Indeß ſind die Commentare beider Auctoren bei Ermangelung rein geſchichtlicher Werke für den Hiſtoriker der Mathematik ſehr ſchätzbar, und ich werde in dieſem erſten Theile meiner Geſchichte noch oft Gelegenheit haben, von dem, was jene uns aufbehalten, mit dankbarer Anerkennung Gebrauch zu machen.

Es folgen nun Zeiten für Europa, in welchen wir ungefähr ſiebenhundert Jahre im Dunkeln tappen, während Aſien ſein ſelbſtgenährtes Licht noch durch die von Europa her eingeſogenen Strahlen vermehrte. Erſt mit dem Anfange des dreizehnten Jahrhunderts erwachte bei uns wieder ein lebhafteres Intereſſe für Mathematik, und ſeit dem ſechszehnten Jahrhundert iſt auch die Geſchichte derſelben ziemlich oft bald mit mehr, bald mit weniger Glück bearbeitet worden; freilich aber hat man meiſtens dieſen Titel ſchalen Namen- und Titelregiſtern an die Stirn geſchrieben. In der folgenden kurzen Überſicht über die mathematiſch-hiſtoriſchen Schriften übergehe ich alle ſolche Werke, welche auf die Geſchichte der Algebra stricti juris keine Beziehung haben; ich nenne alſo nur die allgemeinen Geſchichten, und die Geſchichten der Arithmetik und Algebra.

Andreae Striborii libellus de auctoribus mathematicis.

Der Verfaſſer lebte am Anfange des ſechszehnten Jahrhunderts als Profeſſor der Mathematik in Wien. Das genannte Werk ſcheint nicht gedruckt worden zu ſein. Der Titel befindet ſich in dem von des Verfaſſers Schüler Tannſtetter herausgegebenen Catalog ſeiner Schriften. (Vergl. **Weidler hist. astr. p. 331. Frobesii hist.** et dogm. in math. introd. p. 67.)

P. Rami prooemium mathematicum in tres libros distributum. I. explicat historiam praestantium mathematicorum, a quibus artes mathematicae inventae atque excultae sunt etc. Paris. 1567. 8.

Iſt, wie es ſcheint, beſonders abgedruckt aus folgendem Werke:

P. Rami Scholarum Mathematicarum libri unus et triginta. Frcft. 1559. 4., auch ***Basileae.*** 1569. 4.

in welchem jenes **Prooemium** die drei erſten Bücher ausmacht (wenigſtens in der Baſeler Ausgabe; die Frankfurter habe ich nicht geſehen). Nach einer Bemerkung von Plinius (**Hist. nat. XVIII, 25.**)

theilt Ramus die Geſchichte der Mathematik in vier Perioden, die Chaldäiſche, von Adam bis Abraham, die Ägyptiſche, von Abraham an, der die Mathematik dahin verpflanzte, die Griechiſche, von Thales bis Theon von Alexandrien, mit Einſchluß der Römiſchen Mathematiker, und die neue, von Theon bis auf des Verfaſſers Zeit. Die Einleitung und die Behandlung der erſten beiden Perioden umfaßt, vernünftiger Weiſe, nur vier Seiten. Dann folgt die Griechiſche Periode von S. 5—40. Die neue überläßt er Andern zu bearbeiten: Spero autem aliquem nostro exemplo excitatum recentiores mathematicos descripturum esse. (S. 40.) Das in der dritten Periode gegebene Verzeichniß der Griechiſchen Mathematiker iſt zwar keinesweges vollſtändig; auch vermißt man alle Zeitangaben, obgleich es chronologiſch geordnet iſt. Aber das Werk hat vor vielen ſpäteren den unſchätzbaren Vorzug, daß es unmittelbar aus den, in der Regel auch genannten, Quellen hervorgegangen iſt. Wenigſtens iſt es bedeutend werthvoller, als die ſpäteren Werke von Blancanus, Voſſius und Dechales, welche die Arbeit von Ramus wenig oder gar nicht benutzt zu haben ſcheinen. Zufällig waren dieſe Scholae eines der letzten Bücher, welche ich behufs meiner Collectaneen geleſen habe; und da habe ich mich oft verwundert, über Dinge, die in faſt allen ſpäteren Werken der Art durch die vagſten Irrthümer entſtellt ſind, hier die richtige Anſicht zu finden. Beiſpiele der Art werden uns künftig öfter vorkommen. Einen auffallenden Beleg dafür, daß dieſes Werk faſt gar nicht geleſen worden iſt, werde ich bei Gelegenheit der Unterſuchungen über Diophantus beibringen.

Aristotelis loca mathematica ex universis ipsius Operibus collecta et explicata. Accessere de natura mathematicarum scientiarum tractatio; atque Clarorum Mathematicorum Chronologia. Authore Josepho Blancano, Bononiensi. Bononiae. **1615. 4.**

Die Chronol. Mathem., unter beſonderem Titel, enthält eine Aufzählung der Mathematiker, die in 26 Saecula vertheilt ſind. Sie iſt ein ziemlich nacktes Namenverzeichniß, zwar etwas vollſtändiger, aber viel ungenauer als die Arbeit von Ramus. Die Quellen werden zuweilen angegeben, dagegen vermißt man oft die Titel der Bücher. Im Ganzen ein ziemlich unbrauchbares und unzuverläſſiges Werk.

Hugonis Sempilii de disciplinis mathematicis libri XII. Antverpiae. 1635. *fol.*

„Huic enim sat prolixus mathematicorum index, secun-„dum matheseos disciplinas ordineque alphabetico extat sub-„nexus," ſagt Frobesius l. l. p. 67. Ich habe das Buch nicht geſehen.

G. J. Vossii de universae matheseos natura et constitutione liber, cui subjungitur chronologia mathematicorum. Amstelod. 1650. 4.

befindet ſich auch in deſſelben Verfaſſers

De IV. artibus popularibus, de philologia et scientiis mathematicis libri tres, cui operi subjungitur chronol. mathematicorum. Amstelod. 1650. 4. (Zweite Auflage 1660. 4.)

Enthält nicht, wie man aus dem Titel vermuthen möchte, eine abgeſonderte chronologiſche Aufzählung der Mathematiker, etwa wie das Werk von Blancanus, ſondern eine Eintheilung der verſchiedenen mathematiſchen Disciplinen, deren jeder eine Angabe der vorzüglichſten Schriftſteller in dieſem Fache angehängt wird. Voſſius war nichts weniger als Mathematiker. Seine Arbeit beruht ganz auf fremden, noch dazu ungenannten, Auctoritäten, und iſt im Ganzen dürftig und ohne hinlängliche Sachkenntniß abgefaßt, wie man es von einem Polyhiſtor am Ende auch nicht anders erwarten kann. Es iſt nur zu bedauern, daß ſein Name lange Zeit in jeder Beziehung als Auctorität galt, und die Worte Vossius dixit jeden Einwurf niederſchlugen. Zur Entſchuldigung der vielfachen Mängel dieſes Werks kann man indeß den Umſtand aufführen, daß daſſelbe ein Werk ſeines hohen Alters iſt, und daß er ſelbſt auf dem Titel durch das Motto: „Diutius si immorer, vereor, ne videar immori velle" um Nachſicht bittet.

A. Tacqueti historica de origine et progressu matheseos narratio, als Einleitung in ſeine *Elementa Geometriae planae ac solidae. Antv.* 1665. 8.

Ich habe das Werk nicht geſehen. Frobisius l. l. p. 74. ſagt: Vossium excipit A. Tacquetus, cujus quidem exstat hist. de orig. et progr. math. narratio, ipsius elementis geometriae praemissa, atque ut ipsemet profitetur, e Rami scholis mathem. (lib. 1.) maximam partem concinnata. Elegans profecto est, sed brevis admodum Tacqueti haec narratio; neque enim ultra

Theonis atque Pappi tempora is progreditur. Ein Auszug aus Ramus kann allerdings nicht mehr viel enthalten.

J. Wallis treatise of Algebra both historical and practical with some additional treatises. fol. London. 1685.

Als eine zweite Auflage davon iſt zu betrachten: **De Algebra tractatus historicus et practicus**, welcher den größern Theil des zweiten Bandes ſeiner **Opera mathematica. Oxoniae. 1693. fol.** ausmacht. Dieſe Algebra iſt in theoretiſcher Hinſicht ein ausgezeichnetes Werk und gewiß das beſte und vollſtändigſte, was über dieſen Gegenſtand bis dahin geſchrieben worden iſt. Indem der Verfaſſer dem natürlichen ſyſtematiſchen Gange der Wiſſenſchaft folgt, ſtellt er bei jeder Lehre die verſchiedenen älteren und neueren, beſſern und ſchlechtern Methoden in einer Vollſtändigkeit zuſammen, wie wir ſie in keinem alten Werke, und ſelbſt wohl nicht einmal in neueren finden. Außerdem geht dem Werke eine hiſtoriſche Einleitung vorher, welche einzelne recht hübſche Bemerkungen und Anſichten aufſtellt. Und doch iſt ſein Werk gerade von Seiten der Geſchichte faſt ganz werthlos. Wallis hat nicht aus den Quellen geſchöpft; ja, wie wir uns ſpäterhin überzeugen werden, wenn wir uns bis auf dieſe Periode werden durchgearbeitet haben, er hat den größten Theil der Werke, die er nennt, ſelbſt die der berühmteſten claſſiſchen Mathematiker, gar nicht geleſen. Die meiſten ſeiner hiſtoriſchen Angaben ſind irrig, oft auch noch mehr als das, ſie ſind abſichtlich entſtellt. Wallis beſaß mehr Patriotismus, als einem unpartheiiſchen Hiſtoriker gebührt. Sein Landsmann Harriot iſt ihm Alles, unter ſeinen Händen möchte er am liebſten die ganze Algebra entſtanden wiſſen, und es kommt ihm auf eine Hand voll Unwahrheiten nicht an, wenn es gilt, dieſen ſeinen berühmten Landsmann auf Koſten der Ausländer, namentlich Descartes, zu vergrößern, gegen deſſen unſterbliche Verdienſte er ſowohl ſich ſelbſt als ſeine Leſer gefliſſentlich blind zu machen ſtrebt. Hiſtoriſche Unkunde dagegen iſt es, wenn er Erfindungen ſich ſelbſt zuſchreibt, welche hundert Jahre früher Bombelli gemacht hatte, z. B. die Ausziehung der Cubikwurzel aus einem Binomium $\left(\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}\right)$ und die Anwendung dieſer Theorie auf die Auflöſung des ſogenannten casus irreducibilis der cubiſchen Gleichungen. Mit einem Worte, Wallis Werk iſt in hiſtoriſcher Beziehung durchaus unbrauchbar; denn man muß vorher die Geſchichte kennen, um bei der Lectüre dieſer Algebra zu unterſcheiden, ob eine

Digitized by Google

von dem Verfaſſer beigebrachte hiſtoriſche Notiz richtig oder unrichtig iſt.

C. F. Milliet-Dechales Cursus seu Mundus mathematicus. IV. Tomi. Lugduni. 1674. *fol.* (ed. altera curâ A. Varcin, ib. 1690.)

Der erſte Band enthält: **Tractatus prooemialis de progressu matheseos et illustribus mathematicis**, (p. 1 bis 108). Wer dieſes oft gelobte Buch nicht geleſen hat, hat gar keine Vorſtellung davon, mit welcher Gedankenloſigkeit dieſe vorgebliche Geſchichte der Mathematik zuſammengeſtoppelt iſt. Abgeſehen von unzähligen einzelnen Ungenauigkeiten und Irrthümern wimmelt das ganze Werk dermaßen von Widerſprüchen in ſich ſelbſt, daß Jemand, der aus demſelben Geſchichte der Mathematik lernen wollte, am Ende allen Glauben an hiſtoriſche Wahrheit verlieren müßte. Ich ſehe mich genöthigt, dieſes ſtrenge Urtheil durch Thatſachen zu belegen. 1) Der griechiſche Mathematiker Geminus, von dem wir oben geſprochen haben, wird hier viermal genannt; zuerſt S. 8. unter den Mathematikern vor Euklides, dann S. 11. und S. 47. im vierten Jahrhundert n. Chr. als Lehrer des Proklus Diadochus, und endlich S. 79. als Zeitgenoſſe Cicero's und Sulla's. Es werden an dieſen drei Stellen nicht etwa drei Mathematiker dieſes Namens unterſchieden, ſondern es iſt immer derſelbe. 2) Theon Smyrnäus erſcheint S. 12. u. S. 30. im zwölften, S. 61. im zweiten Jahrh. n. Chr., und an allen drei Stellen wird daſſelbe Buch von ihm genannt. 3) Nikomachus, der Arithmetiker, wird in zwei Perſonen getrennt; S. 29. **Tertio urbis conditae saeculo** (alſo etwa **Sacc. V. a. Chr.**) **floruit Nicomachus Arithmeticus.** S. 60. (**Sacc. V. a. Chr.**) **Nicomachus Arithmeticus de musica etiam egit, ex Zarlino.** Aber S. 61. (**Sacc. II. p. Chr.**) heißt es **Nicomachus Gerassenus Pythagoricus Harmonices manuale edidit duobus libris.** Nun hat aber Nikomachus ſchon auf dem Titel der 1538 in Paris erſchienenen Ausgabe ſeiner Arithmetik den Beinamen Γερασινὸς, (ſonſt Γερασηνός), von ſeinem Geburtsorte Geraſa in Syrien. Demnach iſt **Nicomachus Arithmeticus** und **Nicomachus Gerasenus** eine Perſon. Eben ſo aber iſt das **Harmonices manuale** S. 61. eben das Werk **de musica**, welches S. 60. ſechshundert Jahre früher aufgeführt wird. 4) S. 29. heißt es: **Utrumque opus Nicomachi excudebat Vachelus Paris. 1538.** (alſo hat Dechales die Ausgabe gekannt). **Eandem Arithmeticam explicuit commenta-**

rio Asclepius et Trallianus Ammonii discipulus, et *Jamblichus, cujus ultimi scripta dicuntur esse in Bibliotheca Regia.* Alſo weiß Dechales auf dieſer Seite nur als Gerücht, daß das Werk des Jamblichus als Manuſcript exiſtirt. Auf der folgenden Seite iſt er ſchon beſſer unterrichtet; da ſagt er nämlich: Constantini temporibus Jamblichus Chalcidensis ex Coelesyria scripsit Graece introductionem in Nicomachi arithmeticam (falſcher Titel) . . . quam Sam. Tennulius latinam fecit et notis illustravit. 1660. Dieſes iſt aber eben der S. 29. erwähnte Commentar. 5) Man hat lange den Mathematiker Euklides mit dem gleichnamigen Philoſophen von Megara verwechſelt. Das mochte hingehen, ſo lange man über den Mathematiker keine genaueren Nachrichten hatte. Seit man aber wußte, daß der Mathematiker unter den erſten beiden Ptolemäern in Alexandrien gelebt und gelehrt hat, war eine ſolche Verwechſelung gedankenlos, da Alexandrien erſt beinahe hundert Jahre nach dem Tode des Euklides von Megara (424) erbaut worden iſt. Was ſoll man aber von einem Manne halten, der beide Facta ſich vollkommen deutlich macht, und dann doch nicht weiß, ob beide nicht vielleicht eine und dieſelbe Perſon geweſen ſind? Dechales raiſonnirt S. 8. ſo: Ad Euclidem tandem Geometram pervenimus, quem plerique eundem putant esse cum Euclide Megarensi, ex Megaris urbe in Isthmo, cujus nomine secta Megarica dicta fuit etc. Fuit Socratis auditor, et huic successit Ichtias. Diogenes Laertius ait Platonem se contulisse Megara ad Euclidem. Constat item eundem Platonem Delios ad Euclidem remisisse . . . . Euclides Geometra, sive idem sit cum Megarensi sive non, longo tempore Alexandriae Geometriam docuit etc. Aber genug des Unſinns. Wir ſehen, daß Dechales auf einer Seite nicht gewußt hat, was er auf der vorigen geſagt hatte. Dazu kommt noch, daß er nie die Quellen angiebt.

J. A. Krebs dissertatio de originibus et antiquitatibus mathematicis. Jenae. 1702. 4.

M. B. W. Marperger dissertatio historico-mathematica de fatis matheseos. Altdorf. 1702. 4.

Zwei unbedeutende Diſſertationen, die nur ſchon Geſagtes wiederholen.

E. Bernardi veterum mathematicorum Graecorum, Latinorum et Arabum synopsis seu scripta quae re-

periri potuerunt dirigenda voluminibus XIV. (adjecta est Huntingtoni epistolis). *London.* 1704. 8.

Iſt wieder abgedruckt in J. A. Fabricii Bibliotheca Graeca (Hamburg. 1716. 4.) T. II, p. 564—587. (Lib. III, c. 23), wo der Titel heißt: Veterum mathematicorum scripta, quae reperiri potuerunt, dirigenda voluminibus XIV. Quorum Catalogum ab Edvardo Bernhardo pridem compositum Thomas Smithus Vir. Clariss. subjecit ejus Vitae ad calcem Epistolarum Huntingtoniarum editae Lond. 1704. 8. — Bernhard hatte die Idee, eine Sammlung aller alten Mathematiker in 14 ungeheuren Bänden herauszugeben. Dieſe Rieſenausgabe ſollte neben einer kritiſchen Recenſion des Urtextes eine gute lateiniſche, ferner, wo möglich, eine oder mehre arabiſche, perſiſche u. a. Überſetzungen, die alten, griechiſchen und arabiſchen und Auszüge aus den wichtigeren neueren Commentaren u. ſ. w. enthalten. In jedem Bande ſollte das Gleichartige zuſammengeſtellt, und an die Hauptwerke von Euklides, Apollonius, Archimedes, Pappus, Athenäus, Diophantus, Ptolemäus ſollten die verwandten kleineren griechiſchen, römiſchen und arabiſchen Schriften angereiht worden. Die vorliegende kleine Schrift enthält die vollſtändige Dispoſition, den detaillirten Plan dieſes großartigen Unternehmens, und verdient inſofern hier Erwähnung, als ſie reichhaltige literariſche Notizen darbietet und eine ausgebreitete Bekanntſchaft des Verfaſſers ſelbſt mit den unbedeutenderen alten Mathematikern verräth. Der ſechſte Band war für die Arithmetik und Algebra beſtimmt, und ſollte die Werke von Diophantus, Theon Smyrnäus, Nikomachus, die Theologumena, Jamblichus, Asklepius, Boethius, Barlaam, Maximus Planudes, Thabet ben Korah (de veritate propositionum algebricarum demonstrationibus geometricis adstruenda), Auszüge aus Sextus Empiricus, aus Leonard von Piſa, aus Pell's Vorleſungen über Diophant, die Arithmetik von Abraham Kai, Alkhindi, einige anonyme Werke und Auszüge aus den neueren Arithmetikern und Algebriſten enthalten. Dieſes als Probe. Bernhard giebt meiſtens auch an, wo die nöthigen Manuſcripte zu finden ſind. Er ſcheint ſich ſehr für die Idee intereſſirt zu haben. Die Ausführung wäre indeß auch dann wohl unterblieben, wenn der Tod ihn weniger früh überraſcht hätte.

Bernardino Baldi, cronica de' Matematici overo epitome dell' Istoria delle vite coro. Urbino. 1707. 4.

Ich habe dieſes Werk nicht erhalten können. Montucla (T. I.

préf. p. V.) ſtellt es in eine Kategorie mit Blancanus. Wald (Verſuch einer Einleitung in die Geſchichte und Kenntniſſe ꝛc. Halle 1784.) ſagt: „ein, Baumgartens Urtheil ohnerachtet, fleißiges und mit den nöthigen mathematiſchen Einſichten abgefaßtes Verzeichniß von 366 Mathematikern, welches die Grundlage eines weitläuftigern Werkes, das aber der Tod des Verfaſſers hinderte, werden ſollte."

C. Wolfii programma de incrementis quae res mathematicae intra unius Saeculi ambitum cepere. Halae. 1707. 4.

iſt mir unbekannt geblieben. Dagegen will ich bei dieſer Gelegenheit bemerken, daß deſſelben Verfaſſers Kurzer Unterricht von den vornehmſten mathematiſchen Schriften, im vierten Band ſeiner Anfangsgründe aller mathematiſchen Wiſſenſchaften, und noch ausführlicher im fünften Bande der Elementa Matheseos universae, obgleich hauptſächlich Bibliographie, doch Manches auf Geſchichte der Mathematik Bezügliches enthält.

J. R. Fäſch, hiſtoriſche und methodiſche Einleitung in die geſammten mathematiſchen Wiſſenſchaften. Dresden. 1716. 4.

Steinbrück, de magia mathematica s. algebra commentatio, praeter ortum et progressum artis elegantissimae usum quoque ejus exhibens. Dresd. 1719. 4.

J. G. Doppelmaier, hiſtoriſche Nachricht von den Nürnberger Mathematicis und Künſtlern, welche von dreyen Seculis her durch ihre Schriften und Kunſtbemühungen die Mathematik und mehre Künſte trefflich befördert. 2 Thle. Nürnberg. 1730. fol.

Büchner, Entwurf einer Hiſtorie der Rechenkunſt. Waldenburg. 1739. 8.

Dieſe vier Schriften kenne ich nicht. Eben ſo wenig habe ich die folgende erhalten können:

J. C. Heilbronner, Verſuch einer mathematiſchen Hiſtorie. 1ſter Theil, darinnen eine Abhandlung vom Nutzen der Mathematik überhaupt, und die Hiſtorie der Rechenkunſt enthalten. Frkft. u. Lpzg. 1739.

Wahrſcheinlich aber iſt der Inhalt dieſes Werkes in das folgende aufgenommen.

J. C. Heilbronner, historia matheseos universae a Mundo condito ad seculum p. C. n. XVI. praecipuo-

Digitized by Google

rum mathematicorum vitas, dogmata, scripta et manuscripta complexa. Accedit recensio elementorum, compendiorum et operum mathematicorum, atque historia Arithmetices ad nostra tempora. Lips. 1741. 4.

Eine von Adam bis Wallis ſich erſtreckende, jedoch in den letzten Jahrhunderten nur die Koryphäen nennende Aufzählung der Mathematiker und ihrer Werke, nebſt hiſtoriſchen Notizen aus ihrem Leben. Von Geſchichte der Wiſſenſchaft findet ſich hier noch keine Spur. Sonſt hat Heilbronner fleißig geſammelt, und nennt ſeine Auctoritäten, die jedoch nicht immer die beſten ſind; unſeliger Weiſe hat er vieles aus Dechales geſchöpft. Daher iſt dieſe ſeine reichhaltige Nomenclatur nicht ohne einzelne Unrichtigkeiten; z. B. der oben genannte Geſchichtſchreiber der Mathematik, Eudemus von Rhodus, befindet ſich hier, wie bei Blancanus und Dechales, unter den Mathematikern des vierten Jahrhunderts n. Chr., alſo etwas verſpätet für einen Schüler des Ariſtoteles; und doch nennt ſchon Ramus S. 22. ihn an ſeiner richtigen Stelle mit Theophraſt zugleich. Der zweite Abſchnitt, die Geſchichte der Arithmetik, geht etwas mehr in die Sache ein, iſt aber auch noch ziemlich mager. Zudem iſt es ein Übelſtand, daß Heilbronner alle Büchertitel, Deutſche, Italieniſche, Franzöſiſche, Engliſche, ins Lateiniſche überſetzt; für ein literariſches Werk nicht nur eine unnütze, ſondern ſogar eine ſchädliche Mühe. Der Werth des Werkes beſteht in einem großen Reichthum hiſtoriſcher Data. Montucla ſelbſt (T. 1. préf. p. VI.) geſteht, ce chaos m'a souvent fourni des lumières utiles. Das Verzeichniß mathematiſcher Manuſcripte auf den bekannteſten Europäiſchen Bibliotheken (S. 538—650) iſt unzuverläſſig und ungenau, alſo unbrauchbar; es ſind daſelbſt allein ſechszehn Manuſcripte von Diophant's Arithmetik angeführt, da doch bekanntlich nur fünf exiſtiren; wenn unter jenen ſechszehn auch lateiniſche Überſetzungen mitbegriffen ſind, ſo wird der Übelſtand nur dadurch verſchlimmert, daß Heilbronner das an den einzelnen Stellen nicht bemerkt.

Gua-de-Malves, recherches du nombre de racines réelles ou imaginaires (in der Hist. et Mém. de l'Acad. des sciences. Paris. 1741.)

Der erſte oder hiſtoriſche Theil dieſer Abhandlung iſt voller Falſa. Der Verfaſſer ſcheint die Geſchichte nur aus fremden Berichten auf Treu und Glauben angenommen, nicht aus den Quellen geſchöpft zu haben.

J. N.

J. N. Frobesii historica et dogmatica ad Mathesin introductio, qua succincta matheseos historia cum ceteris ejusdem praecognitis, nec non systematis mathematici delineatio continentur. Helmst. 1750. 4.

Das Buch zerfällt in zwei Abtheilungen: Sectio I., qua mathematum praecognita sive de Matheseos natura, constitutione ac fatis dissertatio continetur p. 1—136. Sectio II., qua succincta Matheseos delineatio continetur. Der Geſchichte der Mathematik ſind §. X. bis §. XX. (S. 62—136) der erſten Section gewidmet. Nach einer Auseinanderſetzung des Nutzens der Geſchichte folgt §. XI. eine Literatur der Biographien der Mathematiker, §. XII. Literatur der mathematiſchen Bibliographien, §. XIII. Literatur der Geſchichte der Mathematik, alle drei recht brauchbar, wenn auch nicht ganz vollſtändig. Von §. XIV. ab folgt die Geſchichte ſelbſt, welche er in fünf Perioden theilt: 1) barbarica sive orientalis (Inder, Chineſen, Chaldäer, Phönizier, Ägypter). 2) graecanica vel graeca, von Thales bis zur Stiftung der Alexandriniſchen Schule. 3) Alexandrino-romana, bis zum ſiebenten chriſtlichen Jahrhundert. 4) arabica. 5) occidentalis. Eigene Forſchungen ſucht man auch hier vergebens, indeß giebt der Verfaſſer genau ſeine Quellen und Gewährsmänner an. Die Geſchichte ſelbſt iſt eine ziemlich compendiariſche Aufzählung der einzelnen Mathematiker und ihrer Erfindungen. Die Bearbeitung der vierten Periode iſt ein bloßes numerirtes Namenverzeichniß ohne alle Nachrichten, die fünfte Periode fehlt ganz. Viel Neues wird man aus dieſem Buche nicht lernen. Deſſelben Verfaſſers

J. N. Frobesii rudimenta biographiae mathematicorum. Helmst. 1751—1755. 4. (Sect. I., qua Mathematicorum vetustissimorum, hoc est illorum, qui ante Thaletem claruerunt, recensio chronologica continetur. 1751. Sect. II., de Thalete Milesio et qui hunc secuti sunt magnae Graeciae Mathematicis ordine chronologico strictim disseritur. 1754. Sect. III., qua isti Graeciae magnae Mathematici, qui paulo ante Euclidis tempora floruere, percensentur. 1755.)

habe ich nicht geſehen.

J. F. Stockhauſen, hiſtoriſche Anfangsgründe der Mathematik, worinnen der Urſprung, Wachsthum, man-

cherlei Veränderung und heutiger Zuſtand der Mathematik... gezeigt wird. Berlin 1752. 8.

Eine nach den verſchiedenen Diſciplinen geordnete, numerirte Aufzählung alter und neuer Mathematiker. Ein ſehr unbedeutendes und mit Fehlern reichlich verſehenes Buch. Gleich der erſte Satz in der Geſchichte der Arithmetik iſt eine Unwahrheit (S. 75.): „Diejenige Wiſſenſchaft, welche die Teutſchen die Rechenkunſt nennen, hießen die Griechen Ἀριθμητικήν." Das thun die Griechen, wie wir bald ſehen werden, nie.

Gründliche Abhandlung von dem Nutzen der Mathematik und der Rechenkunſt überhaupt. Frankfurt u. Leipzig. 1753.

Käſtner (Geſch. d. Math. 1. Th. S. 22.), der dieſes Buch beſeſſen hat, hält es für einerlei mit dem oben erwähnten Werk von Heilbronner, welches er nicht geſehen hat. Er ſagt: „meiſt Geſchichte der Arithmetik, d. i. Titel arithmetiſcher Bücher; 204 Seiten, die Scheibel auch bei jenem zählt. In dem meinigen zeigt ſich Heilbronners Art und Kunſt. Ich urtheile alſo, es iſt das von Scheibel angeführte, nur mit einem andern Titelblatte, des Sammlers Namen weggelaſſen."

G. W. Krafft, institutiones geometriae sublimioris. Tubing. 1753. 4.

„ſind in der Chronologie alter Geometer ein gutes Hülfsmittel." (Wald, Verſ. einer Einl. in die Geſch. d. Kenntn. S. 153.)

J. F. Montucla, histoire des Mathématiques, dans laquelle on rend compte de leur progrès depuis leur origine (nicht a mundo condito, wie Heilbronner) *jusqu'à nos jours, etc. II. tomes. Paris.* 1758. 4.

Neue Ausgabe von la Lande, IV. tomes. Paris. 1799. 1800. 4.

Dieſes Werk iſt das erſte, welches den Namen einer Geſchichte der Mathematik verdient. Mit Geiſt und Gelehrſamkeit dringt der Verfaſſer in die Sache ein, und nicht zufrieden mit einer bloßen Nomenclatur, bemüht er ſich die Entſtehung und allmählige Fortbildung der einzelnen mathematiſchen Diſciplinen philoſophiſch und hiſtoriſch zu entwickeln, und jeder billige Leſer muß, wenn er auch im Reſultate mit Montucla nicht übereinſtimmt, doch deſſen redliches Bemühen, etwas Gutes zu geben, gebührend anerkennen. Schade, daß auch dieſes ſonſt ſo werthvolle Buch nicht immer genau genug, ſeine Nachrichten nicht immer zuverläſſig ſind. Es wäre für die Sache

beſſer geweſen, wenn Montucla ſeinem urſprünglichen Plane getreu die angewandte Mathematik ganz von ſeiner Geſchichte ausgeſchloſſen und ſich nur über die Geometrie, Arithmetik, Algebra und höhere Analyſis ausgebreitet hätte. Was das Werk jetzt an äußerer Vollſtändigkeit gewonnen hat, hat es an Tiefe und Gründlichkeit verloren. Montucla hat die Quellen flüchtig, zum Theil wohl auch gar nicht geleſen, wovon wir im Verlaufe dieſes Werkes mehre Beiſpiele finden werden. Es war aber auch in der That zu viel für einen Mann, eine ganz neue Bahn betretend, eine aus den unmittelbaren Quellen geſchöpfte Geſchichte der Geometrie, Arithmetik, Algebra, Mechanik, Aſtronomie, Optik, Schiffahrtskunde, Geographie, Chronologie, Gnomonik, Differential- und Integralrechnung zu ſchreiben. Dieſes Streben nach extenſiver Vollendung mußte die intenſive erſticken. Deßungeachtet beſitzt die Mathematik in dieſem Werke einen großen Schatz, und ich müßte wenig erkenntlich ſein, wenn ich verhehlen wollte, daß mir daſſelbe, trotz aller Vorſicht, die ich bei dem Gebrauche deſſelben nöthig fand, eine große Hülfe und oft ein wünſchenswerther Wegweiſer zu den letzten Quellen geweſen iſt. Jedenfalls ungerecht ſind die bitteren Urtheile, mit welchen Coſſali den Verfaſſer faſt durch ſein ganzes Werk verfolgt, und worüber dieſer ſich mit Recht beklagt. (T. II. additions et corrections p. 714. 715. der zweiten Aufl.). Einzelne Falſa werde auch ich ihm öfter nachzuweiſen haben, aber wir wollen darum nicht ein Werk verdammen, deſſen Verfaſſer ſo viel geleiſtet hat, wie Montucla. Sicher aber wiegt ein Fehler, den Wallis und Montucla zugleich begehen, bei dem erſteren unendlich ſchwerer, eben darum, weil er einen einzelnen Theil der Wiſſenſchaft behandelt, und man deshalb durchgehende Gründlichkeit von ihm zu fordern berechtigt iſt.

Nach Wrede (Encyklop.-ſcientifiſche Literatur, drittes Heft, S. 5.) iſt der erſte Theil dieſes Werkes ins Deutſche überſetzt und mit berichtigenden Anmerkungen und Zuſätzen vermehrt von J. J. Berghaus. Wrede giebt aber weder Ort noch Jahrzahl an.

***Savérien**, histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences exactes et dans les arts qui en dependent, savoir, l'arithmétique, l'algèbre, la géometrie, l'astronomie, la gnomonique, la chronologie, la navigation, l'optique, la méchanique, l'hydraulique, l'acoustique et la musique, la géographie, l'architecture*

etc.; avec un abrégé de la vie des auteurs les plus célèbres dans ces sciences. Paris. 1766. 8.

Die Geſchichte iſt nach den Wiſſenſchaften geordnet. Als Anhang S. 426—500 die Biographien berühmter Mathematiker in chronologiſcher Ordnung. Es iſt unbegreiflich, wie acht Jahre nach dem erſten Erſcheinen des Montucla'ſchen Werkes noch ſolch eine Mißgeburt hat auf die Welt kommen können. Ich will mich ein für allemal der Mühe überheben, dieſes Buch mit ſeinem pomphaften Titel wegen einzelner Unrichtigkeiten in der Folge zu citiren; zu dem Ende ſchreibe ich hier als Probe folgende Stellen aus dem Abſchnitt Histoire de l'algèbre (p. 32. folg.) ab: Malgré les efforts des Mathématiciens pour perfectionner la science des Nombres et pour résoudre par le moyen de cette science les problèmes les plus curieux et les plus difficiles, cependant on reconnut qu'elle étoit resserrée dans des limites étroites. Les Nombres étant déterminés, on ne peut donner, en s'en servant, que des solutions particulières. (Das gilt auch noch von den Algebriſten bis zu Vieta's Zeit, iſt alſo nicht charakteriſtiſcher Mangel der Arithmetik). Chaque problème de même genre exige une solution qui lui soit propre: tout est même donné en Arithmétique. (Das ſoll heißen, in der gewöhnlichen Arithmetik wird keine unbekannte Größe angenommen; das folgende dient noch zur Erklärung). La chose qu'on cherche est presque exprimée (!), quoiqu'elle ne soit point désignée spécialement (Hat der Verfaſſer ſich dabei etwas gedacht?). Il est néanmoins des problèmes où l'inconnue (wo kommt die auf einmal her?) ne peut être représentée par des Nombres. (Das kann ſie überhaupt niemals, eben weil ſie unbekannt iſt). Il faut pour l'indiquer un caractère symbolique qui n'ait aucune valeur (!!!): l'Arithmétique est alors en défaut. Les Mathématiciens Arabes le sentirent les premiers (iſt hiſtoriſch unwahr); et pour y suppléer, ils chercherent à la généraliser, en calculant avec des caractères symboliques. (Das haben die Araber nie gethan; ſie haben überhaupt gar keine Rechnungszeichen, ſondern drücken alle Operationen mit vollſtändigen Worten aus). Par le moyen de deux sortes de caractères (wie geſagt, hat ſie keine einzige) ils distinguerent les choses connues de celles qu'ils ne connoissoient pas, et formerent ainsi une nouvelle Arithmétique, qu'ils appellerent *symbolique* (das iſt alſo ein Arabiſches Wort!).

Digitized by Google

Nous ignorons ce que c'étoient que ces symboles, et en quel tems les Arabes commencerent à les employer (das weiß, aus dem angeführten Grunde, überhaupt kein Menſch): seulement nous savons qu'en suivant cette idée, c'est-à-dire en se servant d'expressions générales et de signes universels, ils vinrent à bout de calculer non seulement ce qu'ils ne connoissoient pas encore (was ſoll das heißen? giebt ſich denn überhaupt irgend ein Menſch die Mühe etwas auszurechnen, was er ſchon weiß? aber der Zuſatz macht die Sache noch beſſer), mais aussi ce qu'on ne sauroit exprimer par aucun nombre (das iſt der Zweck jeder Rechnung; denn wenn man etwas ſchon durch eine Zahl ausdrücken kann, bedarf es nicht mehr der Berechnung). Ils firent plus: ils soumirent au calcul les quantités positives et les quantités négatives, et dès-lors ils résolurent des questions dans lesquelles il s'agissoit d'évaluer en même-tems et le bien qu'un homme avoit, et celui qu'il ne possedoit pas (! O Saverien! Wie dumm ſind unſere Zeitgenoſſen gegen deine Araber! Sav. hat wahrſcheinlich einmal gehört, daß man, um Anfängern den Begriff von poſitiv und negativ anſchaulich zu machen, ſich des Bildes bedient, daß Poſitives und Negatives ſich verhalte, wie Vermögen und Schulden). On croit que ces Peuples (es war bisher immer nur von einem die Rede) ont appris tout cela des Indiens. C'est une prétention (ſehr apodictiſch). Il y a des Erudits, au contraire, qui veulent que ce soient les Grecs qui aient enseigné cette invention aux Arabes (vorher hieß es ja aber ausdrücklich, daß die Arabiſchen Mathematiker zuerſt auf dieſe Idee gekommen ſeien). Quoi qu'il en soit, ceux-ci employoient des caractères grecs pour exprimer les quantités connues et les quantités inconnues (da wiſſen wir ja auf einmal doch, ce que c'étoient que ces symboles). Ils purent par ce moyen décomposer une question (!), pour comparer ensemble ces quantités, et ils formerent ainsi une Arithmétique symbolique, ou un Art qu'ils appellerent *Algial Walmulkabala* (ſoll heißen Algebre w'almukabala; vorher ſollte ja der Arabiſche Name Arith. symbolique ſein), deux mots qui signifient réparer, rétablir (das würde ein Araber in jenen Worten ſchwerlich entdeckt haben; vergl. mein zweites Kapitel), et que nous avons rendus par le mot *Algebre* (alſo das franzöſiſche Wort Algebre iſt eine Überſetzung der beiden Arabiſchen Algial Walmulkabala). Les Ou-

vrages qu'ils publierent sur cet art, ne sont point venus jusqu'à nous (zum Glücke iſt das doch geſchehen, und ich hoffe in meinem zweiten Bande Manches daraus mitzutheilen), et nous ignorerions la découverte qu'ils en ont faite, si *Diophante,* qui vivoit vers le milieu du quatrième siècle, ne nous l'eût appris (Diophant hat uns mit den Erfindungen der Araber in der Algebra bekannt gemacht, horribile dictu! aber es kommt noch beſſer): on peut même regarder cet Auteur comme le premier Algébriste (alſo hat doch nach Saveriens Meinung der erſte Algebriſt uns mit den Erfindungen der Späteren bekannt gemacht). Son livre est intitulé, *Questions Arithmétiques.* C'est là qu'on voit les progrès que les Arabes y avoient faits jusqu'à ce tems (!!! Da läuft dem Leſer denn am Ende doch Alles bunt durch einander: „Die Araber haben die Algebra erfunden; ſie haben ſie von den Griechen gelernt und bedienen ſich als Symbole Griechiſcher Buchſtaben; wir würden nichts davon wiſſen, wenn Diophant es uns nicht erzählt hätte; Diophant lebte im vierten Jahrhundert; er war der erſte Algebriſt; ſein Werk macht uns mit den Fortſchritten der Araber bekannt.“ Und dieſes Alles ſo zu ſagen in einem Athemzuge! Da fragt man doch endlich ſelbſt verwirrt: War Diophant ein Araber? Wann haben die Araber Algebra getrieben? Über die erſte dieſer Fragen iſt Saverien gewiß ſelbſt nicht im Klaren geweſen, denn gleich hinterher wundert er ſich, daß Diophant ſich griechiſcher Buchſtaben bedient, was er oben auch von den Arabern ſagte). Il est fâcheux que Diophante ne nous ait fait connoître ni leur (nämlich der Araber) marche, ni celle qu'il a suivie dans ses méditations. (Das erſtere thut er allerdings nicht und zwar aus guten Gründen, das letztere aber immer). Il se sert de caractères grecs pour exprimer les quantités et les signes qui les unissent ou qui les séparent (wenn dieſe Worte einen Sinn haben, ſo ſagen ſie die Unwahrheit; denn wenn hier Verbindung und Trennung ſo viel heißen ſollen als Addition und Subtraction, ſo iſt die Sache inſofern unrichtig, als Diophant für die Addition, die wir durch + ausdrücken, kein Zeichen anwendet); . . . *Xilandre,* dans le cinquième siècle (! die Überſetzung erſchien 1575, alſo etwa elf Jahrhunderte ſpäter) traduisit l'Ouvrage de Diophante du grec en latin. Et environ vers le huitième siècle (daß es ein Jahrhundert ſpäter geſchah, wollen wir hier nicht tadeln) un Arabe, nommé *Mohammed ben-Musa,* composa un traité d'Algebre,

dans lequel il donna la résolution des problèmes du second dégré, problèmes qu'on n'avoit point encore résolus parfaitement u. ſ. w. — Noch ein Paar einzelne merkwürdige Stellen will ich herausheben; p. 41. Dans ces calculs (er hatte vorher von Cardan und Bombelli geſprochen) les quantités étoient écrites; c'est-à-dire qu'on nommoit la chose inconnue, ***la Cosa.*** On appelloit ***Censo,*** le produit ou le quarré de la quantité cherchée; ***Cubo*** ou le Cube la troisième puissance de cette quantité. On changea bien en différens tems cette manière d'exprimer les quantités, mais on les écrivoit toujours. A l'égard des signes, on se servoit des premières lettres de l'alphabet. Les Nombres entroient aussi dans les équations, et tout cela embarrassoit beaucoup et ne donnoit guères que des solutions particulières. Die größte Verwirrung aber ſcheinen dieſe Sachen in des Verfaſſers Kopf angerichtet zu haben. Denn S. 43. heißt es ſchon wieder: Cependant on écrivoit toujours les quantités, comme je viens de le dire. Cela formoit un grand embarras dans la résolution des équations. ***M. Viete*** est le premier qui s'est servi des lettres de l'alphabet, pour désigner les quantités connues. Die bekannten Größen aber hatte man nie durch Worte ausgedrückt (das ſoll das écrire heißen), ſondern immer durch Zahlen. — Was ſoll man aber mit ſolchen Sätzen machen, wie die folgenden: Ce géomètre (Jacques Grégori) découvrit une proprieté des polygones inscrits et circonscrits aux sections coniques (p. 100.); — Mr. de Beaune proposa à Descartes un problème qui est devenu très célèbre sous le nom de Problème de M. de Beaune, lequel consistoit à construire une courbe, avec des conditions qui rendoient cette construction extrèmement difficile (p. 103.). — Quant à Snellius, il enrichit la Géométrie de deux théoremes, par lesquels il détermina les limites du cercle, en lui inscrivant et circonscrivant des polygones avec une exactitude presque aussi grande que celle que ***Ludoph Vanceulen*** (sic!) avoit eue pour l'extraction de ses racines (p. 89.). Aber ich will den Leſer nicht weiter ermüden. Jedenfalls wird man es nicht übertrieben finden, wenn ich ſage, der Verfaſſer weiß nicht, wovon er ſpricht.

Bei dem Lehrbuch der Mathematik durch B. F. Mönnich (2 Theile, jeder in 2 Abtheilungen) Berlin 1781—97. 8. (zweite

Aufl. 1800—1801) befindet ſich als Anhang zur zweiten Abtheilung des erſten Theils eine

Kurze Geſchichte der theoretiſchen Mathematik nach der Ordnung der Hauptſtücke im Lehrbuche.

Da die kleine Schrift auf Originalität und Quellenſtudium keine Anſprüche macht, ſo kann man es ihr nicht verargen, daß ſie die Fehler ihrer Vorgänger reproducirt. Sie ſteht zu anſpruchslos da, als daß man an ihr ſollte zum Splitterrichter werden wollen. Sie iſt immer eine angenehme und ſchätzenswerthe Zugabe zu einem Lehrbuche der Mathematik, und es wäre zu wünſchen, daß mehre Bücher der Art ſolche kurze hiſtoriſche Überſichten über ihre Wiſſenſchaft lieferten.

Hollenberg, Nachrichten von dem Leben und den Erfindungen der Mathematiker. Münſter. 1788. 8.

Lemoine, traité élémentaire des mathématiques, ou principes d'Arithmétique, de Géométrie et d'Algèbre, avec les sections coniques etc. etc., l'histoire des Mathématiques pures et de Géomètres les plus célèbres. Paris. 1789. 8. (Auch 1790. 1793.)

Beide Werke ſind mir unbekannt geblieben. Von dem letzteren ſagt Rogg (Handb. d. math. Liter. S. 225): „Bei der Geſchichte der Mathematik, welche durch alle Jahrhunderte bis zum Ende des 18ten Jahrh. durchgeführt iſt, ſind auch, in beſonderen Noten, die Biographien der berühmteſten Mathematiker angegeben."

Ab. Bossut, Quadro dei Progressi delle Mathematiche tradotto dal Franc. Milano. 1793. 8.

Über dieſes Werk ſiehe unter **C. Bossut, essai sur l'histoire générale des mathématiques. 1802.**

J. G. Prändel, Algebra nebſt ihrer literariſchen Geſchichte. München. 1795. 8.

L. W. Gilbert, de natura, constitutione et historia matheseos primae vel universalis, seu metaphysices mathemat. commentatio. Halle. 1795. 8.

Beide Werke habe ich nicht geſehen.

A. G. Käſtner, Geſchichte der Mathematik ſeit der Wiederherſtellung der Wiſſenſchaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Vier Bände. Göttingen. 1796—1800. 8.

Ein ſonderbares Buch. Im Grunde thut Käſtner hierbei nicht

viel mehr, als daß er uns ſeine übrigens recht ſchöne mathematiſche Bibliothek beſchreibt, lange Titel abſchreibt, Stücke aus Vorreden und epistulis nuncupatoriis copirt, durch ſechszehn Seiten hindurch ein fades Spiel beſchreibt, bei welchem durchaus nichts mathematiſch iſt (Th. I. S. 226. folgd.), und dann hin und wieder erzählt, wann und von wem er dieſes oder jenes Buch gekauft oder als Geſchenk erhalten habe. Dazu kommt, daß das Werk in einem aphoriſtiſchen Style, der ans Unverſtändliche gränzt, geſchrieben iſt, in welchem Käſtner in ſeinem Alter, wie es ſcheint, etwas Komiſches ſuchte; in denſelben Genre iſt z. B. ſeine Vorrede zu Roſenthal's Encyclopädie der Mathematik, die um dieſelbe Zeit erſchien. Ich halte es nicht für nöthig, Belegſtellen anzuführen, da das Buch gewiß Jedem zugänglich iſt. Von einem Eingehen in die Wiſſenſchaft iſt faſt nirgend die Rede. Das Einzige, was man aus dem Buche lernen kann, iſt einige Bücherkenntniß. Aber auch hierin ſcheint den Verfaſſer mehr der Zufall, als irgend ein beſtimmter Plan geleitet zu haben. Mit einem Worte, das Buch iſt alles Mögliche, nur keine Geſchichte der Mathematik. Freilich iſt dieſes Werk auch keine aus freiem Antriebe unternommene Arbeit, ſondern Käſtner iſt dazu aufgefordert worden, weil man von ſeiner bekannten ausgebreiteten Bücherkenntniß ſich ein günſtigeres Reſultat verſprach.

Deſto erfreulicher iſt es, wenn man auf Vorarbeiten ſtößt, wie das folgende Werk iſt:

Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa, dell' Algebra, Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita di D. Pietro Cossali. 2 *Vol.* *Parma.* 1797—99. 4.

Dieſes vortreffliche Werk macht für die Periode, die es umfaßt, nämlich von Leonardo Bonacci, 1200, bis Bombelli, c. 1589, jede andere Geſchichte der Algebra überflüſſig. Gründliches Studium der Quellen, ſelbſt der handſchriftlichen, die nicht leicht Jemandem zugänglich ſind, z. B. des Werkes von Bonacci, Liebe zur Sache, geiſtreiche Auffaſſung und Darſtellung, kurz, Alles vereinigt ſich, um dieſes Werk zu einem der vorzüglichſten zu machen, welches über irgend einen Theil der Wiſſenſchaft erſchienen iſt. Es ſind zunächſt fünf alte Mathematiker, in deren innerſten Geiſt der Verfaſſer uns hineinführt, Leonardo Bonacci, Luca Pacioli, Tartaglia, Cardano und Bombelli. Daneben aber finden ſich geiſtreiche und gelehrte Discurſionen über Diophant, über die Araber, über ältere und neuere

Eliminationsmethoden u. a. Wenn es indeß erlaubt iſt, auch einem ſolchen Werke ſeine Mängel nachzurechnen, ſo möchte ich das anführen, daß Coſſali bei der Darſtellung der Methoden der Alten zu viel moderniſirt. Er ſtellt Alles mit den jetzt gebräuchlichen algebraiſchen Zeichen dar, und wenn das immerhin nur Form iſt, ſo ſind doch im ganzen menſchlichen Sein Form und Weſen ſo zart in einander verwachſen, daß man jene nicht verletzen kann, ohne dieſem zu nahe zu treten. Zumal aber ſind im Gebiete der Mathematik Form und Sache durchaus mit einander verſchmolzen, und ich brauche keinen Sachkundigen darauf aufmerkſam zu machen, daß es ſchwerlich möglich geweſen wäre, die Algebra auf den Standpunct der Allgemeinheit und Abſtraktion, den ſie heutzutage behauptet, zu erheben, wenn nicht die Mathematiker des ſiebzehnten Jahrhunderts ihr eine dieſer völligen Verallgemeinerung fähige Bezeichnungsart gegeben hätten. Wir ſchreiben jetzt mit der größten Geläufigkeit den Ausdruck x^n; wie wollten wir dieſen ſcheinbar einfachen, aber allgemeinen Ausdruck, ich will nicht ſagen mit Diophantiſchen oder Cardaniſchen, ſondern nur auch mit Harriot'ſchen Zeichen darſtellen, da dieſer Mathematiker bekanntlich die Potenzen noch durch Wiederholung der Wurzelgröße, aaa für a^3 ausdrückt? Wer weiß, ob Newton auf den allgemeinen Ausdruck von $(a+b)^{\pm\frac{m}{n}}$ gekommen wäre, wenn nicht Descartes ihm die Form a^3 ſtatt aaa vorher ſubſtituirt hätte. Darum iſt es eine der unerläßlichſten Pflichten des Hiſtorikers, die Leiſtungen eines alten Mathematikers auch in der Form getreu darzuſtellen, um dem Leſer kein falſches Bild von der Vorſtellungsweiſe jener Zeit zu geben. Dieſe Regel nun verletzt Coſſali zu häufig. Man weiß oft nicht, wie viel von dem, was er vorträgt, ihm ſelbſt, wie viel dem Autor angehört, von dem er eben ſpricht. Ja Coſſali ſcheint ſelbſt den Einfluß der Form auf das Weſen und die Vorſtellung in der Mathematik für zu geringe geachtet zu haben, was ſich beſonders dadurch kund giebt, daß er dem gerade durch die Ausbildung und Verallgemeinerung der formellen Darſtellung um die Mathematik im Allgemeinen und namentlich um die Algebra ſo hoch verdienten Vieta nicht die Gerechtigkeit widerfahren läßt, die dieſem großen Manne in ſo hohem Grade gebührt. Aber auch das Vollkommenſte kann auf Erden nicht ohne Mängel ſein; ſo war Vieta es nicht, ſo iſt Coſſali es nicht; deßungeachtet müſſen wir Einen wie den Andern hochſchätzen und ihre Verdienſte dankbar anerkennen, die durch kleine Unvollkommenheiten nicht herabgewürdigt werden können.

Coſſali citirt in dem genannten Werke mehrmals ſeine Storia dell' Arithmetica, über die ich aber bis jetzt nichts Näheres, ſelbſt nicht in mathematiſchen Bücherverzeichniſſen habe erfahren können.

Murhard, Syſtem der Elemente der allgemeinen Größenlehre nach dem Zuſtande der Wiſſenſchaft am Ende des 18ten Jahrh., nebſt Literatur und Geſchichte derſelben. Lemgo. 1798. 4.

kenne ich nicht.

C. Boſsut, Essai sur l'histoire générale des mathématiques. 2 *tomes. Paris.* 1802. 8. Die zweite Auflage hat den Titel: *Histoire générale des mathématiques. Paris.* 1810.

Geiſtreiche Geſichtspuncte und Darſtellungen, aber mehr Raiſonnement als Geſchichte; ja der Verfaſſer nennt hiſtoriſche Unterſuchungen oiseuses (z. B. T. I. p. 195). Allerdings iſt es für einen geiſtreichen Mann angenehmer, über Thatſachen, die Andre erzählt haben, zu philoſophiren, als zu unterſuchen, ob dieſe Thatſachen ſelbſt wahr ſind oder nicht, und ob nicht etwa mit den Thatſachen zugleich das ganze Raiſonnement zu Boden ſtürzt. Solche Unterſuchungen erfordern Geduld und Anſtrengung. Im Ganzen enthält das Buch zu wenige Facta, und unter dieſen wenigen zu viele falſche. Selbſt in Betreff ſolcher Sachen, die zu des Verfaſſers Zeit ſchon längſt aufgeklärt waren, ſtellt er ſich ganz wieder auf den alten Standpunct; z. B. will er nichts davon wiſſen, daß die Araber die Ziffern und deren Gebrauch von den Indern erhalten haben, eine Anſicht, die, um Mehrer nicht zu gedenken, Voſſius, Wallis, Montucla ſchon längſt durch überwiegende Gründe erhärtet hatten. Dieſes übrigens vielfach geprieſene Werk iſt indeß ein recht angenehmes Leſebuch für Jemanden, dem an gründlicher und geprüfter hiſtoriſcher Wahrheit nicht eben viel gelegen iſt. Es hat daher auch die ſonſt unverdiente Ehre gehabt, faſt in alle gebildeten Sprachen überſetzt worden zu ſein, ins Deutſche mit Anmerkungen und Zuſätzen von N. Th. Reimer, 2 Thle., Hamburg 1804. 8., ins Italieniſche von Greg. Fontana, 4 Tomi, Milano 1802. 8., ins Engliſche von Bonnycastle, London 18.., 8.

Ich führte oben an: Boſsut, Ab., Quadro dei Progressi delle Mathematiche trad. dal Franc. Milano. 1793. 8. Ich habe dieſen Titel bei Rogg (Handb. d. math. Liter. S. 174) gefunden. Wenn das Ab. kein anderer Vorname (der in Rede ſtehende

heißt Charles), ſondern eine Abkürzung von Abbé ſein ſoll, ſo iſt dieſer Quadro vielleicht eine kurze, aus deſſelben Verfaſſers Cours des mathématiques à l'usage des écoles royales militaires. Paris. 1782 (auch 1783) entnommene Überſicht über die Geſchichte der Mathematik. Mir iſt weder der Quadro dei Progr. etc., noch der Cours des mathém. zu Geſichte gekommen.

Δημητρίου Παναγιωτάδου τοῦ Γοβδέλα στοιχεῖα Ἀλγεβρᾶς, ὁδοῦ Μαθηματικῆς μέρος πρῶτον. Halle. 1806. 8.

„Eine ſehr deutliche, mit einer zweckmäßigen Geſchichte der Analyſis verſehene Anleitung zur Algebra, die H. v. Gobdela eigentlich für ſeine Landsleute in Griechenland beſtimmt hat, wo man bisher bloß die Lehrbücher der alten griechiſchen Mathematiker kannte.“ Wrede a. a. O. S. 34. 35. Ich ſelbſt habe das Buch nicht geſehen.

Delambre, Arithmétique des Grecs.

Dieſe kleine, aber intereſſante Abhandlung erſchien zuerſt als Anhang an dem Werke: Les oeuvres d'Archiméd, traduits littéralement avec un commentaire par F. Peyrard. Paris 1807. 4., und nachher vermehrt in des Verfaſſers Histoire de l'astronomie ancienne. 2 Tomes. Paris. 1817. 4. als Anfang des zweiten Theils. Sie enthält eine vollſtändige und gründliche Darſtellung der praktiſchen Rechenkunſt der Griechen, mit Beiſpielen aus dem Commentar des Eutokius über Archimed's Kreismeſſung und des Theon über Ptolemäus Syntaxis, iſt alſo unmittelbar aus den Quellen geſchöpft, und das Beſte, was wir über dieſen Gegenſtand haben, wenngleich der Verfaſſer ſich hie und da Abweichungen von der Griechiſchen Vorſtellungsart erlaubt, die nicht zu billigen ſind. Eine deutſche Überſetzung (nach der erſten Auflage) haben wir unter dem Titel: Über die Arithmetik der Griechen, aus dem Franz. des H. Delambre überſetzt, mit Verbeſſerungen und einer Tabelle verſehen von J. J. J. Hoffmann. Mainz. 1817. 4. Die Verbeſſerungen beſtehen darin, daß der Schrift als Einleitung ein Artikel aus Klügel's mathem. Wörterbuche B. I. S. 174, die Geſchichte der Arithmetik enthaltend, und dazu ein Zuſatz, wahrſcheinlich aus der Feder des Überſetzers gefloſſen, vorangeſchickt iſt. Dagegen iſt zu bedauern, daß die Schrift ſelbſt durch eine Unzahl von Druckfehlern, namentlich in den Griechiſchen Rechnungsbeiſpielen, völlig entſtellt iſt.

L. Lüder, Pythagoras und Hypathia, oder die Mathematik der Alten. Lpzg. 1809. 8. 2te Aufl. Altenburg. 1812. 8.

Das Werk iſt aus dem Buchhandel verſchwunden, und ich habe es nicht zu Geſichte bekommen können.

Algebra of the Hindus with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhaskara, by Colebrooke. London. 1817. 4.

Die gelehrte Vorrede zu dieſem herrlichen Werke enthält ſehr ſchätzenswerthe Beiträge zur Geſchichte der Algebra, beſonders in Bezug auf ihre Fortbildung in Aſien. Wohl ſelten findet man ſo vielen lehrreichen Stoff auf einen ſo kleinen Raum zuſammengedrängt.

F. Buchner, de algebra Indorum. Elbing. 1821. 4.

iſt ein intereſſanter und ſchätzenswerther Auszug aus dem vorigen Werke. Namentlich hat der Verfaſſer das Verdienſt, die in der Colebrookeſchen Überſetzung, welche dem Original treu folgt, ziemlich unverſtändlich ausgedrückten Regeln der Indiſchen Mathematiker durch eine Übertragung in verſtändliche Formeln unſern Mathematikern zugänglich gemacht zu haben.

P. Franchini, Saggio sulla storia delle mathematiche. Lucca. 1821. 8.

J. H. M. Poppe, Geſchichte der Mathematik ſeit der älteſten bis auf die neueſte Zeit. Tübing. 1828. 8.

Libri, histoire des sciences mathématiques en Italie..

Alle drei Werke ſind mir noch unbekannt; das letzte kenne ich nur aus den Citaten bei Chaſles, hoffe aber es für die folgenden Bände meiner Geſchichte zu benutzen.

Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, par M. Chasles. Bruxelles. 1837. 4.

Dieſes in ſeiner Art vorzügliche Werk kenne ich nur aus der deutſchen Überſetzung, welche den Titel führt:

Geſchichte der Geometrie, hauptſächlich mit Bezug auf die neueren Methoden, von Chaſles. Aus d. Franz. übertragen von L. A. Sohncke. Halle. 1839. 8.

Obwohl nicht unſern nächſten Zweck betreffend, hat doch dieſes Werk einen ſo entſchiedenen Werth für die allgemeine Geſchichte der Mathematik, daß ich nicht umhin kann, es hier anzuführen. Die Geſchichte ſelbſt iſt kurz und gedrängt, faſt kompendienartig. Die

Digitized by Google

wahre Gelehrſamkeit, der eigentliche Werth ſteckt in den Noten, welche, verſchiedene abgeriſſene Gegenſtände behandelnd, den bei weitem größten Theil des Ganzen ausmachen. Gründlichkeit und Beleſenheit zeichnen den Verfaſſer aus. Indeß giebt die Art, wie er die Mathematik der Inder und Araber (in der 12. Note) abhandelt, hie und da einem gerechten Tadel Raum, wie wir an paſſendem Orte ſehen werden. Auch ſcheint Chasles ſeine Vorarbeiten nicht immer aufmerkſam genug benutzt zu haben. Um nur ein Beiſpiel zu nennen, ſo vermengt der Verfaſſer in der eben angeführten 12. Note durchgehend zwei Arabiſche Mathematiker, die beide Mohammed ben Muſa hießen, von denen der ältere aber von den Arabern immer nach ſeinem Vaterlande Alkharezmi genannt wird, der jüngere dagegen zum Unterſchiede noch den Namen ſeines Großvaters erhält und Mohammed ben Muſa ben Schaker heißt. Dieſer jüngere war Geometer und hatte noch zwei Brüder, Ahmed und Huſain, die ebenfalls als Mathematiker bekannt ſind. Jener ältere dagegen iſt der Verfaſſer der von Roſen herausgegebenen Algebra of Mohammed ben Musa (London. 1831.), den Chasles fälſchlich für einen der drei Brüder, der Söhne des Muſa ben Schaker hält. Ich würde dieſen Irrthum hier nicht erwähnt haben, wenn der Verfaſſer ihn nicht leicht hätte vermeiden können. Denn ſchon Coſſali (T. I. p. 214. 215.) warnt vor dieſer Verwechſelung der beiden gleichnamigen Mathematiker. Nach Casiri bibl. arab. hisp. Escur. T. 1. p. 418. 419. 427. hatten auch beide denſelben Vornamen (oder Kunjah), nämlich Abu Dſchafar; dagegen hieß nach Roſen (a. a. O. pref. p. V.) der ältere Abu Abdallah.

Dieſe Überſicht über die Literatur der Geſchichte der Mathematik im Allgemeinen und der Arithmetik und Algebra insbeſondre mag hier genügen. Auf große Vollſtändigkeit, namentlich in den unbedeutendern Schriften, macht dieſes Verzeichniß keine Anſprüche. Weſentliche und wichtige Werke habe ich nicht ausgelaſſen.

Werfen wir nun einen vorläufigen Blick auf die hiſtoriſche Entwickelung der Algebra, ſo wird ſich uns die intereſſante, aber keineswegs beiſpielloſe Thatſache herausſtellen, daß dieſe Wiſſenſchaft zweimal erfunden worden iſt, in Griechenland (oder wenigſtens von Griechen, wahrſcheinlich in Alexandrien) und in Indien, wie es ſcheint bei beiden Völkern unabhängig von einander; aber weder hier noch dort ſind wir im Stande, den Strom der neuen Wiſſenſchaft bis zu ſeinen Quellen zu verfolgen. Einige hie und da zerſtreut vor-

kommende Vorarbeiten abgerechnet, ſteht Diophant's berühmtes Werk in der Reihe der Griechiſchen Mathematiker ganz iſolirt da, nicht bloß in Bezug auf die alten Mathematiker, die ihm vorangingen, ſondern auch in Bezug auf die nachfolgenden. Das Werk ſcheint für ſeine Zeit, in welcher Griechenlands Cultur bereits bedeutend bergab ging, zu hoch geweſen zu ſein; wenigſtens iſt es ohne ſichtbaren Einfluß auf die Fortbildung der ſpäteren Griechen geblieben. Aber freilich ſind auch Pappus, Theon und, wenn man will, noch Proklus und Eutokius, kaum hundert Jahre nach Diophant, überhaupt die letzten Griechen, die als Mathematiker mehr als Schüler waren. Die Wiſſenſchaft ſinkt, wie das Kaiſerthum, mit Rieſenſchritten immer tiefer herab, bis wir endlich den Faden verlieren, an dem wir ihre Exiſtenz weiter verfolgen könnten. Aber was am Hofe zu Conſtantinopel keine Nahrung mehr fand, das erhob ſich allmählig in üppiger Fülle auf fremdem Boden. Der glänzende Hof der Abaſſiden in Bagdad, der Schrecken der Griechiſchen Kaiſer, ward das ſchützende Aſyl für Griechiſche Wiſſenſchaft. Indeß gingen die von ihren hochherzigen Khalifen aufgemunterten Araber keinesweges unvorbereitet an das Studium der Griechiſchen Mathematiker; ihnen war ſchon vorher eine andere Quelle, die Indiſche Mathematik zugefloſſen. Indien, die wahrſcheinliche Wiege des Menſchengeſchlechts, ſcheint ſich frühe auf eine nicht unbedeutende Stufe wiſſenſchaftlicher Bildung emporgeſchwungen zu haben. Zwar ſind wir mit unſern jetzigen Hülfsmitteln bis auf dieſen Tag nicht im Stande, die Mathematik der Inder ſehr weit aufwärts zu verfolgen. Brahmaguptas, deſſen Werk in mancher Beziehung ſich allerdings weſentlich über Diophant erhebt, lebte erſt am Anfange des ſiebenten Jahrhunderts. Aber wir haben Andeutungen auf viel frühere Mathematiker, von denen einer, Arjabhatlas, leicht älter als Diophant ſein kann. Aber laſſen wir einſtweilen dieſe Specialunterſuchungen auf ſich beruhen und verfolgen wir den Faden der Geſchichte. Aus dieſer Quelle nun waren den Arabern bereits, vielleicht unmittelbar, vielleicht auch durch Perſiſche Vermittelung, bedeutende mathematiſche Kenntniſſe zugefloſſen, bevor ſie die Griechen, zumal aber Diophant (den ſie erſt gegen das Ende des zehnten Jahrhunderts erhielten) ſich angeeignet hatten, und Almamun, ſchon vor ſeiner Erhebung zum Khalifate der Mäcenas des Orients, ſah ſich bereits veranlaßt, durch Mohammed ben Muſa Alkharezmi die Algebra wegen ihres häufigen Gebrauchs im Leben in einem

Digitized by Google

Compendium bearbeiten zu laſſen[16]. So vereinigten ſich in Bagdad zwei Bäche, welche allmählig zu einem bedeutenden Strome anwuchſen, in welchem ſich die beiden verſchiedenartigen Elemente, Griechiſche Geometrie und Indiſcher Calcul, gegenſeitig an einander abſchliffen und zu einer ſcheinbar neuen Bildung geſtalteten; und in dieſer neuen und eigenthümlichen Geſtalt kehrte die Wiſſenſchaft, die aus Europa ſeit dem fünften Jahrhundert ſo ziemlich verſchwunden war, in dieſe ihre Heimath mit dem Beginne des dreizehnten Jahrhunderts zurück. Freudig ward die lange Abweſende begrüßt und ſorgſam gepflegt. Zumal ſchien es, als wollten die *Italiener* jetzt gut machen, was ihre Vorfahren die alten Römer, denen die Mathematik immer fremd geblieben war, verabſäumt hatten. Viertehalb Jahrhunderte hindurch blieb die Förderung und Pflege der Algebra faſt ausſchließlich in den Händen der Italiener, und nur ſporadiſch rankt ſich hie und da ein Zweig des ſchönen Baumes über die Gipfel der Alpen hinaus. Aber mit dem letzten Viertel des ſechszehnten Jahrhunderts, nachdem die Wiſſenſchaft bereits durch die Auflöſung der cubiſchen und biquadratiſchen Gleichungen einen weſentlichen Zuwachs erhalten hatte, trat für ſie eine neue Periode ein, indem faſt zu gleicher Zeit zwei bedeutende Erſcheinungen auftraten, die dem ganzen mathematiſchen Studium eine neue Richtung und einen neuen Schwung gaben; es war einerſeits die Überſetzung des bis dahin den Europäern nur dem Namen nach bekannten Werks von *Diophant* durch *Xylander*, andrerſeits die Reformation der Algebra durch *Vieta*; von beiden Ereigniſſen werde ich gehörigen Orts mehr ſagen. Von hier an beginnt, wie geſagt, eine ganz neue Periode für die Algebra; ſie wird allgemeines Europäiſches Eigenthum, während ſie bisher nahe daran war, die Wenigen, die ihre Kunſtgriffe kannten, in den Ruf der Zauberei zu bringen; Erfindungen und Verbeſſerungen folgen Schlag auf

16) S. Roſen's Ausgabe dieſer Algebra S. 3. (S. 2. des Arab. Textes). Intereſſant iſt auch folgende Bemerkung von Chasles (Überſ. v. Sohncke S. 566.): „Merkwürdig iſt es auf jeden Fall, und wohl der Betrachtung der Gelehrten von Europa würdig, daß ein Werk über Algebra, welches von den Arabern im elften Jahrhundert als ein elementares betrachtet wurde, und gewiſſer Maaßen als ein practiſches Handbuch zum Gebrauch des Volks diente, daß dieſes 700 Jahre ſpäter die ars magna der Europäer war, und die Baſis und der Urſprung ihrer großen wiſſenſchaftlichen Entdeckungen." In den Zahlen herrſcht hier einige Verwirrung; Mohammed ben Muſa ſchrieb am Anfange des neunten Jahrhunderts.

auf Schlag ſo ſchnell auf einander, daß es ſchwer wird, einen neuen feſten Haltpunct zu gewinnen; neue Entdeckungen drängen ſich von allen Seiten faſt gleichzeitig herbei, und es gehört im ſiebzehnten Jahrhundert zu den Alltäglichkeiten, daß die Mathematiker ſtreitig ſind, wem bei einer neuen großen Erfindung die Ehre der Priorität gebührt. Zu der von Vieta eingeführten Methode der allgemeinen Coefficienten geſellte ſich noch im Laufe dieſes Jahrhunderts, was ohne Widerrede für die Mathematik das größte und reſultatenreichſte geweſen iſt, die Methode der allgemeinen Exponenten; ja es erwächſt aus dem von Fermat geſäeten Keime, der Methode der Maxima und Minima und der Tangenten, welche in mannigfacher Form und unter verſchiedenen Namen von Hand zu Hand gehend ſich immer vollkommener entwickelt, die Differentialrechnung, welche wie mit einem Zauberbande das ganze Gebiet der Mathematik umſtrickend, plötzlich die Scheidewände einreißt, welche bisher die einzelnen Disciplinen aus einander hielten, ſo daß es von da an keine Geſchichte der Algebra mehr, ſondern nur noch eine Geſchichte der Mathematik giebt.

Ich kann nicht umhin, hier eine Bemerkung zu machen, die übrigens für nichts weiter als einen gelegentlichen Einfall gelten ſoll; die nämlich, daß gerade die größten mathematiſchen Genies aller Zeiten, denen die Wiſſenſchaft ihre eclatanteſten Erweiterungen verdankt, der Mehrzahl nach nicht Mathematiker von Profeſſion, ſondern Dilettanten geweſen ſind. Unter allen Mathematikern des Alterthums ragt Archimedes hervor; er war ein Verwandter des Königs Hieron von Syracus, und lebte privatim den Wiſſenſchaften, wogegen die übrigen Griechiſchen Koryphäen, Euklides, Apollonius, Pappus u. ſ. w. Lehrer der Mathematik an der Alexandriniſchen Schule waren. Unter den Neuern eröffnet den Reihen Leonardo Bonacci, der Einführer der Algebra nach Europa; er war Kaufmann in Piſa; Kopernikus, der Entdecker der Weltordnung, war Doctor der Medicin und ſpäterhin Domherr in Frauenburg; Vieta, der Erfinder der Buchſtabenrechnung, wodurch er die Algebra zu dem Range einer Wiſſenſchaft erhob, war Maître-de-Requêtes am Hofe Heinrichs IV.; Bachet de Meziriac, Erfinder der allgemeinen Auflöſung der unbeſtimmten Gleichungen des erſten Grades und Hauptbegründer der Diophantiſchen Analyſis in Europa, war ein reicher Privatmann; Fermat, für deſſen tiefe Sätze aus der Theorie der Zahlen man bis auf den heutigen Tag noch nicht die von ihm er-

fundenen aber verſchwiegenen Beweiſe alle hat wiederfinden können, und der den erſten Anſtoß zur Erfindung der Differentialrechnung gab, war Juriſt und Parlamentsrath in Toulouſe; Napier Baron von Merchiſton, der Erfinder der Logarithmen, lebte eingezogen auf ſeinem gleichnamigen Landgute in Schottland; Descartes, der Erfinder der analytiſchen Geometrie und vieler wichtigen Lehren über die Natur der allgemeinen Gleichungen, war Officier; Leibnitz, der Erfinder der Differentialrechnung, um weiter nichts zu nennen, war Doctor der Rechte, dann erſt churfürſtlich Mainziſcher, hernach Braunſchweig-Lüneburgiſcher Rath, zuletzt Präſident der von ihm eingerichteten Academie der Wiſſenſchaften in Berlin. Nach dieſem Intermezzo kehren wir auf unſern Gegenſtand zurück.

Nach dem gegebenen Überblicke theilt ſich die Geſchichte der Algebra ziemlich ungezwungen in folgende fünf Perioden:

1. Die Algebra der Griechen, von Pythagoras (rechtwinkliges Dreieck in rationalen Zahlen) bis auf Diophantus.
2. Die Algebra in Aſien, und zwar
   a) bei den Indern.
   b) bei den Arabern.
3. Die Algebra numerosa in Europa, von Bonacci (1200) bis Bombelli (1589).
   a) Von Bonacci bis Pacioli (1494), quadratiſche Gleichungen.
   b) Das ſechszehnte Jahrhundert, kubiſche (Tartaglia) und biquadratiſche (Ferrari) Gleichungen.
4. Von Vieta und Xylander (1575), (Allgemeine Coefficienten, Algebra speciosa, Einfluß Diophant's) bis zur Erfindung der Differentialrechnung (Newton, Leibnitz).
5. Das achtzehnte und neunzehnte Jahrhundert.

Dieſem oberflächlich dargeſtellten Plane werde ich in meiner Geſchichte der Algebra folgen und jeder der vier erſten Perioden einen Band widmen, welcher einen in ſich abgeſchloſſenen Zeitraum behandeln wird, ſo daß jeder derſelben als ein für ſich beſtehendes Ganze angeſehen werden kann. Mit dem Ende des ſiebzehnten Jahrhunderts gedenke ich aber auch meine Arbeit zu beſchließen und die hiſtoriſche Behandlung der Algebra in der fünften Periode, von Leibnitz und Newton bis auf unſere Zeit, einem Anderen zu überlaſſen.

Ich habe in der oben gegebenen Überſicht und Recenſion meiner Vorarbeiten manches ſtrenge, vielleicht manches zu ſtrenge Urtheil gefällt. Es wird mir und meinem Werke vielleicht künftig nicht beſſer

gehen; ja ich weiß mit Gewißheit, daß ich bei dem beſten Willen nicht im Stande bin, ein vollkommen tadelfreies Werk zu liefern. Es ſei mir aber erlaubt, bevor ich meinen Gegenſtand ſelbſt angreife, hier auf einige Fehler aufmerkſam zu machen, die ich in ſo vielen der oben recenſirten Werke gefunden habe, und die ich nun deſto geſliſſentlicher zu vermeiden mich bemühen will, je grauſamer ſie bei meinen Vorſtudien in fremden Werken mich oft gequält haben, und je geeigneter ſie ſind, dem Zwecke einer wiſſenſchaftlich hiſtoriſchen Arbeit ſtörend entgegenzutreten.

Meine erſte Bemerkung betrifft die Citate. Die Regel, daß ein hiſtoriſcher Schriftſteller, was ſeine Belege und Auctoritäten anlangt, erſtens dieſelben richtig und genau, zweitens aber nur das citirt, was er geſehen hat, ſcheint ſo natürlich zu ſein, daß man es leicht für überflüſſig halten kann, über einen ſo trivialen Gegenſtand noch Worte zu machen. Und doch, wie oft und wie vielfach wird gegen beide Regeln gefehlt! Was ſoll man z. B. bei der Unzahl von Werken, welche Regiomontanus theils ſelbſt verfaßt, theils mit Vorreden und Anmerkungen herausgegeben hat, mit einem ſolchen Citat machen, wie es Bachet in der **Epistola ad Lectorem** vor ſeiner Ausgabe Diophant's giebt: **Joannes tamen Regiomontanus, tredecim Diophanti libros se alicubi vidisse asseverat?** Nun ſuche, wenn Du wiſſen willſt, ob das wahr iſt. Genauer iſt Voſſius (de IV. artibus pop. p. 432): **Diophanto inventionem Algebrae adscribit Jo. Regiomontanus, praef. in Alfraganum.** Beide Citate ſind aber außerdem ihrem Inhalte nach unrichtig; denn Regiomontan's Worte in der die Vorrede vertretenden **Oratio habita Patavii in praelectione Alfragani** (S. 4.) lauten alſo: **Diofanti autem tredecim libros subtilissimos nemo usquehac ex Graecis Latinos fecit, in quibus flos ipse totius Arithmeticae latet, ars videlicet rei et census, quam hodie vocant Algebram Arabico nomine.** Von dem Sinne, den Voſſius in die Stelle hineinlegt, iſt keine Spur vorhanden, und daß Regiomontanus Diophant's Werk ſelbſt geſehen habe, wie Bachet ſagt, kann zwar aus ſeinen Worten geſchloſſen werden, ſteht aber ſo geradezu auch nicht da, und Bachet's „se alicubi vidisse asserit" iſt jedenfalls unwahr, wenn er anders dieſe Stelle gemeint hat. Aber es iſt mir nicht gelungen, in Regiomontan's Werken, ſoweit ſie mir zugänglich waren, eine andere Stelle zu finden, die von Diophant handelt. Ein zweites Beiſpiel mag uns Montucla ſuppeditiren, wel-

3*

cher T. 1. p. 383 ſagt: Mohammed ben Musa . . . est donné par Cardan pour l'inventeur de la résolution des équations du second dégré; j'ignore sur quel fondement. Zu einer Note zu dieſer Stelle ſteht: Algebra. Abgeſehen nun davon, daß kein Werk von Cardan den Titel Algebra führt, und wahrſcheinlich ſeine Ars magna seu de regulis Algebraicis gemeint iſt, ſo iſt doch das Citat noch immer unbeſtimmt genug, um den Leſer, dem daran liegt, die Auctorität ſelbſt zu prüfen, beim Nachſuchen zu ermüden. Cardan erwähnt Mohammed's dreimal, einmal zu Anfang der Ars magna mit den Worten: Haec ars olim a Mahometo Mosis Arabis filio initium sumsit; etenim hujus rei locuples testis Leonardus Pisanus. Sodann De subtilitate l. XVI. p. 445. (ed. Basil. 1553): Huic Mahometus Moisis filius Arabs, Algebraticae, ut ita dicam, artis inventor, succedit. Endlich De mathematicis quaesitis II, 9. Fuit et Mahomet Moisis filius (sic enim inveni), qui celebratam artem, quam vulgo Algebrae vocant, in Arabia condidit, non totam, sed quatuor tantum ejus prima capita. Nun iſt erſtens an allen drei beigebrachten Stellen nicht von den quadratiſchen Gleichungen, ſondern von der Algebra im Allgemeinen die Rede; zweitens aber nennt ja Cardan in der Stelle aus der Ars magna, welche Montucla doch wahrſcheinlich im Sinne gehabt hat, mit klaren Worten ſeinen Gewährsmann; wie konnte alſo Montucla ſagen, j'ignore sur quel fondement? Daß auch Cardan falſch citirt, und daß bei Leonard von Piſa ſich eine ſolche Stelle nicht findet [17], iſt eine Sache für ſich. Und ſolcher Beiſpiele könnte ich unzählige beibringen. Beiſpiele von dem zweiten Fehler, daß Schriftſteller fremde Citate abſchreiben, ohne von deren Richtigkeit ſich ſelbſt überzeugt zu haben, haben wir ſchon in unſerer 7. und 11. Note vor Augen gehabt, und ſie ſind überhaupt nicht weniger häufig, als die der erſten Art. Wallis z. B. ſagt in ſeiner Algebra (Op. T. II. p. 2.): Analyseos inventionem Platoni adscribit Theo, saltem si Theonis ea sint, quae sub initium libri 13. Euclidis habentur huc spectantia. Von hier iſt dieſer Ausſpruch in die oben genannte Diſſertation von Krebs (De originibus et antiq. math. 1702) übergegangen, wo es S. 28 ſo heißt: Theo, vetus quidam scholiasta, Platoni, referente Wallisio, analyseos inventionem adscribit. Das hätte nun der

17) S. Cossali Orig. etc. T. I. p. 183.

Verfaſſer nicht abſchreiben ſollen; denn was wäre leichter geweſen, als einen Euklid aufzuſchlagen, und ſich zu überzeugen, daß an der citirten Stelle Plato's mit keiner Sylbe gedacht wird? Durch dieſe Methode des Citirens fremder Citate ſind unglaubliche Verwirrungen in die Geſchichte der Mathematik gekommen, indem Irrthümer und Unrichtigkeiten oft Jahrhunderte lang aus einem Buche in das andere übergegangen ſind, weil Niemand ſich die Mühe genommen hat, auf die letzte Quelle zurückzugehen. Am bequemſten aber iſt es, wenn man gar nichts citirt und ſich ſelbſt für hiſtoriſche Auctorität genug hält. Da hört dann freilich alle kritiſche Prüfung auf. Und doch hat dieſe Schreibart eine große Auctorität für ſich, nämlich alle Griechiſchen Hiſtoriker. Aus dem Geſagten folgen für den Geſchichtſchreiber zwei unerläßliche Regeln. Erſtens, er muß nicht nur mit genauer Angabe der Stelle citiren, ſondern auch ſolche Stellen, auf welche er Hypotheſen bauen und aus denen er wichtige Schlußfolgen ziehen will, zumal wenn ſie aus Büchern entnommen ſind, die ſich nicht in Jedermanns Händen befinden, wörtlich und in der Sprache des Originals abſchreiben. Dieſe Regel werde ich im Verlauf meiner Geſchichte ſogar bei den Citaten aus orientaliſchen Auctoren befolgen, zum Beſten der Mehrzahl der Leſer aber in dem Falle eine treue Überſetzung hinzufügen. Zweitens, man muß nur Bücher citiren, die man ſelbſt geleſen hat, und ungeprüft kein fremdes Citat abſchreiben. Und ſo können meine Leſer ſich darauf verlaſſen, daß ich, weit entfernt durch unnöthig angehäufte Citate mir den äußern Anſchein großer Beleſenheit geben zu wollen, auch dieſe zweite Regel ſtrenge befolgen werde. Iſt mir aber die letzte Quelle nicht zugänglich geweſen, und bin ich genöthigt worden, mich auf ein Zwiſchenglied zu ſtützen, was ich leider nicht immer habe vermeiden können, da ich nach manchem für meinen Zweck wichtigen Werke bis jetzt vergebens geſtrebt habe, ſo werde ich nie unterlaſſen, dieſes ausdrücklich zu bemerken.

Die zweite Bemerkung, die ich zu machen habe, und die ſchon oben gelegentlich berührt worden iſt, betrifft die treue und dem Geiſte jedes einzelnen Schriftſtellers angemeſſene Darſtellung fremder Lehren und Vorträge. Jedes Jahrhundert erweitert den menſchlichen Geſichtskreis und ſteht in wiſſenſchaftlicher Beziehung über dem vorigen. Nichts iſt alſo bei der Lectüre alter Werke gewöhnlicher und natürlicher, als daß wir unſern eigenen Standpunct dem alten Schriftſteller, den wir leſen, ſubſtituiren. Namentlich hat die Mathematik

in neueſter Zeit ſich zu einem erſtaunenswerthen Grade von Allgemeinheit der Anſchauung erhoben, und wenn immerhin der Keim der heutigen Univerſalität in der vorhergehenden Stufe bereits ausgeſäet liegt, weil jene ſich nicht hätte entwickeln können, wenn die Vorſtellung der Alten nicht dieſer Verallgemeinerung und Abſtraction von dem Partiellen fähig geweſen wäre, ſo wäre es doch ſehr unrecht, wenn wir den Alten darum auch ſchon factiſch dieſe Univerſalität der Vorſtellung beilegen wollten. Es iſt zum Beiſpiel, was die ſubjective Vorſtellung anbelangt, ein gewaltiger Unterſchied, ob ein heutiger Mathematiker einen Satz oder eine Formel von vorne herein in ihrer ganzen Allgemeinheit deducirt und ausſpricht, oder ob ein Älterer die Sache durch Induction an einigen Fällen darthut, und dann ſagt, et sic in infinitum. Was dort in ſeinem Geſammteindruck dem Geiſte auf einmal klar vor Augen geſtellt wird, iſt hier erſt als ſich ſtufenweiſe entwickelnd gedacht. Es gehört daher mit zu den ſchwierigſten Geſchäften des Hiſtorikers, die Vorſtellungsweiſe nicht nur jedes Auctors, ſondern auch jeder Zeitperiode in ihrem individuellen Charakter aufzufaſſen und wiederzugeben, und den Standpunct der Gegenwart im Auge zu behalten, ohne den früheren Schriftſteller aus ſeiner eigenthümlichen Sphäre in dieſe heraufzuziehen. Gegen dieſe Grundregel iſt ſehr oft gefehlt worden, und man iſt bald nach einer, bald nach der andern Seite davon abgewichen; man hat entweder das aus dem beſchränkteren Geſichtskreiſe Hervorgegangene in eiteler Selbſtgefälligkeit als völlig unbeachtenswerth verworfen, oder man hat im Gegentheil, und das iſt faſt noch öfter geſchehen, das den Keim der Verallgemeinerung in ſich Tragende ſchon für das wirklich Univerſelle gehalten. Hier die Mittelſtraße zu treffen iſt nicht leicht, und ich weiß nicht, ob es mir immer gelingen wird. Wo es mir nicht gelingen ſollte, da hoffe ich wenigſtens in der Anerkennung meiner redlichen Abſicht einen Erſatz für gerechten Tadel zu finden.

Ich brauche wohl kaum zu bemerken, daß man ſich täuſchen würde, wenn man in dieſem Werke eine vollſtändige Aufzählung algebraiſcher Werke und ihrer Verfaſſer ſuchte. Die älteren Hiſtoriographen haben, wie ſchon aus der gegebenen Überſicht erhellt, drei verſchiedene Dinge in der Regel mit einander verwechſelt, Biographien der Mathematiker, mathematiſche Bibliographie und Geſchichte der Mathematik als Wiſſenſchaft. Eine Geſchichte des Entſtehens und der allmähligen Fortbildung und Entwickelung der Algebra als

Wiſſenſchaft zu liefern, eine treue Darſtellung zu geben von den verſchiedenen Stufen der Vervollkommnung, welche dieſelbe durchlaufen mußte, um von ihren erſten Keimen bis zu ihrem jetzigen Standpuncte zu gelangen, das iſt die Abſicht, in welcher ich dieſes Buch ſchreibe. Darum erwarte man hier nicht Namen, ſondern Sachen, nicht vollſtändige Regiſter von Büchertiteln, ſondern Darlegung des Inhalts der wenigen Bücher, welche weſentlich auf die Förderung der Wiſſenſchaft eingewirkt haben. Der Erſte, der dieſen Unterſchied rein aufgefaßt hat, ohne ihn indeß immer factiſch durchzuführen, iſt Montucla, der ſchon ſehr richtig bemerkt: **L'histoire d'une science n'est pas celle de tous les auteurs, qui en ont écrit, mais seulement de ceux, qui ont contribué par leurs travaux à en reculer les bornes: l'énumeration exacte des premiers est l'ouvrage du bibliographe et non de l'historien. (Hist. des math. T. 1. p. 648).**

Zweites Kapitel.

Ueber die verſchiedenen Namen der Algebra.

Die Griechen unterſcheiden ziemlich genau zwei verſchiedene Theile derjenigen Wiſſenſchaft, welche wir Arithmetik nennen. Bei ihnen iſt Ἀριθμητικὴ keinesweges die Rechenkunſt, ſondern es iſt die Zahlenwiſſenſchaft, deren Gegenſtand die Eintheilung der Zahlen nach ihren beſonderen Eigenſchaften und Eigenthümlichkeiten, z. B. grade und ungrade, Primzahlen und zuſammengeſetzte u. ſ. w. iſt. Arithmetik iſt alſo bei ihnen eine ganz theoretiſche Wiſſenſchaft, und man würde vergebens in den Werken von Nikomachus und den übrigen ſogenannten Arithmetikern irgend eine Anleitung, oder auch nur eine Erwähnung der praktiſchen Rechenkunſt ſuchen. Dieſe letztere führt dagegen bei ihnen den Namen Λογιστικὴ, vielleicht auch Λογισμός [1]). Dieſer Unterſchied wurde ſchon von Plato gemacht [2]), ja er war vielleicht ſchon zu ſeiner Zeit gebräuchlich. Deutlicher noch als Plato ſetzt Proklus [3]) den Unterſchied zwiſchen den theoretiſchen Wiſſenſchaften, der Geometrie und Arithmetik auf der einen, und den praktiſchen, der Geodeſie und Logiſtik auf der andern Seite, aus einander, indem er ſagt: die erſteren betrachten die Figuren und Zahlen an und für ſich, die zweiten aber behandeln Figuren und Zahlen nur inſofern, als ſie geſtaltete und gezählte ſinnliche Gegenſtände ſind. Die Stelle, die Eintheilung der Mathematik im Sinne des Geminus darſtellend, lautet ſo: *κατὰ ἄλλον δ' αὖ τρόπον τὸν μαθηματικὸν* [4]) *τέμνειν τινὲς ἀξιοῦσιν ὥσπερ καὶ Γεμῖνος· καὶ ποιοῦσι τὴν μὲν περὶ τὰ νοητὰ μόνον, τὴν δὲ περὶ τὰ αἴσθητα καὶ τούτων ἐφαπτομένην· νοητὰ δέ που καλοῦντες ὅσα καθ' ἑαυτὴν ἡ*

---

1) Λογισμὸς· ἡ λογιστικὴ τέχνη. **Suidas.**

2) **Gorgias c. 13.**

3) **Ed. Bas. p. 11. 12. Baroc. p. 22. Lib. 1. c. 13.**

4) Soll wohl *τὴν μαθηματικὴν* heißen, wie ich überſetzt habe.

ψυχὴ θεάματα ἀνακίνει χωρίζουσα τῶν ἐνύλων ἑαυτὴν εἰδῶν. Καὶ τῆς μὲν περὶ τὰ νοητὰ πραγματευομένης, δύο τὰ πρώτιστα [5]) καὶ κυριώτατα μέρη τίθενται, ἀριθμητικὴν καὶ γεωμετρίαν· τῆς δὲ περὶ τὰ αἰσθητὰ τὴν ἐνέργειαν ἐχούσης, ἓξ, μηχανικὴν, ἀστρολογίαν, ὀπτικὴν, γεωδεσίαν, κανονικὴν, λογιστικήν [6]). Das heißt alſo: „Manche glauben die Mathematik auf andere Weiſe eintheilen zu müſſen, wie auch Geminus; und ſie beſtimmen den Unterſchied ſo, daß die eine ſich allein mit dem Intelligibeln, die andere ſich mit dem Senſibeln beſchäftigt und dieſem anhängt; indem ſie intelligibel alle diejenigen Anſchauungen nennen, welche die Seele durch ſich ſelbſt erregt, indem ſie von materiellen Formen abſtrahirt. Diejenige, welche mit dem Intelligibeln ſich beſchäftigt, theilen ſie in zwei urſprüngliche und Haupttheile, in die Arithmetik und Geometrie; diejenige aber, welche an dem Senſibeln ihre Thätigkeit entwickelt, in ſechs, in die Mechanik, Aſtronomie, Optik, Geodeſie, Muſik, Logiſtik." Nach einigen Zwiſchenreden über Wiſſenſchaften, die nicht zur Mathematik gehören, giebt der Verfaſſer die Eintheilungen der Geometrie in Planimetrie und Stereometrie, und fährt dann (S. 12) ſo fort: τῆς δὲ ἀριθμητικῆς ὡσαύτως ἡ διαίρεσις, εἴς τε τὴν τῶν γραμμικῶν [7]) ἀριθμῶν θεωρίαν, καὶ τὴν τῶν ἐπιπέδων, καὶ τὴν τῶν στερεῶν· καὶ γὰρ τὰ εἴδη τοῦ ἀριθμοῦ καθ' αὑτὰ σκοπεῖ προϊόντα ἀπὸ μονάδος, καὶ τὰς γενέσεις τῶν ἐπιπέδων τῶν τε ὁμοίων καὶ τῶν ἀνομοίων, καὶ τὰς εἰς τρίτην αὔξησιν προόδους. Γεωδεσία δὲ καὶ λογιστικὴ ταύταις ἀνάλογοι [8]), οὐ περὶ νοητῶν ἀριθμῶν ἢ σχημάτων, ἀλλὰ περὶ αἰσθητῶν ποιούμεναι τοὺς λόγους· οὐ γὰρ κύλινδρον ἢ κῶνον ἔργον τῆς γεωδεσίας μετρεῖν, ἀλλὰ σωροὺς ὡς κώνους καὶ φρέατα ὡς κυλίνδρους, οὐδὲ δι' εὐθειῶν νοητῶν, ἀλλὰ αἰσθητῶν, τότε μὲν, ἀμειβεστέρων οἷον διὰ σπάρτων καὶ διὰ στάθμης * * * [9]). Οὐδ' αὖ

---

5) Ed. Bas. πρώτηστα! monstrum vocabuli.

6) Ed. Bas. λογικήν, offenbar fehlerhaft, wie aus dem Folgenden klar hervorgeht.

7) Ed. γραμματικῶν. Aber γραμμικοὶ heißen die Zahlen von einer Dimenſion d. h. die Primzahlen bei Theon von Smyrna (Arithm. c. 6.) und εὐθυγραμμικοὶ bei Jamblichus (Ed. Tennulii p. 36).

8) Ed. ἀνάλογον.

9) Hier iſt im gedruckten Text offenbar eine Lücke. Barocius füllt ſie ſo aus: neque intellectibilibus id assequitur rectis lineis, sed sensibilibus, inter-

ὁ λογιστικὸς αὐτὰ καθ' αὐτὰ θεωρεῖ τὰ πάθη τῶν ἀριθμῶν, ἀλλ' ἐπὶ τῶν αἰσθητῶν, ὅθεν καὶ τὴν ἐπωνυμίαν τοῖς [10]) ἀπὸ τῶν μετρουμένων τίθεται μηλίας *) καλῶν τινὰς καὶ φιαλίτας etc. D. h. „Auf gleiche Weiſe wird die **Arithmetik** eingetheilt in die Theorie der linearen, in die der ebenen und in die der körperlichen Zahlen; ſie betrachtet nämlich die Geſtaltungen der Zahl an und für ſich als aus der Einheit hervorgehend, ferner die Entſtehungsart der ebenen, ſowohl ähnlichen als unähnlichen, Zahlen, ebenſo die Fortſchritte zur dritten Dimenſion. Die dieſen analogen Wiſſenſchaften dagegen, die **Geodeſie** und die **Logiſtik**, beſchäftigen ſich nicht mit intelligibeln Zahlen oder Figuren, ſondern mit ſenſibeln. Denn es iſt nicht das Geſchäft der Geodeſie einen Cylinder oder Kegel zu meſſen, ſondern kegelförmige Haufen und cylinderförmige Brunnen.. (ſ. Note 9.) ... Auf der andern Seite betrachtet der **Logiſtiker** die Eigenſchaften der Zahlen nicht an und für ſich, ſondern mit Bezug auf ſinnliche Gegenſtände; daher giebt er ihnen auch die Benennung von dem Gemeſſenen, indem er ſie μηλίτας und φιαλίτας nennt." Mit einem Worte, Arithmetik iſt eine theoretiſche, Logiſtik eine praktiſche Wiſſenſchaft. Dieſen Unterſchied haben auch die Araber und die von ihnen wiſſenſchaftlich abhängigen ſpäteren Perſer richtig aufgefaßt. So finde ich in der Perſiſchen Paraphraſe des **Khilàsat-al-Hisàb** (Eſſenz der Rechenkunſt) von **Mohammed Beha-eddin** [11]) aus dem ſechszehnten Jahrhundert (die Paraphraſe iſt aber wohl jünger) folgende Diſtinction: „Die Zahlenkunde iſt doppelter Art; die eine iſt ſpeculativ, und das iſt die Wiſſenſchaft, in welcher man über die an der Zahl weſentlich haftenden Eigen-

---

dum quidem certioribus (?) quodam pacto, ut radiis solaribus; interdum vero crassioribus, ut spartis et perpendiculo.

10) Wahrſcheinlich iſt αὐτοῖς oder τούτοις zu leſen.

*) **Leg.** μηλίτας **sc.** ἀριθμοὺς, Schaafzahlen. Dieſes bezieht ſich auf eine Aufgabe von Schaafen und Schalen (φιάλη).

11) **The Khoolasut-ool-Hisab, a compendium of arithmetic and geometry in the arabic language by Buhae-ood-Deen of Amool in Syria, with a translation into Persian and commentary by the late Muolawee Raoshun Ulee of Juonpoor; to which is added a treatise on Algebra by Nujm-ood-deen Ulee Khan, head Qazee, to the Sudr Deewunee and Nizamut Udalut etc. Calcutta. 1812. 8.** Das Buch iſt nicht für Europa beſtimmt; ſonſt wären Ausgaben Arabiſcher und Perſiſcher Mathematiker ohne Überſetzung in einer Europäiſchen Sprache nicht zu billigen.

ſchaften nachforſcht; dieſe Wiſſenſchaft heißt in der Griechiſchen Sprache Arithmetik; die zweite iſt praktiſch, und das iſt die Wiſſenſchaft, aus welcher man lernt, wie man unbekannte Zahlen aus bekannten Zahlen ableitet. Der Auctor giebt eine Unterweiſung in der zweiten Art [12]." Indeß haben die Araber für die Arithmetik, im Griechiſchen Sinne des Worts, keinen eigenen Ausdruck, ſondern ſie behalten den Griechiſchen Namen ἀριθμητικὴ, ارثماطيقي bei; eben ſo die Perſer, wie aus der eben beigebrachten Stelle hervorgeht. Um eine echt Arabiſche Auctorität anzuführen, nenne ich nur den Titel, welchen Thabet=ben=Korah ſeiner Bearbeitung der Arithmetik des Nikomachus giebt: جوامع عملها لكتاب نيقو مخس في الارثماطيقي مقالتان „Auszug aus dem Werke des Nikomachus über Arithmetik, zwei Bücher [13]." Griechiſche Arithmetiker ſind in nicht geringer Anzahl auf uns gekommen; ich nenne nur die Werke des eben erwähnten Nikomachus, dann des Theon von Smyrna, Jamblichus, Plotinus, Pſellus, und die lateiniſch geſchriebene, aber ganz im Griechiſchen Sinne nach Nikomachus gearbeitete Arithmetik von Boëthius, vieler ſpäterer nicht zu gedenken; ja ſelbſt das ſiebente bis zehnte Buch der Elemente Euklid's bilden ein Lehrbuch der Arithmetik. Dagegen haben wir keine einzige alte Logiſtik von den Griechen über=

---

12) p. 5. علم حساب دو گونه است يكى نظري وآن علميست كه در آن بحث كرده شود از اعراض ذاتيه مر عدد را واين علم را ارثماطيقي نامند بزبان يونان دوم عملي وآن علميست كه از آن در يافت شود كه چگونه مجهولات عدديه را از معلومات عدديه استخراج كنند ومصنف تعريف قسم دوم كرد ☆

Und noch auf derſelben Seite zu den Worten des Textes وموضوعه العدد „und ihr (der Rechenkunſt) Gegenſtand iſt die Zahl" ſagt er: „Der Gegenſtand der Rechenkunſt, derjenigen nämlich, deren Regeln Gegenſtand der Unterſuchung in der zweiten Art der Zahlenkunde ſind, iſt die Zahl, in dem Sinne, wie man aus einer bekannten Zahl eine unbekannte finden kann, nicht die Zahl an und für ſich (نه عدد مطلقا), nämlich in dem Sinne, welcher, wie erwähnt, Gegenſtand der Arithmetik iſt.".

13) Casiri bibl. arab. hisp. Escur. T. 1. p. 390., wo الارثماطيقي ein Druckfehler zu ſein ſcheint, woran dieſes ſchöne Werk zumal in ſeinen ſchätzenswerthen Auszügen aus Arabiſchen Manuſcripten leider nur zu reich iſt.

kommen; das älteſte Buch, welches ganz dieſem Gegenſtande gewidmet iſt, iſt die Logiſtik des Mönchs Barlaam aus dem vierzehnten Jahrhundert. Die Commentare von Theon Alexandrinus und von Eutokius enthalten nur Einzelnes, was hieher gehört.

Für die Algebra, wie ſie in dem Werke von Diophantus erſcheint, haben die Griechen keinen eigenen Namen erfunden. Es fragt ſich alſo, welcher der beiden genannten Namen dem Gegenſtande dieſes Werks angemeſſener iſt. Diophant lehrt praktiſch die Auflöſung der Gleichungen, inſofern wäre Logiſtik der Inhalt ſeines Buchs. Aber auf einer Seite betrachtet er in ſeinen Aufgaben immer nur Zahlen an und für ſich, ohne Hindeutung auf praktiſche Anwendung (was bei Theon von Alexandrien geſchieht, deſſen Zahlen Theile des Halbmeſſers, Kreisſehnen u. ſ. w. ſind); auf der andern Seite lehrt er namentlich die Auflöſung der unbeſtimmten Gleichungen, welche ſowohl auf einer gründlichen Kenntniß der Zahlentheorie ſich baſirt, als auch in ihren Reſultaten auf Zahlentheorie und Zahleneigenſchaften zurückführt; inſofern iſt ſein Werk reine Arithmetik, wie er es bekanntlich ſelbſt genannt hat, Ἀριθμητικά (neutr. pl.).

Bei den Indern heißt die Algebra im engern Sinne vija-gaṇita, vija-kriyâ, [14]) „Urſprungsrechnung, Urſprungsoperation, Cauſalrechnung,“ inſofern als die algebraiſche Operation, entgegengeſetzt der gewöhnlichen Zahlenrechnung, zugleich die Gründe des Verfahrens an den Tag legt; auch kommt vija allein in derſelben Bedeutung vor; ferner heißt die Wiſſenſchaft avyakta-gaṇita, avyakta-kriyâ, „Rechnung oder Operation mit der Unbekannten“ (avyakta), im Gegenſatze der gemeinen Arithmetik, welche unter andern auch vyakta-gaṇita, „Rechnung mit bekannten Größen“ heißt. Alle dieſe Namen ſind, wie die meiſten Kunſtausdrücke der Art bei den Indern, zugleich Definitionen, und bedürfen keiner weitern Erklärung. Über die beſonderen Namen kuṭṭaka und varga-prakṛiti für die Theorie der unbeſtimmten Glei-

14) Ich drücke hier, wie im Folgenden immer, durch j einen Buchſtaben ſowohl des Indiſchen als des Arabiſchen Alphabets aus, den wir im Deutſchen nicht haben; er lautet etwa wie unſer dsch, oder wie das j bei den Engländern, denen dieſe Schreibart entlehnt iſt. Ich ziehe es vor j, und nicht dsch zu ſchreiben, weil es indecent erſcheint und auch zu Mißverſtändniſſen Veranlaſſung geben kann, wenn man ein fremdes Zeichen durch vier deutſche wiedergiebt. Daher iſt zu ſprechen **Vidscha, Dschebr, Dschâber, Hedschra** u. ſ. w.

chungen, jener für die des erſten, dieſer für die des zweiten Grades, werden wir gehörigen Orts ſprechen.

Mehr hiſtoriſche Bedeutung hat, wegen ihres Einfluſſes auf Europa, die Benennung unſerer Wiſſenſchaft bei den Arabern, wo ſie vollſtändig Aljabr (oder Aljebr) wa'lmukâbalah (الجبر والمقابلة) heißt, nie aber, wie es bei uns jetzt gebräuchlich iſt, Aljebr allein. Vielfach ſind beide Namen, beſonders aber der erſtere, gedeutet worden. Rafael Canacci, ein Florentiner, welcher im vierzehnten oder funfzehnten Jahrhundert eine Algebra unter dem Titel Ragionamento di algebra ſchrieb, leitet den Namen der Wiſſenſchaft von einem Arabiſchen Mathematiker Jeber (oder Jâber, جابر) ab [15]), und manche Spätern, z. B. noch Michael Stifel und Jacob Peletarius [16]) im ſechszehnten Jahrhundert, ſind ihm in dieſer Annahme gefolgt, obgleich dieſelbe durchaus nichts weiter für ſich hat, als den zufälligen Anklang des Namens. Denn erſtens hat, ſoviel bis jetzt bekannt iſt, der in Rede ſtehende Mathematiker oder vielmehr Aſtronom, deſſen vollſtändiger Name Abu-Mohammed Jâber ben Aflah Al-Ischbîlî (d. h. aus Sevilla) iſt, keine Algebra geſchrieben; zweitens aber lebte er erſt im fünften Jahrhundert der Hejra, oder im elften unſerer Zeitrechnung, alſo, um Mehrer nicht zu gedenken, wenigſtens zweihundert Jahre nach Mohammed ben Muſa Alkharezmi, welcher ſein Werk ſchon Aljebr w'almukâbalah betitelt [17]). Aber ſolche Anachronismen klingen noch ſehr raiſonnabel, wenn man ſie

15) Cossali Orig. T. 1. p. 35.

16) Stifel Arithm. integra. Norimb. 1544. 4. p. 30. „Cossa seu ars Gebri." Ebenſo p. 230. „De partium regulae Gebri ostensione." Es kann übrigens fraglich ſcheinen, ob Stifel unter dem Namen Gebri den Mathematiker Jâber gemeint habe, denn er braucht z. B. Lib. III. cap. II. die Namen regula Gebri und regula Algebrae ohne Unterſchied abwechſelnd. — Arithm. practicae methodus facilis per Gemmam Frisium. Huc acc. Jac. Peletarii annotationes etc. Colon. 1571. 8. p. 72. *Nota Peletarii.* Algebra autem dicta videtur a Gebro Arabe ut vox ipsa sonat; hujus artis si non inventore, saltem excultore.

17) Cardan ſcheint die Sache umzukehren und zu glauben, daß Mohammed ben Muſa und der erwähnte Jaber oder Jeber eine Perſon geweſen ſeien, und daß der Erſtere dieſen Beinamen als Algebriſt erhalten habe. Er ſagt nämlich De subtil. l. XVI. sub fin. (p. 445): Huic Mahometus Moisis filius Arabs, Algebraticae, ut ita dicam, artis inventor, succedit. Ob id inventum ab artis nomine cognomen adeptus est. Ich weiß nicht, ob dieſer an ſich dunkle Zuſatz anders zu verſtehen iſt.

mit folgender Stelle aus der Vorrede des Rechenbuchs von Andreas Helmreich (1595) vergleicht, die in der That ganz neue Aufſchlüſſe über die Geſchichte der Algebra giebt: „Algebras zu Blem, der große Geometer in Egypten, zur Zeit des Alexandri Magni, der da war ein Praeceptor oder Vorfahrer Euclidis, des Fürſten zu Megarien, als der köſtlichſt und berümſte in der Zahl Pithagorä here, hat auch gründlich Ding von den Zahlen mit Fleiß geſetzt, und das Buch in arabiſcher Sprach genannt Gebra und Almuchabula, welches ein Buch iſt von dem Dinge, das ſie geſagt, die Zahl und Frage ſei ein Ding, dadurch unerkannte Zahlen und Fragen werden geſchrieben, ſo hernach von Arithmedo aus arabiſcher Sprach in griechiſch iſt transferirt, und weiter von Apuleio aus griechiſch ins latein gebracht worden ... Denn diß Buch auch bey den Juden oder Indianern in großer Uebunge, mehr denn bey andern Völkern geweſen, und Alboreth von ihnen genannt iſt[18]).“ Das Buch muß Saverien nicht gekannt haben, ſonſt wäre dieſe Stelle eine herrliche Eroberung für ſeine histoire de l'esprit humain geweſen. Bevor ich die richtige Erklärung der fraglichen Namen gebe, erwähne ich noch einige falſche Deutungen, welche alle darin ihren Grund haben, daß meiſtens den Orientaliſten Sachkenntniß und den Mathematikern Sprachkenntniß abgeht. Unklar iſt Golius[19]) und ſcheint ſelbſt nicht recht zu wiſſen, was er ſagen will: Hinc et vulgatum illud nomen Algebra Analysin mathematicam notat, utpote cujus praecipuum munus sit comparationis terminos reducere ad optatam aequationis formam, et speciatim eorundem partes ad integros redigere. In dem letzten Sinne, von der Wegſchaffung der Brüche, verſteht es auch Caſiri[20]), indem er den Ausdruck Aljebr durch restitutio numerorum fractorum in integrum erklärt. Zwar könnte, wie wir ſogleich ſehen werden, dem Lexicon zufolge das Verbum jábara (جبر) dieſe Bedeutung haben; die Erklärung iſt aber factiſch unwahr; denn die

18) Ich habe die Stelle aus Käſtner's Geſch. der Math. Th. I. S. 147. 148. abgeſchrieben. Käſtner fügt hinzu: „Helmreich war auch Notarius Publicus. Ich hoffe bei dieſem Amte wird er beſſer protocollirt haben.“

19) Muhammedis Fil. Ketiri Ferganensis, qui vulgo Alfraganus dicitur, elementa Astronomica, Arabice et Latine, cum notis etc. opera Jacobi Golii. Amstel. 1669. S. Notae p. 11.

20) Bibl. Arab. hisp. Escur. T. I. p. 370.

Arabiſchen Mathematiker brauchen für dieſe Operation nie das Verbum jábara, ſondern entweder kámmala (Conj. II. von كمل), oder ákmala (Conj. IV. ej.) oder támmama (Conj. II. von تمّ)[21]. Hören wir nach dieſen beiden gelehrten Orientaliſten nun noch die Anſicht eines eben ſo berühmten Mathematikers. Wallis[22]) folgert ſo: **Arabibus dicitur Algja'br W'almukábala .... Et quidem Lucas de Burgo Restitutionis et Oppositionis regulam interpretatur. Aut etiam si gjabara interpretemur componere, et kábala apponere seu contrariari, non male exponas algjabr w'almukabala per compositionem ejusque contrarium, hoc est Synthesis et Analysis.** Dieſe Deduktion iſt geiſtreich, aber willkührlich, und entſpricht weder den Worten, noch der Sache.

Über dieſe falſchen Erklärungen des in Rede ſtehenden Namens unſerer Wiſſenſchaft muß man ſich um ſo mehr wundern, als ſchon die älteſten Europäiſchen Algebriſten die richtigen Deutungen gegeben haben[23]). Wir wollen der genaueren Erklärung wegen ein wenig in die Sache eingehen. Die Araber hatten eben ſo wenig, wie ihre nächſten Schüler, die alten Italiener, den allgemeinen Begriff aufgefaßt, den wir mit dem Worte Gleichung verbinden. Die Einen, wie die Andern kannten nur, wie wir künftig ſehen werden, Gleichheiten zweier abſolut poſitiven Größen, und eine Formel, wie $x^2 + 5x + 6 = o$ war in ihren Augen ein wahres Monſtrum, ein algebraiſcher Unſinn[24]). Da nun die allgemeine Form

21) Vergl. Rosen in The Algebra of Moh. b. Musa. London. 1831. 8. p. 186.

22) Opera T. II. p. 2.

23) Z. B. Leonard von Piſa und Lucas de Burgo. S. Cossali T. I. p. 25.

24) Darum vernachläſſigt z. B. Cardan, der alle möglichen Combinationen der kubiſchen Gleichungen durcharbeitet, die drei Fälle $x^3 + px + q = o$, $x^3 + nx^2 + q = o$ und $x^3 + nx^2 + px + q = o$, und ebenſo die entſprechende quadratiſche Gleichung $x^2 + px + q = o$. Daſſelbe thut noch Vieta, ja ſelbſt Harriot, bei dem man ſich über die Vernachläſſigung dieſer Formen um ſo mehr verwundert, da er der Urheber der Sitte iſt, die Gleichungen auf o zu reduciren, indem er alle Glieder ohne Rückſicht der Zeichen auf eine Seite ſtellt. Vieta ordnet die Gleichungen ſo, daß das abſolute Glied (bei ihm homogeneum comparationis) poſitiv auf einer Seite allein ſteht. Jene Gleichungen mit lauter poſitiven Gliedern auf einer Seite ſcheint zuerſt Descartes betrachtet zu haben.

der quadratiſchen Gleichung $x^2 \pm px \pm q$ vier Fälle in ſich begreift, von denen ſie aber einen verwerfen, ſo bleiben ihnen nur drei Fälle übrig, $x^2 + px - q = o$, $x^2 - px + q = o$, $x^2 - px - q = o$, welche ſie nach der obigen Bemerkung aber ſo ordnen, daß alle Glieder poſitiv erſcheinen; demnach haben ſie drei zuſammengeſetzte quadratiſche Gleichungen: 1) $x^2 + px = q$ 2) $x^2 + q = px$ 3) $x^2 = px + q$. Für dieſe drei Formeln geben ſowohl die Arabiſchen, als auch die alten Italieniſchen Algebriſten beſondere Regeln. Sind ſie nun durch den Anſatz auf irgend eine Gleichung geführt worden, ſo iſt es ihr erſtes Geſchäft, die negativen Glieder durch Transpoſition aus derſelben zu entfernen, und dieſe Operation eben iſt es, welche ſie mit dem Namen jebr oder aljebr bezeichnen. Herſtellung, restitutio, restauratio (von jábara, restituit, auch von chirurgiſchen Operationen gebraucht, zumal von der Heilung der Knochenbrüche, woher auch in der Spaniſchen Sprache, welche ſo viele Wörter aus dem Arabiſchen aufgenommen hat, noch jetzt ein Wundarzt algebrista heißt) nennen die Araber dieſe Operation darum, weil die Gleichung erſt nach der Austilgung der negativen Glieder die für die fernere Behandlung brauchbare Form erhält. Dem **Jebr** folgt nun die zweite Operation **mokâbalah**, Vergleichung (von dem Verbum kábala, قبل, in der dritten Conjugation oppositus fuit; auch tranſitiv opposuit, comparavit), welche darin beſteht, daß die gleichnamigen Glieder auf beiden Seiten der Gleichung mit einander verglichen, und, ſoweit es ſich thun läßt, gegen einander aufgehoben werden. Nach Anwendung beider Operationen iſt die Gleichung des erſten Grades aufgelöſt in der Form $x = a$, die Gleichungen des zweiten Grades aber erſt auf eine der drei kanoniſchen Formen $x^2 + px = q$, oder $x^2 + q = px$, oder $px + q = x^2$ reducirt, und es kommt alſo bei den letzteren noch eine dritte Operation, die Auflöſung hinzu. Dieſes iſt die übrigens nicht neue Erklärung der ſo oft gemißdeuteten Namen. Der älteſte Arabiſche Algebriſt, Mohammed ben Muſa Alkharezmi, gebraucht die beiden Namen, ohne ſie zu erklären; alſo waren ſie wohl ſchon vor ſeiner Zeit, das heißt, vor dem Anfange des neunten Jahrhunderts, im Gebrauch. Beha-eddin in ſeinem ſchon erwähnten **Khilâsat-al-Hisâb** giebt die Erklärung in folgenden einfachen Worten: والطرف ذو الاستثناء يكمل ويزاد مثل ذلك علي الآخر وهو الجبر والاجناس المتجانسة المتساوية في الطرفين يسقط

يسقط منهما وهو المقابلة d. h. „Die Seite, welche mit einer Negation behaftet iſt, wird ergänzt, und etwas dieſer Gleiches auf der andern Seite addirt; das iſt **Al-jebr.** Die homogenen und gleichen Glieder auf beiden Seiten werden ausgeworfen, und das iſt **Al-mokâbalah**[25]).“ Mehr Stellen der Art ſtellt Roſen in ſeinen Erläuterungen zu Mohammed's ben Muſa Algebra zuſammen[26]), welche alle in andern Worten daſſelbe ſagen. Ich füge hier nur

---

25) **Khil.-al-His.** p. 334. 335. Der Perſiſche Paraphraſt dehnt die Bedeutung des Wortes **Aljebr** allerdings weiter aus, indem er ſagt: اگر در طرفي يا در هر دو طرف از متعادلين استثنا بود پس طرف ذو الاستثنا را كامل كنند يعني استثنا ازوي دور كنند تا مستثني منه تمام وكامل شود وهمان مقدار استثنا را بر طرف ديگر از متعادلين بيفزايند ونيز اگر در طرفي كسر باشد كسر را حذف كنند وبجايش واحد كامل بگيرند وموافق آن بطرف ديگر افزايند وهمين استثنا را يا كسر را حذف كردن ومستثني منه را كامل ويا كسر را واحد كامل گرفتن وموافق آن بر طرف ديگر زيادت كردن جبر باشد چنانچه در لغت معني جبر شكسته را بستن است. d. h. „Wenn auf einer oder auf beiden Seiten der Gleichung eine Negation ſich befindet, ſo ergänzt man die mit der Negation behaftete Seite, das heißt, man entfernt die Negation aus ihr, damit das ſubtrarſiv an ihr haftende vollſtändig und ganz werde; zugleich addirt man den Werth der Negation auf der andern Seite der Gleichung. Aber auch, wenn auf einer Seite ein Bruch iſt, ſo entfernt man den Bruch, indem man an ſeinem Platze die Einheit ergänzt, und das Entſprechende auf der andern Seite addirt. Alſo eine Negation oder einen Bruch entfernen, und das Subtrartive zu etwas Additivem, und den Bruch zur ganzen Einheit ergänzen, und das Entſprechende auf der anderen Seite addiren, iſt Jebr, wie auch in der Sprache der Sinn von **jabara** iſt, etwas Zerbrochenes zuſammenfügen.“ Was ſich der Paraphraſt hier bei der Wegſchaffung der Brüche gedacht hat, iſt nicht ganz klar; von einer Wegſchaffung des Nenners durch Multiplication iſt nicht die Rede, ſondern er meint, wenn auf einer Seite der Gleichung z. B. $\frac{1}{3}x$ ſteht, ſo muß man auf beiden Seiten $\frac{2}{3}x$ addiren, damit wir auf der erſten Seite ein ganzes x erhalten. Dadurch iſt aber wenig gewonnen, weil nun der Bruch $\frac{2}{3}x$ auf der andern Seite ſteht. Der Fehler ſcheint darin ſeinen Grund zu haben, daß der Paraphraſt den Ausdruck استثناء (welcher ganz allgemein eine Ausnahme von der gewöhnlichen Ordnung, im mathematiſchen Sinne aber die Negation, Subtractivität bedeutet) in einer zu weiten Bedeutung genommen hat.

26) S. 180—185.

noch folgende zierlichen Verſe aus der Algebra des Perſers **Nejm-eddîn Khân** hinzu, welche in gereimten Diſtichen geſchrieben und zugleich mit dem **Khilâsat-al-Hisâb** in Calcutta (1812) gedruckt iſt. Sie befinden ſich in dieſer Ausgabe S. 447 (Vers 11—15), und bei Roſen a. a. O. S. 185.

طرفي كه در وست حرف الا
تكميل نما ومثل آن را
بر طرف دگر فزون كن اي حبر
در مصطلح است نام اين جبر
هنگام معادله تو بشناس
افتد اگر اين كه بعض اجناس
با وصف تجانس از سويت
در هر طرف اند بي مزيت
بايد كه زهر دو سو براني
نامش تو مقابله بخواني

d. h. Die Seite, die ein Minusglied enthält,
Ergänz' und ſetze ein demſelben gleiches
Bejahend auf die andre, o Gelehrter;
Im Kunſtausdrucke nennt man dieſes Jeber.
Zur Zeit, wenn Du die Gleichung bildeſt, wiſſe:
Wenn ſich's ereignet, daß gewiſſe Glieder,
Einander homogen und völlig gleich,
Auf beiden Seiten unverhüllt ſich zeigen,
So wirf aus beiden Seiten ſie heraus,
Und dieſes nenne dann Mokabalah.

Ich will hier nur noch darauf aufmerkſam machen, daß, wie aus den angeführten Beiſpielen erhellt, bei den Arabern **Aljebr wa'lmukâbalah** nicht eigentlich der Name der von uns **Algebra** genannten Wiſſenſchaft iſt, ſondern daß dieſe beiden Ausdrücke nur die Namen von zwei in dieſer Wiſſenſchaft vorkommenden Operationen ſind. Daher bemerkt **Hâjî-Khalfa** in ſeinem noch ungedruckten biographiſchen Werke [27]) ſehr richtig: وسمي العلم بهذين

27) Moh. ben Musa ed. Rosen, p. 181. 182.

العمليين (28[28] علم الجبر والمقابلة لكثرة وقوعها فيه „Die Wiſſenſchaft wird von dieſen beiden Operationen die Wiſſenſchaft des Jebr und Mukabalah genannt, wegen des häufigen Gebrauchs, den ſie von ihnen macht.“ Übrigens braucht nicht erwähnt zu werden, daß nicht nothwendig bei jeder Aufgabe beide Operationen angewandt werden müſſen.

Die Inder, welche bei ihrer vollſtändigen algebraiſchen Bezeichnung und ihrem weiteren Geſichtskreiſe nicht nöthig haben, die Gleichung auf die ſpecielle Form zweier poſitiven Gleichheiten zurückzuführen, haben für die Operation, welche die Araber **Aljebr** nennen, deshalb auch keinen eigenen Namen; eben ſo wenig hat Roſen[29]) in Feizi's Perſiſcher Bearbeitung der Lilavati von Bhaskaras, welche ſich den Indern anſchließt, den Namen **Jebr** angetroffen. Die viel weſentlichere Operation der **Mukabalah** dagegen kennen die Inder unter dem Namen sama-çódhanam oder tulya-çuddhis[30]), **Subtraction des Gleichen**, und Roſen a. a. O. verſichert, den Namen Mukabalah bei Feizi mehrmals in demſelben Sinne gefunden zu haben, in welchem die Araber ihn gebrauchen.

Von den Arabern ging ſeit dem Anfange des dreizehnten Jahrhunderts zugleich mit der Wiſſenſchaft der Name nach Europa über; jedoch fing der zweite Theil des Namens, almukábalah, ſehr bald an, ſich zu verlieren, und erſcheint ſeit dem Ende des ſechszehnten Jahrhunderts gar nicht mehr. Bis dahin aber kommen die Namen ***Algebra*** und ***Algebra et Almucabala*** ziemlich promiscue vor. **Leonardo Bonacci** (1202) in dem Index des 15. Capitels ſeines **Liber Abaci** ſagt: **Tertia pars erit super modum algebrae et almucabalae**; und dieſer dritte Theil ſelbſt beginnt dann ſo: **incipit pars tertia de solutione quarundam quaestionum secundum modum algebrae et almucabalae, scilicet oppositionis et restaurationis**[31]). **Canacci** (**Saec. XIV.**) braucht den erſten

28) Ich leſe in meinem Excerpten aus Roſen's Anm. zum Moh. ben Muſa العلمين „**Wiſſenſchaften**“; das iſt entweder ein von mir begangener Schreibfehler, oder ſchon Druckfehler bei Roſen. Es muß durchaus العمليين „**Operationen**“ heißen.

29) Roſen a. a. O. p. 186.

30) **Colebrooke Algebra of the Hindus, Diss. p. XIII. Vijag. §. 171. note.**

31) **Cossali T. I. p. 25.** Ein anderes Manuſcript von Leonardo hat

Namen allein; der Titel ſeines Werks iſt **Ragionamento** di algebra; im Verlauf braucht er bald den Ausdruck algebra, bald regola di algibra, auch falſch geſchrieben la regola di argibra[32]. Ebenſo Regiomontanus, im funfzehnten Jahrhundert; er ſagt in ſeiner Schrift gegen den Cardinal Nicolaus von Cuſa: paucis enim admodum artem Algebrae sive rei et census satis cognitam scio[33]. Luca Pacioli, 1494, braucht wieder meiſtens beide Namen, arte di algebra ed almucabala, aber er bildet ſchon von dem erſteren allein das Adjectiv algebratico[34]. Zur Erklärung der beiden Namen ſagt er, die Wiſſenſchaft werde genannt algebra et almucabala in lingua araba, ovver caldea secondo alcuni, che in la nostra sona quanto che a dire restaurationis et oppositionis. Algebra idest restauratio. Almucabala, idest oppositio, vel contemptio et solidatio[35]. Von nun an wird der zweite Theil des Namens ſeltener. Bei Rogg finde ich Rudolff, Cp. Algebra. 1526[36]. Michael Stifel behandelt die Algebra in dem

---

proportionis für oppositionis; noch ein anderes hat die Worte: scilicet ad proportionem et restaurationem. S. Coss. T. I. p. 27. Es iſt zu bemerken, daß Bonacci die Überſetzung der beiden Arabiſchen Worte in verkehrter Ordnung giebt.

32) Cossali T. I. p. 32. Außerdem ebend. p. 7. „Non debbo anzi dissimulare ciò che di lui (Guglielmo di Lunis) dice il Canacci sul principio del suo ragionamento, ponendo: *La regola dell' argibra, la quale regola Ghughelmo di Lunis la traslato darabico a nostra lingua.*"

33) Jo. de Regio Monte. De triangulis omnimodis, libri quinque. Norimb. 1533. fol. Dabei mit beſonderer Seitenzahl: de quadratura circuli dialogus, gegen Nic. von Cuſa. S. daſelbſt p. 49. und des Herausgebers, Joh. Schoner's, Fortſetzung p. 87.

34) Cossali T. I. p. 32. Ebenſo bilden die Araber, obgleich ſie immer beide Namen gemeinſchaftlich brauchen, doch das Adjectiv von dem erſten allein, جبرية, جبري. H. W. Khil. al-Hisâb p. 333.

35) Über das unpaſſende contemptio ſagt Cossali T. I. p. 26.: L'abbreviatura *cōtēptio*, che trovasi nel testo di Fra Luca, non appare in qual parola rilevar si possa, ed io la reputo un errore di stampa in luogo di *comp̄tio*, abbreviatura di *comparatio*.

36) Handbuch d. math. Liter. S. 524. Ich zweifle an der Richtigkeit dieſer Angabe. Ich habe nur die Stifel'ſche Bearbeitung des Werks von Rudolff geſehen, welche 1553 erſchienen iſt unter dem Titel: „Die Coſſ Chriſtoffs Rudolffs, wo es gleich am Anfange der Vorrede heißt: Es hat Chriſtoff Rudolff vom Jawer, löblicher gedechtnis, anno 1524 (alſo nicht 1526),

dritten Buche ſeiner 1544 erſchienenen Arithmetica integra, und nennt ſie abwechſelnd Algebra, regula Algebrae und regula Gebri, nie aber Almucabala. Scheubel gab 1551 ſeine Algebrae compendiosa facilisque descriptio. Cardan braucht immer nur den Namen Algebra. Eben ſo Gemma Friſius in ſeiner, 1540 zuerſt herausgekommenen practiſchen Arithmetik[37]. Von Nuñez erſchien 1567 (vielleicht auch ſchon früher) Libro de Algebra en arithmetica y geometria. Dagegen führt Goſſelin's 1577 herausgekommene Algebra wieder den Titel: **De arte magna seu de occulta parte numerorum, quae et Algebra et Almucabala vulgo dicitur.** Eine ſpätere Auctorität für Almukabalah weiß ich jetzt nicht anzuführen. Jedenfalls aber beweiſen dieſe Angaben, daß es nicht ganz genau iſt, wenn Roſen ſagt, der Name Almukabalah erſcheine ſeit dem Anfange des ſechszehnten Jahrhunderts nicht mehr auf den Büchertiteln[38]. Goſſelin beweiſt auf einer Seite, daß der Name noch ſpäter erſcheint, auf der andern Seite aber hatte man auch ſchon ſehr viel früher angefangen, ihn wegzulaſſen, ſo daß der Anfang des ſechszehnten Jahrhunderts hier gar keinen Haltpunct gewährt.

Neben dieſem aus Aſien herübergepflanzten Namen entwickelten ſich aber ſchon frühzeitig andere mehr einheimiſche, die indeß alle über lang oder kurz von dem jetzt gebräuchlichen verdrängt worden ſind. Schon bei den älteſten Italienern ſtanden dem eben beſprochenen Namen andere zur Seite, deren Urſprung aber, zum Theil wenigſtens und mittelbar, ebenfalls in Arabien zu ſuchen iſt. Wir finden hier für unſere Wiſſenſchaft die Benennungen der **Ars magna**, der **Practica speculativa** und der **Ars rei** oder **Ars rei et census**, zu deren Erklärung Folgendes dienen möge.

Die Algebra erſchien Anfangs nur als ein höherer Theil der Arithmetik; ſo bei Bonacci, Pacioli, Stifel, Cardan und vielen An-

---

die wunderbarliche und gantz Philoſophiſche Kunſt deſſ rechnens, genennet Die Coſſ (alſo nicht Algebra), in deutſche ſprach durch den Truck gebracht u. ſ. w.

37) Arithmeticae practicae methodus facilis, per Gemmam Frisium. Antw. 1540. 8. Ich habe die Ausg. Coloniae 1571. 8. in Händen gehabt, wo man vergl. p. 71. 81. 110. u. ſ. w.

38) a. a. O. S. 186. Since the commencement of the sixteenth century, the word mokābalah does no longer appear in the title of Algebraic works.

Digitized by Google

deren, und erhielt ſo als Gegenſatz der niedern oder gemeinen und practiſchen, zumal auf kaufmänniſche Verhältniſſe angewandten Arithmetik den Namen der Ars magna, oder Italieniſch Arte maggiore, indeß jene die Ars minor hieß. Wie es ſcheint braucht dieſen Namen ſchon Leonard Bonacci; ſicher aber iſt er vor Luca Pacioli im Gebrauch geweſen; denn dieſer zählt ihn unter den gebräuchlichen Namen der Algebra mit auf[39]. Dieſe Benennung ſcheint indeß nur ſehr vereinzelt die Grenzen Italiens überſchritten, und mit Cardan's Ars magna, die zuerſt 1545 erſchien, daheim ihre Exiſtenz beendigt zu haben. Außer Italien iſt mir der Name bis jetzt erſt einmal vorgekommen, und zwar auf dem Titel der ſchon angeführten Algebra von Goſſelin, De arte magna etc. Paris. 1577. Ob der Name der Ars magna oder vielmehr die Unterſcheidung der Ars magna von der Ars minor vielleicht ſchon im Arabiſchen begründet iſt, läßt ſich nicht eher mit völliger Gewißheit beſtimmen, als bis die Arabiſchen Mathematiker uns etwas vollſtändiger als bis jetzt vorliegen werden. Bei Caſiri kommt der Titel der Ars magna zweimal vor, aber in anderem Sinne; es bedeutet daſelbſt nämlich eine encyklopädiſche auf eine eigenthümliche Weiſe dargeſtellte Bearbeitung verſchiedener Wiſſenſchaften, als deren Erfinder oder wenigſtens Verbeſſerer Mohammed ben Ahmed Almarakſchi genannt wird[40].

Den alten Italienern war lange Zeit die Algebra weiter nichts, als ein Hilfsmittel arithmetiſche Räthſel aufzulöſen; man verſtand, wie es ſcheint, noch nicht ſie auf praktiſche Lebensverhältniſſe anzuwenden. Dieſes Letztere, die Anwendung der verſchiedenen Rechnungsarten auf das geſellige Bedürfniß, machte einen weſentlichen Theil der Ars minor aus, die Practica mercantilis. In dieſem Gegenſatz erhielt die Algebra als eine ganz theoretiſche Wiſſenſchaft den Namen der Practica speculativa, ein Titel, der hier nur kurz

39) Cossali T. I. p. 11. 25.

40) Bibl. Arab. Hisp. Escur. T. I. p. 380. nennt der Verf. ein encyklopädiſches Werk von Scha'yâ ben Ferigûn (unter dem Titel كتاب جوامع العلوم) „ubi scientiarum ferme omnium regulae ductis quibusdam lineis atque circulis, mira brevique arte traduntur. Id scribendi genus Arabum Scriptores *Artem Magnam* appellant." T. II. p. 90. Moh. ben Ahmed, vulgo Almarakschi . . . . Artem quam vocant Magnam vel invenit vel saltem adornavit. Alſo hat die Arabiſche Ars magna mit der Italieniſchen wohl nichts gemein.

angeführt werden darf, weil er weiter keine hiſtoriſche Bedeutung erlangt hat.

Weiter verbreitete und länger behauptete ſich der letzte der angeführten Namen in verſchiedenen Sprachen; um denſelben zu erklären, iſt es nöthig auf das Arabiſche zurückzugehen. Die Arabiſchen Mathematiker nennen die unbekannte Größe *schai*, شيء, res, aliquid (vielleicht dem Sinne nach entlehnt von dem Indiſchen yâvattâvat, quantum tantum, d. i. quantumcunque sit) und dem Quadrat mâl, مال, possessio, opes. Hiervon bildete Leonard Bonacci, der unmittelbar von ihnen ſchöpfte, die wirklichen Lateiniſchen Überſetzungen, und namte die Unbekannte res und deren Quadrat census, in der Bedeutung, nach welcher dieſes Wort im ſpätern Latinismus dem Arabiſchen mâl entſpricht[41]). Wie nun im Arabiſchen von zwei Operationen, ſo erhielt in Europa die Wiſſenſchaft ihren Namen von den beiden erſten Potenzen der Unbekannten, und wurde Ars rei et census, oder auch blos Ars rei genannt. Dieſe Benennung erhielt ſich längere Zeit auch außerhalb Italien. Ich führe hier folgendes Beiſpiel von Regiomontanus[42]) an, weil es

41) Es iſt mir nicht überzeugend, was Cossali T. I. p. 12. 13. ſagt: Non fu già iuvenzion di Leouardo chiamare il quadrato *censo;* per l'opposto dal suo serivere *quadratus qui videlicet census dicitur*, si raccoglie, che il nome di *censo* in luogo di quadrato era già usitato, anzi il più usitato presso la latina gente. Es wäre allerdings möglich, daß das Wort census in dieſer Bedeutung ſchon früher im Gebrauche geweſen; wie das aber aus Leonard's citirten Worten hervorgehen ſoll, ſehe ich nicht ein. Ich möchte, anſtatt in dieſen Worten census für eine Erklärung von quadratus zu nehmen, das Verhältniß vielmehr umkehren und annehmen, daß Leonard ſagen welle, er werde, was man gewöhnlich Quadrat nenne, im Verlauf ſeiner Schrift census nennen. Dieſer Sinn ergiebt ſich ganz einfach, wenn man zu den Worten qui videlicet census dicitur, ſich eine Ergänzung wie nobis oder in hac arte hinzudenkt.

42) De triangulis omnimodis L. II. prop. 12. Ungenau iſt, was Montucla T. I. p. 536 in Bezug auf dieſe Stelle ſagt: Regiomontanus ... se proposant un problême qu'il analyse algébriquement, et qui le conduit à une équation du second degré, il renvoie aux règles de l'art, qu'il dit connues (?), *fiat*, dit il, *secundum cognita artis praecepta.* Schwerlich hat Montucla die Stelle ſelbſt geleſen, ſondern er hat ein fremdes falſches Citat abgeſchrieben. Dieſe Formel, die er fälſchlich dem genannten Auctor in den Mund legt, iſt ihm ein Beleg für die Bemerkung: Nous rémarquons en effet, dès le milieu du XV. siècle, que les règles de l'algèbre, pour la résolution du second degré, étoient *vulgairement connues.* Wenn man ſo citirt, kann

ugleich zeigt, wie man mit dieſen Benennungen umging. Die Aufgabe iſt: Data perpendiculari atque basi, et proportione laterum cognitis, utrunque latus cognoscere. Hoc problema geometrico more absolvere non licuit hactenus, sed per artem rei et census id efficere conabimur. etc. etc. Pono lineam *eg* 2 res, ita unde linea *be* erit 20. demptis duabus rebus, et ejus medietas *bd* 10 minus 1 re, reliqua vero *dg*, erit 10 et una res. duco *bd* in *se*, producitur 1 census et 100, demptis 20 rebus u. ſ. w. Am Ende heißt es: restauransque ut assolet defectibus (d. i. Aljebr), et ablatis aequalibus (d. i. Almukabalah), utrobique perducemur ad 16 census et 2000 aequales 680 rebus: quam ob rem, quod restat, praecepta artis edocebunt. Das Reſultat ſelbſt giebt er nicht. Als ſeit Guglielmo di Lunis im vierzehnten Jahrhundert die Mathematiker anfingen die Lateiniſche Sprache mit der Italieniſchen zu vertauſchen, nahmen auch jene Benennungen Italieniſche Formen an; die Unbekannte hieß nun cosa oder cossa, das Quadrat derſelben censo (von Ausländern ziemlich allgemein, aber fälſchlich zenso geſchrieben) und die Wiſſenſchaft ſelbſt arte oder regola della cosa. Dieſer Name ſcheint in Italien am Ende des funfzehnten Jahrhunderts der gebräuchlichſte geweſen zu ſein; denn Luca Pacioli in ſeiner Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità, 1494, ſagt, indem er die verſchiedenen Namen der Wiſſenſchaft aufzählt, ſie ſei von dem großen Haufen (dal volgo) la regola o l'arte della cosa, von Andern arte d'algebra ed almucabala, von Andern pratica speculativa, von noch Andern arte maggiore genannt worden [43]). Dieſer Name nun, arte della cosa, wurde wiederum, aber wohl nur von Nicht-Italienern, ins Lateiniſche übertragen oder vielmehr barbariſch latiniſirt als ars cossica, ars cosae, auch cossa und

---

man leicht Hypotheſen bauen. Hätte Montucla einen ſo wichtigen Auctor, wie Regiomontan, aufmerkſam geleſen, ſo würde er gerade die entgegengeſetzte Behauptung bei ihm gefunden haben. Es heißt nämlich in deſſen Quadratura circuli p. 49: Quo autem pacto concluserim lineam *ap* esse oportere inter praedictos terminos, longum esset enarrare; et *fortasse obscurum videretur, paucis enim admodum artem Algebrae, sive rei et census, satis cognitam scio,* qua quidam arte hoc in negocio usus sum. Weit entfernt alſo, daß die Algebra vulgairement connue geweſen wäre, fürchtet Regiom. ſogar den Mathematikern undeutlich zu werden, wenn er ſie anwendete.

43) Cossali T. I. p. 11.

ähnlich. So ſagt Gemma Friſius per Regulam Cosae sive Algebrae[44]); ſo finde ich Logistice Astronomica Hexacontadōn etc. Item Logistice Regulae arithmeticae quam Cossam et Algebram quadratam vocant. Autore C. Peucero. Viteb. 1556. u. A. Und in Deutſchland erſcheint ſeit Chriſtoph Rudolff (1524) und Michael Stifel (1553) die Coß[45]). Selbſt die unbekannte Größe erhielt den barbariſchen Namen numerus cossicus, coſſiſche Zahl, und behielt denſelben ziemlich lange[46]). Der Name der Coß ſcheint ſich noch im ſiebzehnten und am Anfange des achtzehnten Jahrhunderts neben den gebräuchlicheren erhalten zu haben. Beiſpiele ſind: Nic. Reimari, ursi Dithmarsi arithmetica analytica vulgo Coss oder Algebra. Frankf. a. O. 1601. 4. — P. Rothe,

---

44) Arithm. pract. methodus facilis. Coloniae 1571. p. 81. 105. 110. 112. etc.

45) Die Coſſ Chriſtoffs Rudolffs, mit ſchönen Exempeln der Coſſ durch Michael Stifel gebeſſert und ſehr gemehrt. Zu Königſperg in Preuſſen. 1553. 4. Vergl. Note 36. Daſelbſt fol. 62. heißt es: „Die alten unſer vorfarn ... habenn nach ernſtlichem vleyſſ erfunden die Coſſ, das iſt die rechnung von einem ding" u ſ. w. Und fol. 140: „Da mit aber bekant werde der urſprung, von welchem gefloſſen iſt der Nahm diſer übung, das es die Coſſ genennet wirt, verſtehe, das die alten diſſ werck genennet haben ein Kunſt von dingen, darumb das durch ſye verborgenheyt der fragen, ſo von dingen, das iſt, von zålen und maſſen geſchehen, auffgelöſet werden. Das bezeugen alte bücher (nicht vor wenig jaren) von der Coſſ geſchriben. In welchen die quantitet, Dragma, Res, ſubſtantia ꝛc. nicht durch Character, ſondern durch gantz geſchribene wort, dargegeben ſind. Unn ſonderlich in practicirung eines yeden Exempels, wird die Frage geſetzt, Ein ding, mit ſollichen worten. Ponatur una Res. Dieweyl nu diſe Kunſt von den Graecis zu den latiniſchen kommen, von jhnen mit ſampt aller Philoſophi auffgenommen, haben ſye die wahlen, dem latin nach, zu welſch genennet Regule de le Coſſe. Denn Coſſa bedeut ein ding, von dannen kompt das es von den Teutſchen Die Coſſ genent wirt." Derſelbe Verfaſſer gebraucht indeß in ſeiner oben erwähnten Arithmetica integra immer die Namen Algebra, ars Algebrae, ars Gebri.

46) So noch immer Dechales in ſeinem Cursus s. mundus mathematicus, deſſen theoretiſche Abhandlungen, beiläufig geſagt, bedeutend beſſer ſind, als der hiſtoriſche tractatus proemialis. Vergl. T. I. p. 571 sqq. Algebra. Da heißt es z. B. p. 572. prop. II. Denominalio numerorum cossicorum . . . Propterea dicuntur numeri denominati, *cossici* item vocantur, quia Itali quadratum cosam dixerunt (falſch!) et consequenter numeros cossicos quasi numoros radicis et quadcati.

Arithmetica philosophica oder ſchöne neue und wohlgegründete künſtliche Rechnung der Coß und Algebra. Nürnb. 1607. fol. — **J. R. Brasser, Regula Cos of Algebra, zynde de allerkonstryksten Regel** om het onbekende bekent te maken etc. Amsterd. 1663. 4. — Neu vermehrter arithmetiſcher Raritäten-Kaſten, in welchem die curieuſen **regula falsi, caeci** und **coss** oder Algebra ꝛc. Leipz. 1716. Aus den claſſiſchen Werken iſt indeß dieſer Titel ſeit dem Ende des ſechszehnten Jahrhunderts verſchwunden. Ganz ohne hiſtoriſche Bedeutung iſt das Erſcheinen dieſes Namens auf Büchertiteln in dem gegenwärtigen Jahrhundert, weil da dieſe Erſcheinung nicht mehr natürlich und aus dem Geiſte der Zeit hervorgegangen, ſondern willkührlich herbeigezogen iſt. So in **Christmann, ars cosae promota. Francof. 1813.** und deſſelben **Cardanus suevus sive de functionibus cosae resolventibus tractatio. Stuttg. 1815.** Solche Titel ſind Anachronismen.

Seit dem letzten Viertel des ſechszehnten Jahrhunderts erhielt die Algebra durch Vieta eine andere Geſtalt und einen andern Namen. Vieta that den ungeheuern Schritt, für die Zahlencoefficienten, an denen bis dahin die ganze Theorie der Gleichungen haftete, allgemeine oder Buchſtabencoefficienten zu ſubſtituiren, und dadurch die Wiſſenſchaft über den bisherigen Standpunct der Auflöſung arithmetiſcher Kunſtſtückchen zu erheben. Dieſe allgemeinen Coefficienten nannte er **species**, und daher die Algebra ſelbſt **logistica** oder **arithmetica speciosa**, im Gegenſatze zu der gemeinen Arithmetik oder **arithmetica numerosa**. Dieſer Name, **arithmetica speciosa**, erſcheint nach Vieta abwechſelnd mit dem der **arithmetica universalis**. So groß indeß die Verdienſte Vieta's um die Wiſſenſchaft waren, ſo hat ſich doch weder die Form, noch der Name, den er derſelben gab, lange erhalten; denn er hatte das Unglück, und die Wiſſenſchaft das Glück, daß mit ihm eine neue Periode begann, in welcher eine Erfindung die andere faſt gewaltſam drängte; es iſt genug, die Namen Harriot, Oughtred, Descartes, Wallis, Leibnitz, Newton zu nennen, um es begreiflich zu machen, daß die wichtigen Theorien und Formen Vietas verdrängt werden konnten, bevor ſie ſo recht eigentlich in das Leben der Wiſſenſchaft eingedrungen waren. Daher erſcheint auch der Name der Arithmetica speciosa ſehr vereinzelt auf den Titeln algebraiſcher Werke, wenngleich der Ausdruck species, ſo wie die Unterſcheidung der beiden Formen der Algebra in eine numerosa und eine speciosa noch lange im Gebrauch blieb.

So ſagt Dechales: **Algebram communiter his temporibus in duas partimur, in numerosam scilicet, seu vulgarem et antiquam, et in speciosam, utramque iisdem nixam principiis ... Prima Diophantum authorem agnoscit, haec Vietam ...** [47]). Und Newton's allbekannte **Arithmetica universalis** beginnt mit den Worten: **Computatio vel fit per *numeros*, ut in vulgari Arithmetica, vel per *species*, ut Analystis mos est.**

In dieſer Stelle werden wir zugleich auf einen anderen Namen geführt, der ſich meines Wiſſens gleichfalls bei Vieta zuerſt vorfindet, und ſich bedeutend länger als der vorerwähnte, bis weit in das vorige Jahrhundert, ja wohl noch bis in das gegenwärtige hinein, gehalten hat. Es iſt der der **ars analytica, arithmetica analytica, analysis.** Schon dasjenige Werk Vieta's, welches die Geſtalt, die er der Algebra zu geben gedachte, aus einander ſetzt, führt den Titel: **In artem analyticam isagoge.** Darauf erſchienen: **Reimari ursi Dithmarsi arithmetica analytica. Francf. 1601. — Harrioti artis analyticae praxis. London. 1631. — Renaldini opus algebraicum in quo ... Ars analytica quam obscure Fr. Vieta litteris mandavit, traditur. Anconae. 1644.** — Deſſ. **Ars analytica mathematum. Florent. 1655. — de la Hire, la construction des équations analytiques. Paris. 1679,** und unzählige andere. Als nach den großen Erfindungen der letzten Hälfte des ſiebzehnten Jahrhunderts die Infiniteſimalrechnung den Namen der **analysis infinitorum** erhielt, behauptete ſich die Algebra als **analysis finitorum,** und noch Käſtner's Anfangsgründe der Analyſis endlicher Größen iſt jedem Mathematiker bekannt. In der neuen und neueſten Zeit haben einige Zeloten für das Studium der Griechen gegen dieſen vermeintlichen Mißbrauch des Worts Analyſis geeifert, und gemeint, daſſelbe gehöre allein der Geometrie an. Aber dieſe Anſicht iſt offenbar falſch, und ſelbſt diejenigen Worte, mit welchen Euklides, oder wenn man will, ſein Scholiaſt und Überarbeiter Theon von Alexandrien, den Begriff der Analyſis definirt, ſchließt die Anwendung dieſes Namens auf den Calcul auf keine Weiſe aus. Er ſagt nämlich nach dem erſten Satze des dreizehnten Buchs: *Ἀνάλυσίς ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου, διὰ τῶν ἀκολούϑων, ὡς ὁμολογουμένου, ἐπί τι ἀληϑὲς ὁμολογούμενον,* d. h. Analyſis iſt die Annahme des Geſuchten als etwas

47) **Cursus T. I. p. 29.** und faſt wörtlich daſſelbe **p. 571.**

Gegebenen, (um) durch Schlüſſe zu etwas wahrem Gegebenen (zu gelangen). Da iſt nun erſtens von Geometrie ausſchließlich gar nicht die Rede, und zweitens iſt es doch in der That weſentlich gar nicht verſchieden, ob ich ſage, *ABC* ſei das geſuchte Dreieck, oder ob ich ſage, *x* ſei die geſuchte Zahl; in beiden Fällen ſchließe ich mit Hilfe dieſer Präoccupation aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe auf den Zuſammenhang des Gegebenen mit dem Geſuchten, und dieſe Annahme des Unbekannten als etwas ſcheinbar Gegebenen dient nur dazu, um jenen Zuſammenhang, in dem einen Falle durch Zeichnung an der Figur, in dem andern durch hingeſchriebene Formeln, der ſinnlichen Anſchauung darzuſtellen. Geometriſche Analyſis und Algebra beruhen demnach durchaus auf einem und demſelben Principe. Ganz klar hat das Dechales gedacht, wenn er ſagt: Algebra, quae analytica dici potest, eo quod per analysin procedat, nempe id quod quaeritur, jam quasi cognitum et datum supponat, habet pro fine etc. etc. [48]). Nicht weniger klar hat ſchon Vieta ſelbſt das gedacht, wenn gleich ſeine Darſtellung wie im Allgemeinen, ſo auch hier, etwas ſchwerfällig iſt. Er beginnt nämlich ſeine In artem analyticam Isagoge mit folgenden Worten: Est veritatis inquirendae via quaedam in Mathematicis, quam Plato primus invenisse dicitur, a Theone nominata Analysis, et ab eodem definita, Adsumptio quaesiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Ut contra Synthesis, Adsumptio concessi per consequentia ad quaesiti finem et comprehensionem. Et quanquam veteres duplicem tantum proposuerunt Analysin ζητητικὴν καὶ ποριστικὴν, ad quas definitio Theonis maxime pertinet, constitui tamen etiam tertiam speciem, quae dicatur ῥητικὴ ἢ ἐξηγητικὴ, consentaneum est, ut sit Zetetice quâ invenitur aequalitas proportiove magnitudinis, de qua quaeritur, cum iis quae data sunt. Poristice, qua de aequalitate vel proportione ordinati Theorematis veritas examinatur. Exegetice, qua ex ordinata aequalitate vel proportione ipsa de qua quaeritur exhibetur magnitudo. Atque adeo *tota ars Analytice* triplex illud sibi vendicans officium definiatur, *Doctrina bene inveniendi in Mathematicis.* Demnach iſt die Algebra wirkliche Analyſis, auch im Sinne der alten Griechen, und es ſind diejenigen, welche

48) Cursus T. I. p. 29.

dieſer Wiſſenſchaft zuerſt den Namen Analyſis beilegten, deshalb nicht zu tadeln, gleich als hätten ſie Fremdartiges mit einander vermengt, ſondern vielmehr zu loben, weil ihr Scharfblick ſcheinbar Getrenntes unter einem gemeinſchaftlichen höhern Geſichtspuncte zuſammenfaßte. Jedenfalls aber iſt der Name Analyſis für unſre Wiſſenſchaft bezeichnender, als der gebräuchliche Name Algebra. Denn gerade das, was dieſes Arabiſche Wort bezeichnet, iſt uns fremde geworden, wie aus dem oben über dieſen Ausdruck Geſagten ſattſam erhellt.

Ich habe oben ſchon etwas von der Benennung der Unbekannten und ihres Quadrats erwähnen müſſen. Die vollſtändige Entwickelung dieſes Gegenſtandes ſpare ich mir für eine andere Gelegenheit auf, wo dieſelbe mehr an ihrem Platze ſein dürfte; ich erwähne nur vorläufig, daß dieſe Benennungen ſowohl als die dafür gebrauchten Zeichen in verſchiedenen Zeiten und bei verſchiedenen Völkern faſt noch mehr variirt haben, als die Namen der Wiſſenſchaft, der ſie angehören, und daß eine hiſtoriſche Kenntniß der einen wie der andern zum Verſtändniſſe älterer Schriften durchaus nothwendig iſt.

Die Algebra iſt Rechnung und führt demnach, wie jede Betrachtung von Menge und Größe, in ihren letzten Elementen auf den Begriff der Zahl zurück. Von ihrer Geſchichte kann daher die Geſchichte der elementaren Zahlenkunde, der Arithmetik, nicht ganz getrennt werden. Ich muß alſo, bevor ich auf die Algebra ſelbſt komme, zunächſt mich etwas ausführlicher über die Geſchichte der Zahlen und der Zahlenkunde im Allgemeinen, und der Griechiſchen insbeſondre ausbreiten, und das ſoll der Gegenſtand der nächſten Capitel werden.

Drittes Kapitel.

Ueber Zahlenſyſteme und Zahlzeichen.

Der Begriff der Zahl iſt ein einfacher und dem Geiſte urſprünglich gegebener; deshalb ſind alle Verſuche, denſelben wiſſenſchaftlich zu definiren, ebenſo wohl geſcheitert, wie die Bemühungen die Euklidiſchen Grundſätze zu beweiſen. Zu dieſer Urſprünglichkeit des Begriffs an und für ſich geſellt ſich die frühe Nothwendigkeit, Zahlen zu gebrauchen, ſo daß die Erfindung einer elementaren Rechenkunſt ſich in die Zeiten der allererſten Entwickelung des geſellſchaftlichen Lebens verliert und der hiſtoriſchen Nachforſchung ſich entzieht; und es heißt nur auf die nächſte Quelle hinweiſen, wenn z. B. von den Griechen die Phönizier als Erfinder dieſer Kunſt genannt werden. Weniger noch, als irgend eine andre Wiſſenſchaft, hat die Kunſt zu zählen und Zahlen zu addiren und zu ſubtrahiren einen ſichtbaren Urſprung gehabt; das früheſte Bedürfniß hat dieſelbe mit ſich gebracht, die Natürlichkeit und Urſprünglichkeit des Begriffs hat das Vorhandenſein der Kunſt vor dem ungebildeten Verſtande, der gerade das Einfache, Nächſtliegende am wenigſten bemerkt, verſteckt gehalten, und gewiß Jahrtauſende lang ſind die einzelnen Regeln des Rechnens nicht nur vorhanden, ſondern ſogar allgemein im Gebrauche geweſen, bevor eine Arithmetik oder Logiſtik als Wiſſenſchaft ſich herausbilden konnte. Mit Recht ſagt Plato in Bezug auf die Sage, daß Palamedes der Erfinder der Zahlenkunde ſei: Wie, hat denn etwa Agamemnon ohne Palamedes nicht gewußt, wie viele Füße er habe [1])? Die vergeblichen Bemühungen, den Urſprung der Rechenkunſt auf irgend einen hiſtoriſchen Namen zurückzuführen, haben ihre Veranlaſſung in der Anerkennung der allgemeinen Wahrheit, daß jegliches Ding ſeinen Grund haben müſſe. Das iſt allerdings auch ganz richtig, nur liegt dieſer Grund hier tiefer als in irgend einer äußeren

1) Plato de republica, Ed. Stephani. Francof. 1602. fol. p. 697.

Veranlaſſung, er liegt in der innerſten Natur des menſchlichen Geiſtes. Ebenſo wenig, als es der Nilüberſchwemmungen und der in Folge derſelben nothwendig gewordenen Waſſerbauten und Ländereintheilungen in Ägypten bedurfte, um der Geometrie ihren erſten Urſprung zu geben, ebenſo wenig bedurfte es eines Palamedes oder gar eines Phönizischen Welthandels, um eine dem menſchlichen Geiſte und Bedürfniſſe ſo verwandte und nahe liegende Kunſt, wie die Kunſt zu zählen und zu rechnen, ins Leben zu rufen.

Wie ſich nun frühe die Nothwendigkeit, mit Zahlen umzugehen, einſtellte, ſo bildete ſich gewiß auch verhältnißmäßig frühzeitig das Bedürfniß heraus, dem Gedächtniſſe durch Notirung und Aufzeichnung gewiſſer Zahlen und Summen zu Hilfe zu kommen. Für eine gewiſſe Anzahl von Einheiten ebenſo viele Striche in ein Brett zu ſchneiden oder in einen Stein zu kratzen, liegt dem Bedürfniſſe des geſelligen Verkehrs ſo nahe, und iſt ſo ſehr viel einfacher, als die Zergliederung und graphiſche Darſtellung der articulirten Laute der menſchlichen Rede, daß gar nicht daran zu zweifeln iſt, daß die Zahlenſchrift lange vor der Buchſtaben- und Wortſchrift vorhanden geweſen. Dieſes beweiſt auf einer Seite noch heutzutage der gemeine Mann, der des Schreibens unkundig, dennoch an ſeiner Stubenthür gewiſſe willkührliche, nur ihm verſtändliche Zahlzeichen als Gedächtnißſtützen ankreidet, wie ich ſelbſt öfters zu beobachten Gelegenheit gehabt habe; auf der andern Seite liefern den hiſtoriſchen Beweis für dieſe Hypotheſe mehre Amerikaniſche Völker, z. B. die Azteken in Mexico, die Muyska's in den Hochebenen von Cundinamarra und Andere, welche bekanntlich, wie alle Völker Amerika's, mit der ſchriftlichen Darſtellung der Rede bis zur Ankunft der Europäer in Amerika unbekannt geblieben waren, bei denen ſich aber nichts deſto weniger graphiſche Syſteme von Zahlzeichen vorfinden [2]). Zum momentanen Gebrauche im Verkehr ſind indeß geſchriebene Zahlen gewiß viel ſpäter verwendet worden. Man bediente ſich urſprünglich kleiner Steinchen (daher calculare, ψηφίζειν), Samenkörner, Kügelchen, welche ſpäterhin, bei weiterer Fortbildung zu conſtanten Zahlenſyſtemen, auf Schnüre gezogen, und dieſe wiederum in feſte Rahmen geſpannt zu Rechenbrettern (abacus, Suanpan) umgeſtaltet wurden,

2) S. Alexander v. Humboldt über die bei verſchiedenen Völkern üblichen Syſteme von Zahlzeichen, in Crelle's Journal für Mathematik, Bd. IV. S. 205—231 an mehren Stellen.

von denen wir bei einer ſpäteren Gelegenheit weitläufiger reden wollen.

Die erſte und natürlichſte Art, Zahlenſummen zu bezeichnen, war unſtreitig die, daß man ſo viele Striche zeichnete oder einſchnitt, als man Einheiten andeuten wollte. Daher iſt noch in den meiſten bekannten Syſtemen von Zahlzeichen, welche nicht dadurch, daß ſie die Buchſtaben des Alphabets als Zahlen gebrauchen, ihren ſpäteren Urſprung verrathen, ein einfacher Strich das Zeichen für die Einheit geblieben; und es beruht auf einem übel angebrachten ſpäteren Witze, wenn dieſes Zeichen wegen einer zufälligen äußeren Ähnlichkeit allmählig mit irgend einem Buchſtaben des Alphabets vermengt, oder einem ſolchen nachgebildet wird, wie im Lateiniſchen der I, im Arabiſchen dem Elif, ا. Bei Bezeichnung größerer Summen mußte indeſſen dieſe Aneinanderreihung von Einheiten beſchwerlich, ja unmöglich werden, und das Bedürfniß führte ſo auf die Einführung des Gebrauchs gewiſſer Perioden in der Zahlenreihe, bei denen man wieder von vorne anfing, d. h. man bediente ſich eines einfachen Zeichens für fünf, zehn oder zwanzig Einheiten. Es lag nahe, ſich grade dieſer drei Zahlen als Periodenabtheiler zu bedienen, welche durch die Anzahl der Finger und Zehen an Händen und Füßen der unmittelbaren Anſchauung dargeboten wurden, und man wählte die eine oder die andere der genannten Zahlen als Haltpunct, je nachdem man eine Hand, oder beide Hände, oder Hände und Füße zuſammen durchzählte, bevor man zu einer neuen Einheit höherer Ordnung ſeine Zuflucht nahm. Dieſe Begriffe von Hand und Fuß ſind ſogar in die Sprache übergegangen, indem in mehrern Amerikaniſchen Sprachen fünf eine Hand, zehn zwei Hände, zwanzig Hände und Füße, oder auch ein Menſch genannt werden [3]). Dieſe Perioden nun, ſo wie wiederum die Art der Zuſammenfaſſung derſelben zu neuen Perioden der zweiten, dritten und höheren Ordnungen haben bei den verſchiedenen Völkern und in verſchiedenen Zeiten ſehr mannigfache Arten der Darſtellung veranlaßt, und der menſchliche Geiſt hat in mancherlei Modificationen, durch ſehr abweichende Zwiſchenglieder die Stufenleiter von

3) Ebend. S. 211. Daß aber im Perſiſchen penjeh die Fauſt und penj fünf heißt (پنج ، پنجه), gehört wohl nicht hieher, vielmehr iſt hier der Zuſammenhang ein umgekehrter, und penjeh iſt erſt aus penj entſtanden, was ſchon die Ableitungsendung andeutet.

von der einfachen rohen Nebeneinanderſtellung von Einheiten bis zu dem vollendeten Indiſch-Arabiſchen Decimalſyſtem mit Stellenwerth der Ziffern durchſchreiten müſſen. Die Abweichungen der einzelnen vorhandenen Syſteme von einander beſtehen hauptſächlich in der verſchiedenen Art und Weiſe, wie die höheren Periodenzeichen mit den niederen und den Einheiten zur Bezeichnung zuſammengeſetzter Zahlen verbunden werden. Faſt keines der bekannten Zahlenſyſteme aber bleibt hierin durchaus einem und demſelben Principe getreu; ich will daher, bevor ich zur hiſtoriſchen Darlegung der üblichſten und uns am nächſten intereſſirenden Zahlenſyſteme übergehe, im Allgemeinen die weſentlichſten Methoden, welche ſich im Gebrauche in den verſchiedenen Syſtemen vermengt vorfinden, aus einander ſetzen, damit dieſelben ſich nicht in ihrer factiſchen Vermiſchung in den einzelnen Syſtemen gegenſeitig verdunkeln.

1. Nebeneinanderſtellung durch Addition oder Subtraction. Dieſe Methode findet ſich bei den ältern Semitiſchen Völkern, bei den Griechen, bei den Römern und Andern. Im Römiſchen z. B. bedeutet **C** hundert, **L** funfzig, **V** fünf, alſo **CLV** hundert und funfzig und fünf, d. i. 155. Ja die Römer ſind bei der geringen Anzahl von Zeichen, die ihr Syſtem enthält, ſogar gezwungen, daſſelbe Zeichen öfter zu wiederholen, z. B. **III**, **XXX**, **CCC** u. ſ. w. Dieſes iſt die roheſte Art von Zahlenbezeichnung, und darum wahrſcheinlich die urſprünglichſte, wie wir ſchon erwähnt haben. Sie führte ſpäterhin, um die unbequeme Aufeinanderfolge zu vieler gleicher Zeichen zu vermeiden und die Schrift abzukürzen, auf den Gebrauch der ſubtractiven Nebeneinanderſtellung, als **IV**, **IX**, **XC** u. ſ. w. Vollkommener iſt das Semitiſche und das daraus entſtandene Griechiſche Syſtem, weil es eigene Zeichen für die neun Einheiten (πυϑμένες) und deren Producte in zehn und deſſen Potenzen hat, alſo für 20, 30, 40 u. ſ. w., für 200, 300, 400 u. ſ. w. Dieſe Zeichen werden dann aber zur Andeutung der dazwiſchen liegenden Zahlen, wie im Römiſchen Syſteme, durch bloß additive Nebeneinanderſtellung verbunden, z. B. aus ϱ hundert, λ dreißig, η acht, wird gebildet ϱλη gleich hundert und dreißig und acht, 138. Daß die Römer ſich eigener Zeichen, die Semiten und Griechen dagegen ſich der Buchſtaben des Alphabets bedienen, iſt ein unweſentlicher Unterſchied. Der letztere Umſtand hat, zumal wenn, wie in dieſen Syſtemen, viele Zeichen gebraucht werden, den Vortheil, daß die Zeichen ſelbſt ihrer Form und ihrer Reihenfolge nach

ſchon bekannt ſind. Subtraction durch die Stellung kennen und bedürfen dieſe beiden Syſteme nicht.

2. **Multiplication durch beigefügte Coefficienten oder Exponenten.** Ich ziehe dieſe beiden Methoden in eine zuſammen, weil ſie nur in der graphiſchen Form von einander abweichen, im Weſen aber durchaus zuſammenfallen. Das Weſentliche dieſer Methode beſteht nämlich darin, daß ein höheres Periodenzeichen durch ein daneben oder darüber geſchriebenes Zeichen einer niedrigern Periode oder einer Einheit multiplicirt wird. So ſchreiben z. B. Diophant und Pappus, Letzterer in dem von Wallis herausgegebenen Fragmente des zweiten Buchs βΜυ. und Μυ.β für zwei Myriaden, γΜυ. und Μυ.γ für drei Myriaden, u. ſ. w. Ähnlich findet ſich bei den Römern die Ausdrucksweiſe **VM, XM** für fünftauſend, zehntauſend. Diophant läßt auch zuweilen das Myriadenzeichen aus, und ſetzt an deſſen Stelle einen bloßen Punct, der den Coefficienten der Myriade von den folgenden niedrigern Zahlen ſcheidet, z. B. **IV**, 18. ϱκζ. φξη d. h. 127 Myriaden und 568 Einheiten, oder 1270568. Hier vertritt alſo der Punct als abkürzendes Zeichen die Stelle des Μ oder Μυ. Ob nun der Multiplicator als Coefficient neben, oder als Exponent über das Myriadenzeichen (denn bei andern als den Myriadenzeichen findet ſich dieſe Methode bei den Griechen nicht) geſtellt wird, iſt, wie geſagt, unweſentlich. Eutokius in ſeinem Commentare über Archimed's Kreismeſſung thut beſtändig das Letztere, und ſchreibt z. B. $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$, $\overset{\varrho}{\mathrm{M}}$ für zwei Myriaden, hundert Myriaden, und das Syſtem des Herodian, welches wir unten näher kennen lernen werden, zieht den Multiplicator 5, welcher durch Π dargeſtellt wird, um die zu multiplicirende Zahl; Δ iſt zehn, alſo [Δ] funfzig. Was bei den Griechen auf dieſe Weiſe ſich nur bei den Myriaden, bei den Römern nur bei den Tauſenden findet, wird von den Chineſen und Japanern, ferner in dem Syſtem der Tamilziffern durchgehend bei allen Vielfachen der Periodenzeichen gebraucht, ſo daß, mit den uns geläufigen Zeichen ausgedrückt, z. B. $\mathbf{X}^{5}$ funfzig, $\mathbf{C}^{4}$ vierhundert u. ſ. w. bedeutet [4]).

3. **Veränderung des Zahlenwerthes durch beigeſetzte Apices.** Der weſentliche Unterſchied zwiſchen dieſer Methode und der Exponenten-Methode in der vorigen Nummer beſteht darin, daß

4) A. v. Humboldt a. a. O. S. 223. 225.

dort das Myriadenzeichen als Grundzahl hingeſtellt und ihr Multiplicator als gewöhnliches Zahlzeichen darüber geſchrieben wird, hier dagegen einerſeits dieſer letztere Multiplicator die Grundzahl bildet, andererſeits aber diejenige Potenz von zehn (oder was immer als Periodenzahl angenommen wird), in welche dieſe Grundzahl multiplicirt werden ſoll, nicht in ihrer gewöhnlichen Geſtalt hingeſtellt, ſondern durch willkührliche Zeichen, Puncte oder Häkchen, angedeutet wird. Am conſequenteſten iſt dieſe Methode aufbewahrt in den Arabiſchen ſogenannten Ghobar-Ziffern; dieſes Syſtem hat, wie das Indiſch-Arabiſche, nur neun Zeichen für die neun Einheiten; für die Zehner wiederholt es dieſelben Zeichen mit einem Punct oben, für die Hunderter mit zwei, für die Tauſender mit drei Puncten. Hier vertreten die Puncte die Stellen der von uns gebrauchten Nullen, wie Humboldt geiſtreich bemerkt, nur mit dem Unterſchiede, daß in der Ghobarſchrift die Puncte auch da ſtehen bleiben, wo bei uns durch nachfolgende Ziffern die Nullen entbehrlich werden [5]). Übrigens ſcheint dieſes Syſtem wenig im Gebrauch geweſen zu ſein. Im gewöhnlichen Griechiſchen Syſtem finden wir dieſe Methode bei den Zahlen von 1000 bis 9000 angewandt, indem den πυϑμένες oder Einern unten ein Häkchen angeſetzt wird, ſo daß α̦ 1000, β̦ 2000 u. ſ. w. bis ϑ̦ 9000 bedeutet. Hier gilt dieſer unten angeſetzte Apex als Multiplicator tauſend, und die Griechen hätten dieſes Syſtem durch ihre ſiebenundzwanzig Zahlzeichen bis ϡ̦ gleich 900000 fortſetzen können. Das haben ſie aber nicht gethan, ſondern nach ϑ̦ oder neuntauſend gebrauchen ſie das Zeichen M oder Mυ. für zehntauſend. Dagegen wird ein altes, aber wie es ſcheint wenig gebräuchliches Syſtem angeführt, welches bis ϑ̦, neuntauſend, mit dem gewöhnlichen Syſtem übereinſtimmt, aber von zehntauſend an einen neuen Weg einſchlägt, indem es den Einheitszeichen oben zwei Puncte anſetzt, welche das Zeichen in die Myriaden multipliciren, und dieſes geht durch alle Zahlen von α = 1 bis ϑ̦ = 9000 durch, ſo daß α̈ eine Myriade oder 10000, ϊ zehn Myriaden, ρ̈ hundert Myriaden, α̦̈ tauſend Myriaden bedeutet. Dann beginnt die Reihe abermals von vorn, aber mit vier Puncten, welche die Grund-

---

5) S. de Sacy, grammaire Arabe. Paris. 1831. T. 1. p. 91. (§. 177) und Planche VIII. Humboldt a. a. O. S. 223. 224. Von dieſen Puncten ſcheint es den bildlichen Namen Ghobâr (غبار), Staub, erhalten zu haben.

zahl in zehntauſend Myriaden oder *μύριαι μυριάδες* multipliciren, α̈, β̈ u. ſ. w. bis ϟ̈; dann folgt dieſelbe Zahlenreihe mit ſechs Puncten für die dritte Potenz der Myriaden und ſo weiter fort. Dieſes Syſtem iſt übrigens ganz der Griechiſchen Denkweiſe angemeſſen, indem es das dieſem Volke eigenthümliche Fortſchreiten von vier zu vier Stellen (um in unſerer Vorſtellungsweiſe zu ſprechen) ſcharf ausprägt. Sehr intereſſant iſt die Bemerkung von A. v. Humboldt, daß, wenn die Griechen, anſtatt die Wiederholung der Pythmenes erſt bei tauſend anzufangen, ſich derſelben ſchon bei zehn u. ſ. w. ſtatt der Buchſtaben ι, κ u. ſ. w. bedient, und nachträglich, mit Andeutung der leer gebliebenen Stellen, die Apices weggelaſſen hätten, ſie auf die Erfindung des Indiſch-Arabiſchen Syſtems mit Stellenwerth der Ziffern gerathen wären [6]. Noch mehr aber gilt das von dem Syſtem der Ghobar-Ziffern. Eine eigenthümliche Anwendung dieſer Bezeichnungsmethode finden wir noch in dem von Ptolemäus und allen ſpäteren Aſtronomen gebrauchten Sexageſimalſyſtem, welches nach Potenzen von 60 abwärts ſteigt; die Ganzen (*μοῖραι*, Grade), d. h. die in die nullte Potenz von $\frac{1}{60}$ multiplicirten Zahlen, werden im Griechiſchen gar nicht, wenigſtens nicht anders als jede Zahl, nämlich durch einen darüber geſetzten Horizontalſtrich, bei den Späteren dagegen durch den Exponenten o angedeutet; die in die erſte Potenz von $\frac{1}{60}$ multiplicirten Zahlen, (*ἑξηκοστὰ πρῶτα*, Minuten) erhalten oben einen ſenkrechten Strich, die Secunden (*ἑξηκοστὰ δεύτερα*) zwei ſolcher Striche und ſo fort [7]).

Dieſes ſind die drei weſentlichſten Methoden, welche in der Zahlenbezeichnung und Zahlenbildung verſchiedener Völker ſichtbar ſind. Es finden ſich zwar, namentlich bei den Griechen, noch andere Methoden, zumal bei der Bildung höherer Zahlen; dieſelben ſind aber ganz vereinzelt und meiſtens nur von einem Auctor zu einem beſtimmten Zwecke angewendet worden, ſo daß ſie in das Zahlenſyſtem im ſtrengen Sinne des Worts nicht eingreifen. Ich übergehe ſie deshalb hier und ziehe es vor, ſie gehörigen Orts als Einzelnheit darzuſtellen.

---

6) A. a. O. S. 222.

7) Humboldt a. a. O. S. 225. macht aus dieſer Abtheilung von Zahlſchichten nach geometriſcher Progreſſion eine eigene Methode; ich finde aber zwiſchen dieſer und der eben beſchriebenen keinen weſentlichen Unterſchied. Auch ſcheint mir die Methode der Myriaden bei Eutokius beſſer in die zweite als in die dritte Klaſſe, wohin Humboldt ſie zieht, zu gehören.

Welche Zeichen nun ein Volk zum Ausdruck ſeines Zahlenſyſtems gewählt hat, iſt für die Sache ſelbſt ganz unweſentlich. Indeß laſſen ſich auch hier drei Klaſſen deutlich unterſcheiden. Erſtens, *willkührliche, von der Buchſtabenſchrift unabhängige Zeichen* mit oder ohne Hindeutung auf die darzuſtellende Zahl; zu der erſten Art gehören die Römiſchen, zu der zweiten die Indiſch-Arabiſchen Ziffern, obgleich bei den letzteren ſelbſt noch in der Arabiſchen Geſtalt die Zeichen für 2 und 3 noch ziemlich deutlich als aus zwei und drei Strichen zuſammengewachſen erſcheinen, ٢, ٣. Zweitens, *die Buchſtaben des Alphabets in ihrer gewöhnlichen Reihenfolge*, für die Einheiten und die Vielfachen der Periodenzahl gebraucht; dieſer Art iſt das Semitiſch-Griechiſche Zahlenſyſtem. Beide Klaſſen von Zahlzeichen ſind unabhängig von den Zahlworten. Darum unterſcheiden wir von ihnen drittens, *Anfangsbuchſtaben oder Abbreviaturen der Zahlworte*; hieher gehört das alt-griechiſche Syſtem des Herodian, und die Arabiſchen ſogenannten Diwani-Zahlen der Mehrzahl nach.

Ganz unabhängig von dieſer graphiſchen Bezeichnung der Zahlen ſind die Zahlenſyſteme, welche die Sprache darbietet, und auffallender Weiſe hat die Sprache meiſtens ein vollkommneres Syſtem als das durch Ziffern dargeſtellte. Die große Mehrzahl der bekannten Sprachen bekennt ſich zu einem conſequenten Decimalſyſtem, ſelbſt bei ſolchen Völkern, welche in der graphiſchen Bezeichnung der Zahlen von demſelben abweichen; ein nahe liegendes Beiſpiel davon iſt die Lateiniſche Sprache, während die Römiſche Zahlengraphik das dekadiſche Syſtem mit dem pentadiſchen untermiſcht, und zwiſchen die Zeichen für 1, 10, 100, 1000 noch eigene Zeichen für 5, 50, 500 einſchiebt. Wie wenig indeß die Sprache auf die Zahlengraphik eingewirkt hat, erhellt daraus, daß ſelbſt gebildete Völker, wie Semiten, Griechen und andere, den Wink, welchen ihnen die Sprache über den Zuſammenhang zwiſchen den Zahlen drei, dreißig, dreihundert giebt, nicht verſtanden, und daher dieſen innern Zuſammenhang in ihren Zahlenſyſtemen nicht dargeſtellt haben [8]. Eben darauf führt der

8) Es iſt eine auffallende Erſcheinung, daß das Zahlwort für 20 in ſo vielen Sprachen an irgend einer Unregelmäßigkeit laborirt. Regelmäßig gebildet iſt es im Deutſchen (zwanzig für zweizig, von der Form zween) und im Lithauiſchen (dwi-dessimts); das Lateiniſche viginti und Sanskrit vinçati (Perſiſch bist), haben vorn das d verloren; ebenſo wahrſcheinlich das Griechiſche εἴκοσι, wenn

Umſtand, daß eine Erſcheinung in der Sprache und die entſprechende in der Zahlenſchrift hinſichtlich der Stelle nicht übereinſtimmen, ferner, daß die Sprache eines Volks eine Bildung darbietet, welche ſich in der Zahlengraphik eines andern Volks wiederfindet. So entſprechen den Römiſchen Zeichen **IV**, **IX** u. ſ. w. dem Geiſte und der Methode nach die Zahlworte undeviginti, undetriginta; dieſe Zahlen ſelbſt aber werden in der Graphik nicht ſo gebildet; man ſchreibt nicht **IXX** ſondern **XIX**, das iſt **X** plus **IX**. Dieſe nämlichen Formen **IV**, **IX**, **XL** kennen die Griechiſche und die Sanskrit-Sprache, indem ſie ſagen können *ἔκοντα δυοῖν δέοντα* für acht und neunzig, ûnavinçati, ûnatrinçat (verminderte zwanzig, verminderte dreißig) für neunzehn, neun und zwanzig; aber der Reihe ihrer Zahlzeichen ſind dieſe Formen der Darſtellung fremde geblieben. Ähnlich finden ſich auch, zumal in Afrika und Amerika, Sprachen, welche in der Reihe ihrer Zahlworte die Reihe der Lateiniſchen Zahlzeichen darſtellen, z. B. die ſogenannten Falatiga-Araber und Fulah's in Afrika, welche von eins bis fünf zählen, und dann fortfahren fünf und eins, fünf und zwei u. ſ. w. bis zehn [9]. Ebenſo die Amerikaniſchen Völker, welche nach Hand und Fuß zählen [10]. Lächerlich aber iſt es, daraus, daß ein Volk für ſechs ſagt fünf und eins, zu ſchließen, dieſes Volk ſei ſo roh, daß es nicht weiter als bis fünf zählen könne. Und doch finden ſich dergleichen geiſtreiche Bemerkungen,

---

man vorn das Digamma annimmt. (*κοσι* iſt Bildungsendung, entſprechend dem *κοντα* in den folgenden). Im Armeniſchen ſind zwei und zwanzig ganz verſchiedene Worte (aber ebenſo auch vier und vierzig). Ganz eigenthümlich bilden die Semitiſchen Sprachen dieſes Wort; während nämlich die Namen der Zehner von dreißig bis neunzig die Pluralformen der entſprechenden Einer ſind, iſt zwanzig Pluralform von zehn; Hebräiſch עֶשְׂרִים, Aramäiſch עֶשְׂרִין, ܥܣܪܝܢ, Arabiſch عِشْرُونَ, Aethiopiſch ĕsrâ (für ĕsrân, wie auch die folgenden). Dieſes ſind entweder urſprünglich Dualformen von zehn, עשר etc. geweſen, und erſt ſpäter den folgenden dreißig, vierzig analog modificirt, oder die Formen ſind umgekehrt ſchon da geweſen, bevor die Sprache den Unterſchied zwiſchen Dual und Plural kannte. Die Dualvorſtellung liegt wenigſtens ſicher zu Grunde, weil der wirkliche Plural gar keinen Sinn giebt.

9) J. S. Vater im Königsberger Archiv für Philoſ., Theol., Sprachk. u. Geſch. Bd. I. (1812) S. 51. 60. Über dieſelbe Erſcheinung bei andern Afrikaniſchen Völkern ſiehe Rüdiger Geſch. d. menſchl. Sprache Th. I. §. 217. 219. 231. 232. 240. 247.

10) Humboldt a. a. O. S. 211. Rüdiger §. 275. 279. 283.

namentlich in älteren Büchern [11]). Eine leiſe Spur des pentadiſchen Syſtems bei den Griechen iſt uns in dem Verbum πεμπάζειν [12]) (πεμπε = πέντε) aufbehalten.

Ein Vigeſimalſyſtem oder Fortſchreiten von zwanzig zu zwanzig, mit Überſpringung der ungeraden Vielfachen von zehn, findet ſich gleichfalls bei vielen Völkern, in Europa freilich nur in einigen wenig bekannten Dialekten, z. B. in dem Kymriſchen in Wales, und etwas weniger conſequent in dem Baskiſchen Dialekte [13]). Eine Spur davon iſt noch in dem Franzöſiſchen quatre-vingt geblieben, wovon quatre-vingt-dix ebenſo gebildet wird, wie quatre-vingt-deux, das heißt, das ungrade Vielfache von zehn, hier neunzig, wird als Periodenabtheiler überſprungen und die Zahlen werden ohne neue Abtheilung von achtzig bis hundert fortgezählt. Daſſelbe geſchieht, aber ſchon mit einem eigenen Zahlworte für ſechzig, bei ſiebzig durch den Ausdruck soixante-dix; das Zahlwort soixante aber, als Ableitung von six, gehört dem Decimalſyſteme an, wogegen quatre-vingt, und ebenſo die ſeltneren Formen quinze-vingt, six-vingt, sept-vingt, huit-vingt treu ausgeprägte Formen des Vigeſimalſyſtems ſind; und der Celtiſche Dialekt in der Bretagne kennt, dem quatre-vingt analog, auch daou-ugent (deux-vingt) und tri-ugent (trois-vingt). Am meiſten verbreitet ſind aber die Vigeſimalſyſteme in Amerika, wo viele Völker die Zahl zwanzig allein als Periodenabtheiler gebrauchen, und conſequent alle ungraden Vielfachen von zehn, analog den übrigen zwiſchen je zwei Zwanzigern liegenden Zahlen, durch Addition von zehn bilden, z. B. 20 + 10, 40 + 10 u. ſ. w. Ja dieſe Völker ſind darin ſo conſequent, daß ſie ſelbſt bei hundert keinen Abſchnitt machen, ſondern, regelrecht genug, erſt für vierhundert, als Quadrat von zwanzig, ein neues Wort gebrauchen, mit dem ſie dann wieder bis achttauſend, dem Cubus von zwanzig, die Reihe fortbilden [14]). Bei den Azteken in Mexico iſt das Vigeſimalſyſtem der Sprache auch in die Zahlengraphik überge-

---

11) Huet demonstr. evangel. p. 295. Americani Topinambae nullos supra quinque numeros *norunt;* unicam scilicet manum numerando adhibere soliti. Vergl. Humboldt a. a. O. S. 209 (Note).

12) Hom. Od. IV, 412. Apoll. Rhod. Argon. II, 975. u. a.

13) Humboldt a. a. O. S. 209. 210.

14) S. die vergleichenden Sprachtabellen in Vater Proben deutſcher Volksmundarten S. 374. 375. Humboldt a. a. O. S. 212.

gangen; ſie haben einfache Zeichen für 20, 400, 8000; daneben aber auch für die Zwiſchenperioden von 5, 10, 15, ſo daß alſo das urſprüngliche Vigeſimalſyſtem von dem dekadiſchen und pentadiſchen durchbrochen wird, wie bei den Römern das dekadiſche von dem pentadiſchen.

Nach dieſen allgemeinen Betrachtungen wollen wir auf die wirklich vorhandenen Zahlzeichenſyſteme derjenigen Völker, welche uns zunächſt intereſſiren, einige ſpecielle Aufmerkſamkeit verwenden, und zwar vor Allen auf die der Semiten, Griechen und Römer. Die Semiten gebrauchen bekanntlich zur Bezeichnung der Zahlen die Buchſtaben ihres Alphabets in der urſprünglichen alten Reihenfolge, in welcher das Alphabet der Hebräer, Syrer und Samaritaner ſich bis auf dieſen Tag erhalten hat. Die Araber haben ſpäterhin dieſe Reihenfolge geändert, ohne aber den Zahlenwerth der einzelnen Buchſtaben zugleich zu verändern, was für ſie die Unbequemlichkeit mit ſich führt, daß ſie ihr Alphabet in zwei Reihenfolgen lernen müſſen. Die Vertheilung der Buchſtaben an die Zahlen geſchieht nun in der Art, daß die Buchſtaben von א bis ט die Einheiten von 1 bis 9, die folgenden neun Buchſtaben von י bis צ die jenen entſprechenden Vielfachen von zehn, alſo von 10 bis 90 bezeichnen. Nun bleiben aber in dem alten aus zwei und zwanzig Buchſtaben beſtehenden Alphabet nur noch vier Buchſtaben für die Zahlen von 100 bis 400 übrig, ק, ר, ש, ת. Bis hieher ſtimmen alle jene Alphabete genau mit einander überein; in der Bildung der Zahlen von 500 bis 900 aber haben namentlich Hebräer und Araber verſchiedene Ausflüchte geſucht. Die Hebräer helfen ſich auf zwiefache Weiſe, entweder unvollkommner dadurch, daß ſie die Buchſtaben ק, ר, ש, ת additiv zuſammen ſtellen, ſo daß z. B. תר $400 + 200 = 600$ bedeutet, ſo daß ſie 900 nicht anders als durch drei Zeichen ausdrücken könnten; oder ſie verwenden zur Bezeichnung der noch übrigen fünf Zahlen die fünf Finalzüge der Buchſtaben צ פ נ מ כ, nämlich ץ ף ן ם ך; doch geſchah dieſes wohl erſt ſpäterhin. Das erſtgenannte Hilfsmittel, die additive Zuſammenſtellung der vier letzten Buchſtaben, haben auch die Araber angewandt; ſpäterhin aber haben ſie, gleich wie die Hebräer, dieſer unvollkommenen Methode eine vollkommnere ſubſtituirt, die aber von der Hebräiſchen ganz abweicht. Die Araber haben nämlich die verſchiedene Modification der Ausſprache einiger Buchſtaben des alten Semitiſchen Alphabets, von der ſich ſchon im Hebräiſchen Spuren zeigen, bereits in die Schrift aufgenommen, indem

ſie die beiden Ausſprachen eines Zeichens durch einen oder mehrere über oder unter dem Buchſtaben angebrachte Puncte andeuten, und dieſer punctirten Buchſtaben, welche ſie ziemlich uneigentlich ausländiſche (معجمة) nennen, bedienen ſie ſich zu dem vorliegenden Zwecke, ſo daß die Zeichen ث خ ذ ض ظ der Reihe nach die Zahlenwerthe von 500, 600, 700, 800, 900 erhalten, und ſie behalten dann noch das Zeichen غ für die Zahl 1000 übrig. Die zwiſchen dieſen Grenzen liegenden zuſammengeſetzten Zahlen werden durch additive Zuſammenſtellung gebildet, indem man, nach Semitiſcher Weiſe, von der größern Zahl zu der kleinern von der rechten nach der linken Seite fortſchreitet; ſo bedeutet z. B. der Ausdruck תעג oder تعج die Zahl 473, als Summa von ת, ت = 400, ע, ع = 70 und ג, ج = 3. Um nun die auf ſolche Weiſe ausgedrückten Zahlen im Contexte von den Worten gehörig zu unterſcheiden, ziehen die Araber über den ganzen Zahlenausdruck einen Horizontalſtrich, تعج, oder ſchreiben auch jeden einzelnen Buchſtaben in ſeiner Finalform ت ع ج; die Hebräer dagegen machen zwei kleine Häkchen über den letzten Zahlbuchſtaben, תעג" oder auch zwiſchen dieſelben תע"ג. Um die Tauſender auszudrücken, fangen die Hebräer wieder von א an, und unterſcheiden dieſen tauſendfachen Werth des Buchſtabens durch zwei darüber geſetzte Pünctchen, א̈. Bei zuſammengeſetzten Zahlen fallen jedoch dieſe Pünctchen oft weg, weil die von der Rechten zur Linken mit abnehmendem Werthe geordnete Reihenfolge der Zeichen über die Bedeutung keinen Zweifel geſtattet; dagegen wird bei vierſtelligen Zahlen das Zifferzeichen (") öfter wiederholt. So leſen wir z. B. in der Maſora die Zahlen א'ךל"ד 1534, אר"ט 1209 und andere. Bei den Arabern, welche überhaupt die Zahlen gern mit Zahlworten ausſchreiben, beſinne ich mich nicht Zahlen über das erſte Tauſend hinaus nach dieſem Syſtem bezeichnet gefunden zu haben; für eintauſend aber haben ſie, wie bemerkt, das Zeichen غ, z. B. غثمب 1542, غمج 1043. Kleinere Zahlen dagegen bieten uns unter Andern Abulfeda's verſchiedene geographiſche Tafeln dar, welche, beiläufig geſagt, in allen bisherigen Ausgaben durch eine Unzahl von Druckfehlern entſtellt ſind, ſo daß Länder, die man nach dieſen Angaben der Lage einzelner Städte in Graden und Minuten conſtruiren wollte, oft eine ziemlich befremdende Geſtalt annehmen würden.

Dieſe Methode der Zahlenbezeichnung war durch alle Semitiſchen Stämme verbreitet, und hat ſich ſelbſt bei den Arabern noch

neben dem von Indien oder Perſien her eingedrungenen vollkommenen Syſtem mit Stellenwerth erhalten. Daß die Äthiopier in Abyſſinien nebſt einem völlig unſemitiſchen Schriftcharakter auch ein eigenes Syſtem von Zahlzeichen haben, iſt hier von keinem Belange; denn einerſeits iſt dieſes Volk, wie in allgemein hiſtoriſcher Hinſicht, ſo namentlich in Bezug auf Geſchichte der Wiſſenſchaften zu unbedeutend, andrerſeits ſind die Zahlzeichen deſſelben ſo ſichtbare Entſtellungen der Griechiſchen Buchſtaben, daß über den hiſtoriſchen Urſprung derſelben kein Zweifel obwalten kann, und wahrſcheinlich ſind ſie erſt mit dem Chriſtenthum und der neuteſtamentlichen Literatur dorthin eingewandert. Der ſicherſte Beweis für das hohe Alter des Zahlenwerths der Semitiſchen Buchſtaben iſt der, daß die Griechen dieſen Zahlenwerth ſchon zugleich mit den Buchſtaben von den Phöniziern erhielten. Auf einen Phöniziſchen Urſprung des Griechiſchen Alphabets deuten einerſeits alle alten Traditionen, andererſeits trägt das Griechiſche Alphabet noch ſo unverholen die Wahrzeichen Semitiſcher Herkunft zur Schau, daß nicht nur die Reihenfolge und die Namen der Buchſtaben noch ganz Semitiſch ſind, und zwar letztere in der Aramäiſchen Form in dem von den Grammatikern ſogenannten status emphaticus oder demonstrativus, mit dem Ausgange auf â (אָ), ſondern auch die Figuren zum Theil noch jetzt, noch mehr aber in alten Inſchriften, mit den alten Phöniziſchen und den dieſen ähnlichen Samaritaniſchen ziemlich übereinſtimmend ſind, nur daß ſie in der Regel, angemeſſen der von der Semitiſchen abweichenden Gewohnheit der Griechen, von der Linken zur Rechten zu ſchreiben, umgekehrt ſtehen. So iſt z. B. das Griechiſche P das umgekehrte Samaritaniſche, welches den Kopf zur Linken, alſo auch vorwärts, kehrt, ᑫ; eben ſo ſind B, Γ, E, K, L faſt nicht weiter verändert, als daß ſie ſich umgewandt haben. Die dem Semitiſchen Organ eigenthümlichen Gutturalbuchſtaben א ה ח ע ſind im Griechiſchen Munde in die entſprechenden Vocale α, ε, η, o, zum Theil aber mit Beibehaltung der Namen, übergegangen. Das Semitiſche samek, ס, (Aramäiſch semkath) erſcheint im Griechiſchen verhärtet als ξ mit eigenthümlichem Namen, wenn nicht vielleicht der Name ξῖ ſelbſt aus dem Semitiſchen sîn oder schîn mit Abwerfung des n herzuleiten iſt; dann wäre weiter nichts geſchehen, als daß die beiden Buchſtaben sîn und samek ihre Stellen vertauſcht hätten. Denn daß der Name des samek, durch eine leichte Transpoſition in *σίγμα* umgewandelt, an der Stelle des Semitiſchen sîn wieder erſcheint, iſt

Thatſache [15]). In Hinſicht des Zeichens ſind in dem Griechiſchen *Σίγμα* beide Semitiſche Buchſtaben vermiſcht, indem C, σ aus dem Semitiſchen samek, ס, dagegen Σ, ς aus dem sîn, ש, alt-Phöniziſch W entſtanden ſind. Nur drei Buchſtaben des Semitiſchen Alphabets, nämlich vâv oder vau ו, zade (צ) und koph (ק) finden wir im Griechiſchen Alphabete nicht wieder. Indeß ſtellt ſich hier die intereſſante Thatſache heraus, daß wenigſtens zwei dieſer Buchſtaben, nämlich vâv und koph, welche in Folge des abweichenden Sprachcharakters in die Wortſchrift der Griechen nicht übergegangen oder doch als unnöthig frühe daraus verſchwunden ſind, ſich nichtsdeſtoweniger als Zahlzeichen an ihrem Platze und mit ihren echt Semitiſchen Namen erhalten haben. Beide Zeichen, ſo wie noch ein drittes, von dem wir unten ſprechen werden, führen den Titel *ἐπίσημον*, Stellvertreter, und wir finden das vâv wieder zwiſchen ε und ζ als *ἐπίσημον βαῦ* für die Zahl ſechs, das koph als *ἐπίσημον κόππα* oder *κοφῆ* [16]) zwiſchen dem π und ϙ für die Zahl neunzig. Nur das als Buchſtabe ebenfalls verlorene Zade iſt wenigſtens an ſeiner Stelle durch kein *ἐπίσημον* erſetzt worden, ſondern ſein Platz iſt ganz leer geblieben. Dieſes Ausfallen eines Zeichens aus der

---

15) Böckh, die Staatshaushaltung der Athener, Berlin, 1817. Th. 2. S. 386. nimmt an, daß alle Ziſchlaute ihre Plätze vertauſcht haben. „Das Sain (ז) iſt das Xi (Ξ); das Tſade (צ) Zeta (Z); das Samech (ס) Sigma (Σ), wie ſchon die Namen beweiſen; das Schin und Sin aber nichts anderes als der rohe, nur im Doriſch-Aeoliſchen Dialekt übrig gebliebene Ziſchlaut, der wahrſcheinlich wie Sch klang und San genannt wurde.“ Was der gelehrte Verfaſſer hier über Xi und Zeta ſagt, iſt ganz gewiß nicht richtig; der Übergang des Namens zādê, צָדֵי in *Ζῆτα* iſt unnatürlich und ohne Analogie; dagegen ſind die Namen *Ζῆτα* und Sain, ſo verſchieden ſie auch ausſehen, ſicher identiſch; denn *Ζῆτα* iſt nichts anderes, als die Aramäiſche Femininalform von sain, ܙܝܢܬܐ mit occultirtem n vor t; ganz wie ܡܕܝܢܬܐ (Medînto) geſprochen wird Medîto, ſo iſt ܙܝܢܬܐ (Sainto, wo das o ſtatt a ſpäterer Syriasmus iſt) Saito geſprochen worden. Demnach wird das Semitiſche Sain ſowohl an ſeinem Platze, als auch mit ſeinem Namen durch das Griechiſche *Ζῆτα* vertreten; es entſpricht alſo weder das Sain dem ξῖ, noch dem *Ζῆτα* das Zade; gegentheils iſt das letztere wahrſcheinlich ſpurlos aus dem Griechiſchen Alphabete verſchwunden.

16) Es führt auch den von der Geſtalt hergenommenen Namen *ἀντίῤῥῶ*. S. die Tabelle bei Montfaucon Palaeogr. Graeca p. 122, und die Erläuterung dazu p. 132.

Reihe der Zahlbuchſtaben hat für das Zahlenſyſtem die Folge gehabt, daß von neunzig an, welche Zahl eben an dem Semitiſchen Zade haftet, die Griechiſchen und Semitiſchen Zahlen nicht mehr mit einander übereinſtimmen; während nämlich die Semiten die Hunderte mit ק, Koph, beginnen, fangen die Griechen dieſelben mit ϱ an, weil ihr κόππα die Stelle des verloren gegangenen Zade, צ, als neunzig erſetzt.

Dieſe Darſtellung ſcheint mir dem Weſen angemeſſen und natürlich zu ſein, und ſich auf hiſtoriſche Wahrſcheinlichkeit zu ſtützen. Ganz ſonderbar nimmt die Sache ſich bei Montucla aus, deſſen Worte faſt ſo klingen, als hätten die Griechen mit ſelbſtthätigem Bewußtſein ſich beſtrebt, durch Einſchaltung der ἐπίσημα ihr Zahlenſyſtem dem Semitiſchen gleichförmig zu machen, ſie hätten ſich aber nach der Einſchaltung des κόππα überzeugt, daß das doch nicht geſchehen würde, und darum das Unternehmen für die folgenden Zahlen aufgegeben, um nicht, wie Montucla ſich ausdrückt, zu viel embarras zu verurſachen [17]). Anders freilich verhält es ſich mit dem dritten ἐπίσημον. Als nämlich die Griechen zu dem von Oſten her [18]) erhaltenen Alphabete, um dem Genius ihrer Sprache zu genügen, noch fünf Buchſtaben, υ, φ, χ, ψ, ω hinzugefügt [19]), und auch dieſe als

17) Hist. des Math. T. I. p. 46. Eben dieſe komiſche Darſtellung wiederholt Mönnich, Lehrb. d. Mathem. Th. 1. Abth. 2. S. 455.

18) In der Sage, daß Kadmus die Schrift nach Griechenland gebracht habe, ſcheint nichts weiter zu liegen, als daß die Schrift orientaliſchen Urſprungs iſt. Denn auffallend iſt das Zuſammentreffen, daß im Semitiſchen קדם, kédem, (in der Flexion kadmo) Oſten bedeutet. Alſo heißt wohl in dieſer Sage der Ausdruck „von Kadmos“ nichts anderes, als „von Oſten her.“

19) Aus dem ererbten Zahlenwerthe der Griechiſchen Buchſtaben ſcheint deutlich zu erhellen, in welcher Geſtalt die Griechen ihr Alphabet von den Semiten erhalten haben, und es werden dadurch die Sagen, als hätte Kadmos zuerſt nur ſechszehn Buchſtaben nach Griechenland gebracht, und ſpäterhin Palamedes vier und Simonides abermals vier hinzugefügt, als ganz grundlos niedergeſchlagen. (Vergl. Plinius hist. nat. VII, 56. Suidas in d. Art. Παλαμήδης). „Was die Alten von einem Kadmiſchen, Palamediſchen und Simonideiſchen Alphabet erzählen, widerſpricht den geſunden Anſichten ſchnurſtracks,“ ſagt Böckh a. a. O. S. 387. Der an den Buchſtaben haftende Semitiſche Zahlenwerth ſtellt die Buchſtaben von A bis T als alt und urſprünglich dar; dagegen ſind υ, φ, χ, ψ, ω Griechiſchen und ſpäteren Urſprungs; von denen υ und ω ſich vielleicht auf das zu voreilig vernachläſſigte Vâv baſiren, welches auch noch vereinzelt in der Form F als Digamma erſcheint; φ und χ aber

Zahlzeichen für die noch fehlenden Hunderte angewendet hatten, ſo reichten ſie damit doch nur bis achthundert, ſo daß ihnen noch ein Zeichen für neunhundert fehlte. Für dieſe Zahl nun gebrauchen ſie abermals ein Epiſemon, gewöhnlich dieſer Geſtalt ϡ, welches ſie Σαμπῖ nennen, deſſen Zeichen und Namen zu mannigfachen Deutungen Anlaß gegeben haben. Das Zeichen, welches übrigens in mancherlei Variationen erſcheint, als ϡ, ϡ, ͳ, ╥, ↑, ͳ, ϡ, λ, ſcheint in allen dieſen verſchiedenen Geſtaltungen auf ein verunſtaltetes und halb oder ganz umgewandtes Semitiſches ש (sîn oder schîn) hinzuweiſen, und für dieſe Deutung deſſelben entſcheidet ſich auch Böckh [20]), welcher mit Recht bemerkt, daß der Name Σαμπῖ weiter nichts bedeute als Σὰν, und daß der zweite Theil deſſelben bloß von der Geſtalt hergenommen ſei, in welcher man eine Verſchlingung der Buchſtaben C und Π zu ſehen glaubte. Das Σὰν, welches gewöhnlich für gleichbedeutend mit dem Σίγμα gehalten wird [21]), hält Böckh für einen von demſelben verſchiedenen rauheren Ziſchlaut; vielleicht iſt uns in den Griechiſchen Buchſtaben Ξῖ und Σὰν die doppelte Ausſprache des Semitiſchen ש als schîn und sîn aufbehalten. Ganz leer geblieben war aber oben die Stelle des Semitiſchen Zādé, und ſo ließe ſich erwarten, daß auf eine ſolche Schadloshaltung durch Aufnahme in die Zahlenreihe gerade dieſer Buchſtabe Anſprüche hätte machen können, wofür ſich auch viele, namentlich ältere Stimmen erhoben haben, wie Joſeph Scaliger, Wallis, Montfaucon, Heilbronner [22]), und wenn die Angabe bei Heilbronner, daß dieſes Zeichen ϡ auch unter dem Namen τσάδδι vorkomme, auf einer haltbaren Auctorität beruht, ſo dürfte die Anſicht, das Σαμπῖ für ein Überbleibſel des Zade zu halten, leicht das Übergewicht gewinnen. Indeß weiß Montfaucon von dieſer Variante des Namens nichts, und dieſelbe

---

ſind aus der ſchon im Semitiſchen begründeten doppelten Ausſprache des pe und kaph hervorgegangen; ψ endlich iſt analoge Bildung, um in der Reihe der Labialen den Ziſchlauten ξ und ζ in der Reihe der Gutturalen und Dentalen zu entſprechen.

20) Die Staatshaush. d. Athener Th. 2. S. 385—387.

21) Vergl. Böckh a. a. O. Herod. I, 139 ſagt von den Perſern: τὰ οὐνόματα σφι ἐόντα ὅμοια τοῖσι σώμασι καὶ τῇ μεγαλοπρεπείῃ τελευτῶσι πάντα ἐς τωὐτὸ γράμμα, τὸ Δωριέες μὲν σὰν καλέουσι, Ἴωνες δὲ σίγμα.

22) *Wallis* Opera T. 1. p. 42. *Heilbronner* hist. math. p. 727. *Montfaucon* Palaeographia Graeca p. 132.

erregt auch zu leicht den Verdacht, daß ſie ſelbſt erſt der Hypotheſe nachgebildet iſt. Schließlich bemerke ich noch, daß die Stellung dieſes Zeichens am Ende der ganzen Reihe wohl darauf hindeutet, daß daſſelbe erſt ſpäter, und zwar nach der Einführung der echtgriechiſchen Buchſtaben υ bis ω, als Zahlzeichen gebraucht worden iſt, und, was von βαῦ und κόππα nicht gilt, einem bereits klar gefühlten Bedürfniſſe ſeine Entſtehung verdankt.

Die Zeichen der beiden andern ἐπίσημα ſind in Manuſcripten und Drucken ebenſo ſchwankend, wie die des σαμπῖ. Das ἐπίσημον βαῦ hat in der Regel die Geſtalt des ſogenannten στίγμα, ϛ, mit dem es häufig und noch in neueſter Zeit völlig mit Unrecht iſt verwechſelt worden; noch Aſt in ſeiner Ausgabe der Theologumena Arithm. und der Arithmetik des Nikomachus ſchreibt, das ϛ fälſchlich auflöſend, durchgehend στ dafür, und wenn auch vermöge des Zahlenwerths beider Buchſtaben aus einer ſolchen Schreibart eben keine Zweideutigkeit entſtehen kann, ſo iſt es doch, abgeſehen davon, daß es hiſtoriſch falſch iſt, unnatürlich und dem Charakter des Griechiſchen Syſtems unangemeſſen, eine einfache Zahl, wie ſechs, durch zwei Zeichen auszudrücken. Varianten für ϛ ſind S, C, F, ⊑ und ähnliche. Die gewöhnliche Form ϛ iſt das umgewandte Zeichen des altſemitiſchen vâv, Samaritaniſch ࠅ. Eben ſo iſt das Zeichen κόππα, mit umgewandtem Kopfe, das Semitiſche Koph, (ק, P); es erſcheint nämlich in den Geſtalten ϙ ϙ 9 ϙ und mehr abgeleitet ϟ ϟ ϟ.

Faſſen wir nun das bisher Geſagte zuſammen, ſo geſtalten ſich die Zahlenreihen der Hebräer, Araber und Griechen auf folgende Weiſe:

Erſte Klaſſe. Einer, πυθμένες.

1.	א —	ا —	α	
2.	ב —	ب —	β	
3.	ג —	ج —	γ	
4.	ד —	د —	δ	
5.	ה —	ه —	ε	
6.	ו —	و —	ϛ	(ἐπίσημον βαῦ)
7.	ז —	ز —	ζ	
8.	ח —	ح —	η	
9.	ט —	ط —	ϑ	

Zweite Klaſſe. Zehner.

10. י — ي — ι
20. כ — ك — κ
30. ל — ل — λ
40. מ — م — μ
50. נ — ن — ν
60. ס — س — ξ
70. ע — ع — ο
80. פ — ف — π
90. צ — ص — ϟ (ἐπίσημον κόππα)

Dritte Klaſſe. Hunderter.

100. ק — ق — ϱ
200. ר — ر — σ
300. ש — ش — τ
400. ת — ت — υ
500. ך — ث — φ
600. ם — خ — χ
700. ן — ذ — ψ
800. ף — ض — ω
900. ץ — ظ — ϡ (ἐπίσημον σαμπῖ)
1000. غ

Ähnlich, wie die Araber, unterſcheiden die Griechen dieſe Buchſtaben, wenn ſie Zahlenausdrücke ſind, durch einen über dieſelben gezogenen Horizontalſtrich, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\overline{\varrho\varkappa\delta}$, nicht, wie oft fälſchlich bemerkt worden iſt, durch einen Acutus ά. Indeß finden ſich Zahlen in alten Inſchriften, welche durch kein Abzeichen von dem Contexte unterſchieden werden. Wie die Griechen die Zahlen von tauſend aufwärts bezeichneten, habe ich oben ſchon im Vorbeigehen berührt. Die Buchſtaben von α bis ϑ mit einem unten angebrachten kleinen Striche, wie ͵α, ͵β, ͵γ u. ſ. w., dienten zur Bezeichnung der Zahlen von tauſend bis neuntauſend, nicht aber höher hinauf, wie ebenfalls oft fälſchlich angeführt wird, als hätte man 10000 durch ͵ι, 20000 durch ͵κ, 100000 durch ͵ϱ u. ſ. w. ausgedrückt [23]). Ich

23) Heilbronner p. 728 führt zwar von der letzteren Bezeichnungsmethode Beiſpiele aus Geminus (Elem. astron. c. XV) an; da ich aber das letztere Werk nicht zur Hand habe, mag ich über die Zuverläſſigkeit der beigebrachten Beiſpiele

muß hier eine Bemerkung machen, welche wichtig iſt, weil ſie in die ganze Vorſtellungsweiſe der Griechen eingreift, die nämlich, daß die Griechen bei der Abtheilung größerer Zahlen nicht, wie wir, von Tauſenden zu Tauſenden, oder nach unſerer Art zu ſprechen, von drei zu drei Stellen, ſondern von Myriaden zu Myriaden, alſo von vier zu vier Stellen fortſchreiten, ſo daß ſie z. B. die Zahl 531789643 nicht, wie wir, ſo abtheilen 531,789,643, ſondern ſo 5,3178,9643. Die Art der Abtheilung iſt in ihre Vorſtellungsweiſe weſentlich übergegangen. Demgemäß nennen ſie die niedrigſte Abtheilung oder die vier unterſten Stellen Einheiten, *μονάδες*, die vier folgenden Myriaden, *μυριάδες*, die vier nächſtfolgenden *μύριαι μυριάδες*, dann *μυριάκις μύριαι μυριάδες* u. ſ. w. f. Dieſer Vorſtellungsweiſe analog iſt ihre Zahlenbezeichnung. Bei ͵ϑ, 9000, hört die Reihe der Einheiten auf, und die größte Zahl dieſer Reihe iſt ͵ϑϡϟϑ d. h. 9999 Einheiten. Nun beginnt die zweite Klaſſe oder die Reihe der Myriaden mit einer neuen Bezeichnung; ſie bedienen ſich nämlich des erſten oder der beiden erſten Buchſtaben des Wortes Μυριὰς, alſo Μ oder Μυ., welchen Zeichen die bisher betrachteten Einheitszahlen als Factoren entweder vorgeſtellt, oder übergeſchrieben, oder auch wohl hinten angehängt werden. Wirkliches Zahlzeichen iſt dieſes Μ indeß nur in dem zweiten Falle, in welchem die multiplicirende Einheitszahl über daſſelbe geſchrieben wird, wie immer bei Eutokius zu Archimed's Kreismeſſung; im erſten und dritten Falle iſt es eigentlich nur Abbreviatur der Worte Μυριὰς oder Μυριάδες, und dieſe Worte werden daher auch oft ganz ausgeſchrieben. So drückt z. B. Pappus (Fragmente des zweiten Buchs, Satz 23) die Zahl 18000 ſo aus: *μυριάδες* $\overline{α}$ *μονάδες* $\overline{͵η}$. Ich erwähnte oben ſchon, daß das Myriadenzeichen auch oft ganz wegfällt und durch einen bloßen Punct, der die Myriaden von den Monaden ſcheidet, erſetzt wird. So ſchreibt Diophant IV, 29. die Zahlen ρν.͵ζϡπδ für 1507984, κϛ.͵βρμδ für 262144, und V, 11. ͵αϡϟα.͵εσιδ für 19915214, und ſo oft. Dieſe Auslaſſung des Myriadenzeichens iſt ein Schritt zur Erfindung des Syſtems mit Stellenwerth. Auf ähnliche von den Griechen gemachte Schritte werden wir bald öfters ſtoßen. Aber es war ihnen nicht zugedacht, dieſe große mächtig in

---

nichts entſcheiden. Bei Ariſtarch, Archimedes, Pappus, Diophantus, Eutokius u. A. findet ſich keine Spur davon.

in die Wiſſenſchaft und in das Leben eingreifende Erfindung zu vollenden.

Es wird noch eine andere Methode, die Myriaden und höheren Zahlen zu bezeichnen, erwähnt, welche ich auch oben ſchon berührte, die ich aber durch keine Auctoritäten Griechiſcher Schriftſteller belegen kann. Camerarius[24]) nämlich, nachdem er die Zahlbuchſtaben für die Einer, Zehner, Hunderter und Tauſender in der gewöhnlichen Weiſe dargeſtellt hat, ſagt, die Myriaden und folgenden Zahlen würden ſo bezeichnet:

α̈	β̈	γ̈	δ̈	ε̈	ϛ̈	ζ̈	η̈	ϑ̈
ϊ	κ̈	λ̈	μ̈	ν̈	ξ̈	ο̈	π̈	ϟ̈
ϱ̈	σ̈	τ̈	ῠ̈	φ̈	χ̈	ψ̈	ω̈	ϡ̈
͵α̈	͵β̈	͵γ̈	͵δ̈	͵ε̈	͵ϛ̈	͵ζ̈	͵η̈	͵ϑ̈

ſo daß alſo α̈ eine Myriade, ϊ zehn, ϱ̈ hundert, ͵α̈ tauſend Myriaden oder zehn Millionen bezeichnet. Dem vorigen analog wird nun die ganze Zahlenreihe noch einmal mit vier Puncten oben, und dann noch mit ſechs Puncten durchgemacht; demnach bedeutet, wenn wir nur das erſte Glied jeder Zeile betrachten,

α̈ μύριαι μυριάδες = 100 Millionen
ϊ δεκάκις μύριαι μυριάδες = 1000 Millionen
ϱ̈ ἑκατοντάκις μύριαι μυριάδες = 10000 Millionen
͵α̈ χιλιάκις μύριαι μυριάδες = 100000 Millionen

---

24) De Graecis Latinisque numerorum notis, et praeterea Saracenicis seu Indicis cum indicio elementorum ejus, quam Logisticen Graeci nominant (quae est methodus conficiendarum Rationum) et vocabulorum artis interpretatione et aliis quibusdam ad hanc pertinentibus. Accesserunt explicatiunculae Arithmetices doctrinae Nicomachi et alia quaedam, ad contemplationem scientiae istius pertinentia: studio Joachimi Camerarii Papeberg: 8. Ohne Ort und Jahr und ohne Seitenzahlen. Unter der erſten Dedication an Sebastianus Theodoricus Vinesimus ſteht das Datum: Lipsiae D. XXV. M. Sextilis Anno Christi Jesu M. D. LXIX. Unter der zweiten an Johannes Ulrichus Zasius: V. Calend. Decembris. Anno Christi M. D. LVI. Die hieher gehörige Stelle ſteht in dem Tractatus Logistices. Prima part. Στοιχεῖα quibus numeri designantur. — Dieſelbe Methode berührt Samuel Tennulius in ſeinen Notae in librum quartum Jamblichi Chalcid. de arithmetica Nicomachi introductione. Daventr. 1667. 4. p. 157—159. (Befindet ſich auch unter beſonderem Titel bei Tennulius Ausgabe des Jamblichus, Arnhem. 1668. 4.) Vergl. Humboldt a. a. O. S. 224.

und die folgende Klaſſe

α̈̈ μυριάκις μύριαι μυριάδες = 1 Billion

u. ſ. w.

Camerarius führt nicht die Quelle an, aus welcher er dieſe Bezeichnungsart entnommen hat. Es läßt ſich indeß nicht annehmen, daß die Sache ganz aus der Luft gegriffen wäre; dazu kommt noch, daß die Methode an und für ſich in ihrem conſequenten Fortſchreiten von Myriaden zu Myriaden einen ganz Griechiſchen Charakter zeigt. Indeß iſt dieſelbe gewiß wenig, vielleicht erſt ſehr ſpät, in den Gebrauch gekommen. Montfaucon hat in einem Manuſcript der Pariſer Bibliothek vom zwölften Jahrhundert dieſe Methode, aber nicht weiter als für die einfachen Myriaden, alſo von α̈ bis ͵ϡ̈ angewandt gefunden. Ich will ſeine Worte hieher ſetzen: Notae numerales sive literae numeris designandis constitutae, a Grammaticis et Lexicariis adferuntur; ita ut α′ *unum* significet, β′ *duo*, γ′ *tria* etc. ut vel tirones norunt. Pro denario autem numero, ι′ *decem*, ια′ *undecim* etc., pro centenario ϱ′ *centum*, σ′ *ducenti* etc. (Über α′ ſtatt ᾱ ſiehe oben). Pro millenario ͵α *mille*, ͵β *bis mille* etc. Cum hac autem numerandi methodo hactenus consentit Codex Regius 2724. qui anno mundi 6191. secundum Graecorum calculum; Christi autem 1183. scriptus est, et quidem a perito Calligrapho, qui Aerarii generalis Constantinopolitani Acta evolvere, ex iisque varia excerpere se profitetur. Is autem myriadas sive dena millia longe alia ratione notat, quam solent Grammatici: illi quippe dena millia sic ͵ι, vicena millia ͵κ, 30000 ͵λ notant. Hic autem sic, α̈ dena millia sive myriadem unam, β̈, 20000 sive myriadas duas, γ̈, 30000 sive myriadas tres, ϊ, 100000 sive decem myriadas, ια̈ 110000 sive undecim myriadas, ιβ̈, 120000 sive duodecim myriadas, et sic de reliquis; ita ut quando plures numeri simul ponuntur, duo puncta postremae semper literae numerali superscribantur; ϱ̈ autem centum myriadas, sive 1000000 significat, ϱϊ centum et decem myriadas, ϱια̈ centum et undecim myriadas, et sic de reliquis; σ̈ ducentas myriadas, τ̈ trecentas etc. Millia autem myriadum sic notantur ͵α̈, mille myriades; ͵β̈ bis mille myriades etc. Si autem millenario alii numeri adjungantur, duo puncta postremo numero superscribuntur, verbi gratia ͵ϡ ϡ ϟ ϡ̈ novem

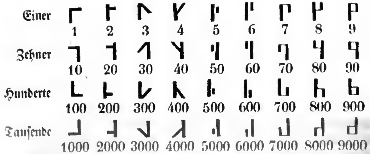
mille nongentae nonaginta novem myriades: ubi semper intelligas myriadas singulas dena millia significare. Ubi autem ultra postremum hunc numerum, videlicet ad myriadas myriadum, pervenitur, tunc plenis vocibus, non autem notis, numeratur sic, μύριαι μυριάδες. Nec ultra numeros persequitur ille, quisquis fuerit, Calligraphus [25]). Dieſe Methode unterſcheidet ſich alſo von der bei Camerarius aus einander geſetzten in nichts weiter, als in der Ausdehnung. Montfaucon fährt fort: Eam quidem numerandi rationem memorat Joachimus Camerarius, et post eum Georgius Henischius in opusculo de Numeratione multiplici. Das Werk von Heniſchius habe ich nicht geſehen; nur auf dieſes aber kann es ſich beziehen, wenn Montfaucon ſagt, er habe (es bleibt unbeſtimmt, welcher von Beiden) darin gefehlt, daß er von hundert Myriaden an, ſowohl fälſchlich Myriaden durch millia wiedergegeben, als auch alle folgenden Zahlen in unſern Ziffern um eine Null zu klein geſchrieben habe. Bei Camerarius befindet ſich dieſer Fehler nicht. Schließlich verſichert auch Montfaucon, daß er die Methode des Camerarius ir keinem einzigen Codex gebraucht gefunden habe.

Eben ſo problematiſch ſteht ein Zahlenſyſtem da, welches ich bis jetzt nur aus Heilbronner [26]) kenne, und welches ſich im Weſentlichen von der gewöhnlichen Griechiſchen Manier nicht ſehr unterſcheidet, nur daß hier ſtatt der Buchſtaben willkührliche Zeichen gewählt ſind; darin aber kann man bei dieſem Syſteme einen gewiſſen Fortſchritt finden, daß jeder der Pythmenes mit ſeinen Vielfachen in die Potenzen von zehn eine durchgehend conſequente Analogie beobachtet. Der weſentliche Beſtandtheil dieſer Zahlen iſt ein ſenkrechter Strich, der allen gemein iſt; an dieſen werden die individuellen Unterſchiede in der Art angeſetzt, daß dieſer Appendix und Charakter der einzelnen Zahl bei den Einheiten oben rechts, bei den Zehnern oben links, bei den Hunderten unten rechts, bei den Tauſenden unten links zu ſtehen kommt. Demnach hat man eigentlich nur neun Zeichen ſich zu merken, um alle übrigen leicht zu erkennen. Die von Heilbronner gegebene Tabelle ſieht etwa ſo aus:

---

25) Montfaucon Palaeogr. Gr., Recens. p. XII. XIII.

26) Hist. math. p. 735—737.



Nun beſteht das Eigenthümliche dieſer Methode darin, daß bei zuſammengeſetzten Zahlen der Verticalſirich nur einmal geſchrieben und an dieſen alle charakteriſtiſchen Merkmale der einzelnen Ziffern angehängt werden. Heilbronner giebt folgende bei ihm zum Theil ſehr verſtümmelte Beiſpiele:

bedeutet die Zahl 5548

bedeutet die Zahl 2454

bedeutet die Zahl 3970

bedeutet die Zahl 1586.

Da jede Potenz von zehn ihr charakteriſtiſches Merkmal an einer anderen Stelle hat, ſo können ſich in der zuſammengeſetzten Zahl dieſe Merkmale niemals gegenſeitig ſtören. Für zehntauſend giebt Heilbronner die Wiederholung des Zeichens für tauſend, alſo , wie man das in den Zuſammenhang gebracht hat, weiß ich nicht. Die Erfindung iſt geiſtreich, aber wahrſcheinlich iſt ſie Erfindung geblieben. Heilbronner ſelbſt drückt ſich ganz unbeſtimmt darüber aus, und beruft ſich nur auf **Johannes Noviomagus** und auf **Hostus** p. 561, ohne die Werke beider Auctoren zu nennen, auf die er ſich bezieht. Ich habe in den hier vorhandenen Werken beider Schriftſteller nichts darüber finden können, und auch ſonſt über den Gebrauch und den Urſprung dieſer Methode nichts erfahren.

Dagegen iſt uns von dem Grammatiker Herodian [27]) ein anderes, wie es ſcheint, altes Griechiſches Zahlenſyſtem aufbewahrt worden, inſofern analog dem Römiſchen, als es ſich verhältnißmäßig

---

27) Siehe in **Stephani thesaurus linguae Graecae.**

weniger Zeichen bedient, um alle Zahlen zuſammenzuſetzen. Dieſes Syſtem hat nämlich nur ſechs einfache Zeichen, I, Π, Δ, H, X, M, welche der Reihe nach die Zahlen 1, 5, 10, 100, 1000, 10000 vorſtellen; dieſe Zeichen ſind mit Ausnahme des erſten, welches der bekannte einfache Einheitsſtrich iſt, die Anfangsbuchſtaben der entſprechenden Zahlworte; bei Π πέντε, Δ δέκα, X χίλιοι und M μύριοι liegt das am Tage; dagegen erwartet man E (ἕκατον) für H. Aber ſchon Wallis [28]) hat hier das Richtige geſehen, und ſeine Bemerkung, daß das Zeichen H, welches durch die Stellung im Alphabet und durch ſeinen Namen dem Semitiſchen Chet, ח, entſpricht, urſprünglich das Zeichen für den Spiritus asper geweſen ſei, als welches es ſich auch im Lateiniſchen Alphabet wiederfindet, und daß man in alten Zeiten nicht Ἕκατον, ſondern Hεκατον geſchrieben habe, iſt durch mehre von Montfaucon beigebrachte Beiſpiele von alten Inſchriften beſtätigt worden [29]). Die Methode der Zahlenbildung mit dieſen Zeichen iſt additive Nebeneinanderſtellung bis zur viermaligen Wiederholung deſſelben Zeichens. Dann aber tritt eine multiplicative Methode ein, indem ſtatt der fünfmaligen Wiederholung das einfache Zeichen in den Buchſtaben Π = 5 hineingeſetzt wird. Der Anſchaulichkeit wegen gebe ich hier die Tabelle der Zahlen.

1.	I	11.	ΔI	21.	ΔΔI u. ſ. w.
2.	II	12.	ΔII	30.	ΔΔΔ
3.	III	13.	ΔIII	40.	ΔΔΔΔ
4.	IIII	14.	ΔIIII	50.	𐅄
5.	Π	15.	ΔΠ	60.	𐅄Δ
6.	ΠI	16.	ΔΠI	70.	𐅄ΔΔ
7.	ΠII	17.	ΔΠII	80.	𐅄ΔΔΔ
8.	ΠIII	18.	ΔΠIII	90.	𐅄ΔΔΔΔ
9.	ΠIIII	19.	ΔΠIIII	100.	H
10.	Δ	20.	ΔΔ		

28) Opera T. 1. p. 44. Ob aber die Geſtalt der beiden Spiritus ⊣ und ⊢, die ſich in Manuſcripten und noch in alten Ausgaben findet (z. B. in der Baſeler Ausg. von Ptolemäus Σύνταξις), eine Zertheilung des alten Zeichens H in zwei Hälften iſt, wie Wallis vermuthet, muß wohl dahingeſtellt bleiben.

29) Palaeogr. p. 129. Olim vero, ut videas infra, pro aspiratione tantum usu veniebat; atque ε tam correptum quam extensum, per E expressum observatur in Jonicis inscriptionibus. Vergl. die Inſchriften p. 135 HOIΔE für οἵδε, HO für ὅ, HOΔOI für ὁδῷ, HEPOΔO für Ἡρώδου, HOI für οἵ, u. ſ. w.

200.	HH	1000.	X
300.	HHH	2000.	XX u. ſ. w.
400.	HHHH	5000.	𐅆
500.	𐅅	6000.	𐅆X u. ſ. w.
600.	𐅅H	10000.	M
700.	𐅅HH	20000.	MM u. ſ. w.
800.	𐅅HHH	50000.	𐅇
900.	𐅅HHHH	60000.	𐅇M u. ſ. w.

Dieſe Methode findet ſich übrigens originaliter nicht mehr vor, und die Nachricht bei Herodian iſt die einzige, die wir davon haben.

Ob die Römer ihre Schrift von den Griechen, oder unmittelbar aus dem Orient erhalten haben, mag zweifelhaft ſcheinen. Das Vorhandenſein der Buchſtaben **H** = ח (nicht ה), **V** und **F** = ו, **Q** = ק [30]), von denen der erſte bei den Griechen Vocal geworden iſt, die beiden andern ſich aber nur als numeriſche Epiſema erhalten haben, ſcheint für das letztere zu ſprechen. Oder die Übertragung des Griechiſchen

30) Was Wallis T. 1. p. 45 ſagt, daß das Zeichen **Q** aus **Cv** zuſammengeſchmolzen ſei, worauf die in manchen Drucken ſich vorfindende Form Q hinzudeuten ſcheint, gleichwie **K** aus **CA**, iſt gewiß hiſtoriſch unwahr. Der ſprechendſte Beweis gegen dieſe Entſtehung des **Q** iſt der, daß das die dem **Koph** (ק) entſprechende rauhe Ausſprache deſſelben andeutende u immer dahinter geſetzt wird, alſo doppelt da ſein würde, wenn es ſchon einmal in dem Zeichen **Q** ſelbſt ſteckte. **K** dagegen iſt gar kein echt lateiniſcher Buchſtabe, ſondern der wahre Stellvertreter des Semitiſchen **Kaph** und des Griechiſchen κάππα iſt das Zeichen **C**, durch welches die Römer nicht, wie Wallis a. a. O. p. 42 behauptet, das Griechiſche γάμμα ausdrückten. (**Pro nonaginta vero ponitur** ϟ G **unde figura latinorum** G **vel G deducta est (?), antiquis latinis ignota (?) qui Graecorum** γ **per C exprimebant**). Die Reihenfolge des Römiſchen Alphabets kann hier, glaube ich, nichts entſcheiden; denn ſonſt müßte auch g dem Semitiſchen ז, Griechiſch ζ u. ſ. w. entſprechen. **K** hat ſich ebenſo wie **Y** erſt ſpäter durch Bekanntſchaft mit den Griechen in die Reihe der Lateiniſchen Buchſtaben eingeſchlichen, und Schreibarten wie **Klendas** für **Calendas**, **Krthago** für **Carthago** beweiſen nichts für ein in dem **K** verſtecktes **a**; was wollte man ſonſt daraus für Schlüſſe machen, daß die Worte κύριος ὁ θεὸς Ἰσραήλ in dem von Montfaucon **Pal. p. 224** mitgetheilten Fragmente ſo ausſehen $\overline{\text{KC}}$ O $\overline{\Theta\text{C}}$ $\overline{\text{IH}\Lambda}$. Etwas mehr hat die Hypotheſe für ſich daß **X** eine Verſchlingung von **CS** ſei; aber auch dieſe Annahme iſt unnöthig; **X** kann ebenſowohl, wie das Griechiſche Ξ eine unmittelbare Verhärtung des einfachen Semitiſchen Ziſchlauts ſein; wie es ſich umgekehrt im Italieniſchen wieder zu **S** erweicht. Vergl. über **K** und **Q**, **Prisciani de partibus orationis I, 3.**

Alphabets nach Italien muß zu einer Zeit geſchehen ſein, als die Griechen ſelbſt es noch ganz unverändert in ſeiner Semitiſchen Urgeſtalt bewahrt, und es noch nicht ihrem Sprachcharakter durch Verwandlung und Vernachläſſigung einiger, und Hinzufügung anderer Buchſtaben anbequemt hatten; nur ſo wäre das Vorhandenſein des h, v, (f), q, und das Fehlen von φ, χ, ψ, ω im Lateiniſchen erklärbar [31]). Wie dem auch ſei, ſo viel iſt als Thatſache gewiß, daß das Semitiſch-Griechiſche Alphabet auf ſeinem Übergange nach Italien die numeriſche Bedeutung ſeiner Buchſtaben verloren hat. Es findet ſich bei den Römern keine Spur von der Semitiſch-Griechiſchen Zahlenbezeichnung vor, wogegen ſie ſich eines eigenthümlichen, wahrſcheinlich in Italien urſprünglich heimiſchen, aber in vielen Stücken unvollkommenen Syſtems bedienen, eines Syſtems, das trotz ſeiner ungeheuren Mängel und ſeiner ekelhaften Weitſchweifigkeit und Unbequemlichkeit, zumal wenn es gilt größere Zahlen zu bezeichnen, ſich doch bis auf den heutigen Tag zu gewiſſen Zwecken in ganz Europa erhalten hat. Es kommt von allen bekannten Zahlenſyſtemen der Methode der ganz rohen additiven Nebeneinanderſtellung am nächſten, und iſt dem von Herodian überlieferten altgriechiſchen Syſteme nahe verwandt, wenn gleich in manchen Stücken noch unvollkommener. Mit urſprünglich vier, ſpäter ſieben Zeichen, indem man in das dekadiſche Syſtem zur Vermeidung neunmaliger Wiederholung deſſelben Zeichens das pentadiſche einſchob, ſetzt es alle Zahlen durch Addition und Subtraction zuſammen. Es iſt unnöthig, daß ich mich in eine weitläuftige Erörterung dieſes uns Allen bekannten und geläufigen Syſtems einlaſſe. Ich will ſtatt deſſen verſuchen eine Erklärung der Zeichen zu geben, in denen dieſes Syſtem ſich darſtellt, oder vielmehr eine ſchon oft berührte in voller Conſequenz durchführen. Die Zeichen C für hundert, centum, und M für tauſend, mille, haben oft zu der Vermuthung veranlaßt, als ob die Zeichen dieſes Syſtems, deren jedes in dem gewöhnlichen Schriftzuge einem Buchſtaben des Römiſchen Alphabets entſpricht, bedeutſame Anfangs-

31) Θ, ט iſt vielleicht in F erhalten, wenn dieſes nicht gleich dem Griechiſchen φ eine Modification des p, פ iſt, welches ja auch im Semitiſchen beide Ausſprachen zuläßt. Auf keinen Fall aber verdankt das F dem φ ſeinen Urſprung; denn dann würden die Römer nicht letzteres ſo conſequent durch ph übertragen. Eher iſt F neben V ein Überbleibſel des Semitiſchen Vâv, ו, wofür ſeine Stellung im Alphabete zu ſprechen ſcheint.

buchſtaben wären, und es ſind manche wunderbare Hypotheſen über die Bedeutung derjenigen Buchſtaben, welche ſich nicht ſo unmittelbar wie die beiden angeführten mit dem entſprechenden Zahlworte in Verbindung ſetzen, erſonnen worden. So ſollten z. B. die Zeichen V = 5 und X = 10 daher ihren Urſprung haben, weil V oder U der fünfte Vocal des Lateiniſchen und X oder Ξ der zehnte Conſonant des Griechiſchen Alphabets iſt; oder auch X folgt in der Reihe der Zahlen nach V, weil es auch in der Reihe der Buchſtaben dieſem folgt. D = 500 ſollte der Anfangsbuchſtabe von Dimidium ſein, um anzuzeigen, daß die Zahl D die Hälfte der Zahl M ſei, da doch dieſe Ableitung vernünftiger Weiſe bloß ſagen könnte, daß 500 die Hälfte von irgend etwas ſei, alſo danach das Zeichen D für jede beliebige Zahl ebenſo gut wie für 500 paſſen würde; oder D ſoll auch deshalb gewählt worden ſein, weil es auf C folgt. L, 50 ſollte ſeinen Urſprung daher leiten, daß N im Griechiſchen Zahlenſyſtem 50 bedeutet, und daß dieſer Buchſtabe in einigen aus dem Griechiſchen ins Lateiniſche herübergenommenen Worten (?) in der letztern Sprache in L übergeht, z. B. νύμφη, limfa. Ja ſelbſt dem einfachen Striche I der Einheit hat man dieſe Einfachheit nicht gegönnt; er mußte das i des ſeines Anfangsbuchſtaben beraubten Griechiſchen Worts μία, una, ſein. Una per i scribitur antiquo more Atticorum, qui solebant principalem nominis numeri litteram ponere, et significare numerum; ergo ἴα pro μία dicentes i scribebant [32]. Ich würde vorſchlagen, das Zeichen I lieber aus dem Arabiſchen abzuleiten, wo eins احد heißt, in welchem Worte doch wenigſtens der erſte Buchſtabe Ähnlichkeit mit I hat. Ich glaube, es geht dem Leſer an dieſer Stelle, wie oben bei dem Excerpte, welches ich aus der Histoire de l'esprit humain par Savérien mittheilte; man ſchlägt zuletzt der Sicherheit wegen Mannert's Geographie auf, um nachzuſehen, in welchem Griechiſchen Staate vor Zeiten die Stadt Rom gelegen hat. Andere haben die Figuren von der Geſtalt der Finger und Hände herleiten wollen. Aber wir wollen alle dieſe Künſteleien verlaſſen. Die einfache und naturgemäße Erklärung hat meines Wiſſens zuerſt Ramus [33], und

---

32) Priscianus de ponderibus et mensuris am Anfange. Vergl. Hugo de prima scribendi origine (ed. Trotz. Trajecti 1738) p. 301.

33) Scholae mathemat. p. 117.

etwas vollſtändiger Voſſius [34]) berührt; Ramus macht ſich die Bedeutung und Entſtehung des Zeichens M nicht klar, leitet aber das D richtig aus M ab; Voſſius dagegen verläßt ſchon bei D das Syſtem, und vermengt das pentadiſche Zeichen als ein urſprüngliches mit dem dekadiſchen. Ramus iſt, wie in andern Stücken, ſo auch hierin, unbeachtet geblieben; Voſſius Erklärung iſt dagegen bald mit mehr, bald mit weniger Conſequenz in ſpätere Werke übergegangen [35]). Die Sache ſtellt ſich ganz einfach ſo heraus. Man legte das rein dekadiſche Syſtem zum Grunde, und bezeichnete eins mit einem Striche, I, zehn mit zweien im Kreuz, X, hundert mit dreien, ſo ⊏, denen man für die folgende Potenz von zehn, für tauſend, noch in der Mitte einen parallelen Strich hinzufügte, und dann das Zeichen, vielleicht ſpäter, halb umwandte, ꟽ. Die Zeichen für eins und zehn haben ſich in ihrer urſprünglichen Geſtalt erhalten, weil ſie einfach und leicht zu ſchreiben ſind, wogegen man die beiden andern der Bequemlichkeit wegen, vielleicht erſt allmählig, abrundete, ſo daß aus ⊏ das Zeichen C und aus ꟽ theils die runderen Formen ↀ, ↀ, CIƆ, entſtanden, theils durch Verwechſelung, nachdem das Bewußtſein der Entſtehung der Zeichen verloren gegangen war, der äußern Ähnlichkeit wegen für daſſelbe der Buchſtabe m, M ſubſtituirt ward. Da man aber ſpäterhin bei häufiger werdendem Gebrauche der Zahlzeichen die Rechnung mit vier Zeichen unbequem fand, ſo kam man auf den Gedanken, in der Mitte zwiſchen je zwei dieſer dekadiſchen Zeichen ein pentadiſches einzuſchieben, und um die Geltung eines jeden derſelben auch ſchon durch die Form anzudeuten, nahm man von den Zeichen X, ⊏, ꟽ oder CIƆ die Hälften, ſo daß V (oder bei den Tuskern Λ) fünf, d. h. halb X, L funfzig oder halb ⊏ und IƆ fünfhundert oder halb CIƆ bedeutete. Dieſe letzten Zeichen ſind dann mit den ähnlichen Buchſtaben V, L, D aus Unkunde verwechſelt worden, und das gewiß ſchon frühe, da, wie wir geſehen haben, zu Priscian's Zeit das Bewußtſein derſelben ſchon aus dem Volke, ſelbſt aus den Köpfen der Gelehrten verſchwunden war. Demnach iſt die Römiſche Zahlenreihe eine doppelte,

dekadiſch	I		X		⊏ (C)		CIƆ
dazwiſchen pentadiſch		V		L		IƆ	

34) De universae mathes. natura et constit. Amst. 1650. Cap. VIII. §. 4.

35) Z. B. Dechales Cursus T. 1. p. 28.

Dieſe Deutung iſt ſo ungeheuer einfach und ungezwungen und mit einer ſolchen Conſequenz in ſich abgeſchloſſen, daß man kaum begreift, wie irgend eine andere ſich hat herausbilden können. Das aber iſt eben das Schickſal des Einfachen, daß es gewöhnlich am ſpäteſten gefunden wird. Der verbildete, vom Wege der Natur abgeirrte Geiſt hat kein Wohlgefallen an dem, was ſich als natürlich und einfach von ſelbſt darbietet; er will den Gegenſtand ſeines Wohlgefallens durch ſpitzfindiges Grübeln ſich erkaufen, und je ferner derſelbe liegt, je mühſamer der Weg dahin iſt, deſto willkommener iſt ihm das Reſultat. — Späterhin bildete man den Zeichen CIↃ und IↃ analog die Formen CCIↃↃ, CCCIↃↃↃ u. ſ. w. für 10000, 100000, und deren Hälften IↃↃ, IↃↃↃ u. ſ. w. für 5000, 50000. Doch ſind dieſe Zeichen wenig in den Gebrauch gekommen. Man bildete die höhern Potenzen von zehn, gleichwie die übrigen Vielfachen von tauſend lieber durch multiplicative Coefficienten, die man dem Zeichen CIↃ oder M vorſetzte, ſo daß VM 5000, XM 10000, LM 50000, CM 100000 bedeutete, wobei freilich immer die Zweideutigkeit obwaltete, daß das vor M ſtehende Zeichen auch vielleicht ſubtractiven Werth haben konnte. MM aber und MMM u. ſ. w. bedeuten immer 2000, 3000, ſo daß alſo die Wiederholung deſſelben Zeichens ſeine urſprüngliche additive Bedeutung beibehält. Mehre Beiſpiele dieſer multiplicativen Methode finden wir bei Plinius, der z. B. LXXXIII.M, XCII.M, CX.M für 63000, 92000, 110000 ſchreibt [36]). Wenn die Stellen der Hunderte und Einer auch ausgefüllt ſind, ſo wird bei den Römern, ähnlich wie bei Diophant, das Zeichen M auch wohl ausgelaſſen, und ein Punct zwiſchen den Tauſenden und den folgenden niedrigeren Zahlen vertritt ſeine Stelle. So leſen wir bei Plinius DCC.XXVII für 700027 [37]), dagegen habe ich das Beiſpiel, welches Heilbronner aus demſelben Capitel citirt, und in welchem durch einen doppelten Proceß der Art die Zahl 1620829 durch XVI.XX.DCCCXXIX ausgedrückt ſein ſoll, nicht finden können [38]). Auch wird der tauſendfache Werth einer Zahl

36) Plinius hist. nat. VII, 26. XXXIII, 3. IV, praef.

37) ib. XXXIII, 3. In dem Texte der Ausgabe Sigismundi Feyerabenii. Francof. ad M. 1582. fol. ſteht, wie ich geſchrieben habe DCC.XXVII, welches einfach 727 ſein könnte. Aber eine Randgloſſe ſagt, Budäus habe in alten Manuſcripten geſehen DCC.M.XXVII.

38) Heilbronner. hist. mathem. p. 733. „Plinius XXXIII, 3 auri

durch einen Horizontalſtrich über derſelben angedeutet; Heilbronner am angeführten Orte führt aus Aelius Lampridius das Beiſpiel an: $\overline{\text{CXX}}$ equitum Persarum fudimus et mox $\overline{\text{X}}$ in bello interemimus, wo die Zahlen 120000 und 10000 bedeuten ſollen. Beſondere Aufmerkſamkeit verdienen die Zahlen bei Plinius im 23. und 24. Capitel des ſechſten Buchs, welche einen Stellenwerth der Ziffern auszudrücken ſcheinen, ſo daß $\overline{\text{XIX}}$.L. mill. passuum 1950000, $\overline{\text{XIII}}$.XXXII. M. p. 1332000, $\overline{\text{XI}}$.XXV. mill. 1125000 bedeutet; hier multiplicirt der Strich nicht mit tauſend, ſondern mit hundert. Ich muß aber geſtehen, daß ich über dieſe Zahlen nicht ganz im Klaren bin [39]).

Allen dieſen hier erörterten Syſtemen liegt alſo das Decimalſyſtem zum Grunde, welches in dem Semitiſch-Griechiſchen ſich rein erhalten hat, in dem Römiſchen aber und in dem altgriechiſchen des Herodian von dem pentadiſchen Syſtem durchdrungen iſt. Daraus geht hervor, wie unpaſſend und wie wenig bezeichnend für unſer heutiges Indiſch-Arabiſches Zahlenſyſtem die Benennung des Decimalſyſtems iſt, und wie wenig dieſer Name den unterſcheidenden Charakter dieſes Syſtems ausdrückt. Das charakteriſtiſche Merkmal unſeres Syſtems beſteht vielmehr in folgenden zwei Puncten:

1. Die neun Zeichen für die neun erſten Zahlen haben eine doppelte Bedeutung, eine abſolute, der zufolge ſie jene neun Einheiten ſelbſt, und eine relative, vermöge welcher ſie, durch ihre Stellung in der Zahlenreihe bedingt, die Producte jener Einheiten in irgend eine Potenz von zehn bedeuten.
2. Dieſes Syſtem bedarf vermöge ſeiner Natur, eben um den Stellenwerth, auf den hier alles ankommt, in jedem einzelnen Falle genau zu bezeichnen, eines Zeichens, welches andeutet, daß in der Zahlenreihe dieſe oder jene Potenz von zehn überſprungen iſt.

Dieſes Zeichen iſt dem Semitiſch-Griechiſchen Syſtem fremd, weil es eigene Zeichen für die Multipla der Potenzen von zehn hat, und das Nichtvorhandenſein eines ſolchen Multiplums zur völligen Deutlichkeit des Ausdrucks hinreicht. Und doch haben die Griechen

---

XVI.XX.DCCCXXIX, ut Budaeus l. II. de Asse ex antiquo exemplari legit; est 1620829, leg. sedecies centena et viginti millia octingenta viginti novem.

39) Vergl. Humboldt a. a. O. S. 225 Note [**]).

eines ähnlichen Zeichens nicht ganz entbehren können oder mögen. Vielmehr kennt Ptolemäus daſſelbe, indem er bei Angaben von Graden, Minuten und Secunden das Fehlen einer dieſer drei Stufen durch ein unſerer Null ähnliches Zeichen, ō, andeutet. Ja Ptolemäus hätte vielleicht das Syſtem mit Stellenwerth erfunden, wenn er den Grad ſtatt in ſechzig, in zehn Minuten, die Minute in zehn Secunden u. ſ. w. getheilt hätte, ſo daß er ſtatt 15° 7′ 4″ ohne Apices für Grade und Minuten 1574″ hätte ſchreiben können. Bei ſeiner Eintheilung in ſechzig Theile aber hätte er zu dieſer abgekürzten Schreibart verſchiedene Zeichen für neun und funfzig Einheiten haben müſſen, um zweiſtellige Überglieder zu vermeiden, welche die Andeutung und Abſonderung von einander durch Apices nöthig machten.

Aber es iſt bis auf dieſen Tag noch gar nicht ſo unumſtößlich bewieſen, daß den Griechen unſer Zahlenſyſtem mit Stellenwerth der Ziffern ganz unbekannt geweſen iſt. Zwar finden wir, ſo ſehr auch der Scharfſinn Archimed's und Apollonius, wie wir weiter unten ſehen werden, ſich dieſer großen und wichtigen Entdeckung genähert hat, keinen einzigen Griechiſchen Mathematiker, in deſſen Schriften dieſer letzte Schritt wirklich gemacht wäre. Aber eine lange unbemerkt oder unverſtanden gebliebene, in neuerer Zeit aber oft beſprochene und gewiſſer Maaßen berühmt gewordene Stelle in der Geometrie des Boethius ſchreibt in etwas dunklen, aber gar nicht mehr zweifelhaften Worten die Kenntniß und den Gebrauch des Zahlenſyſtems mit Stellenwerth den Pythagoräern zu. Leider habe ich mich bis jetzt vergebens bemüht, ein Exemplar von Boethius Geometrie zu Geſichte zu bekommen; ich kann mich hier alſo nur an das halten, was Mannert[40]) und Chasles[41]) darüber geſagt haben. Nachdem nämlich Boethius die Ausdrücke der Alten, (die ſich übrigens auch noch bei den Neuern ziemlich lange erhalten haben), digiti für die neun Einheiten, articuli für die Multipla derſelben in zehn und deſſen Potenzen, auch limites genannt, und numeri compositi für alle Zahlen, die weder digiti noch articuli oder limites ſind[42]),

40) De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine Pythagorica. Norimb. 1801. 8.

41) Geſchichte der Geometrie, überſ. v. Sohncke. S. 526—540.

42) Entſetzlich mißverſtanden iſt dieſe Stelle von Huet (Demonstr. evang. prop. IV. p. 295. Aliam quoque per manus et digitos et digitorum (!!) articulos numerandi rationem a Graecis acceptam Romani usurparunt.

erklärt hat, fährt er ſo fort [43]): „Pitagorici vero, ne in multiplicationibus et participationibus et in podismis aliquando fallerentur, ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi, descripserunt sibi quandam formulam, quam ob honorem sui praeceptoris, mensam Pitagoream nominabant, quia hoc, quod depinxerant, magistro praemonstrante cognoverant. A posterioribus appellabatur abacus, ut, quod alta mente conceperant, melius, si quasi videndo ostenderent, in notitiam omnium transfundere possent, eamque subterius habita sat mira descriptione formabant." (Es folgt die Figur des Abacus). „Superius vero digestae descriptionis formula hoc modo utebantur. Habebant enim diverse formatos apices vel caracteres. Quidam enim hujuscemodi apicum notas sibi conscripserant, ut haec notula responderet unitati, 1. Jsta autem binario, 2. Tertia vero tribus, 3. Quarta vero quaternario, 4. Haec autem quinque asscriberetur, 5. Jsta autem senario, 6. Septima autem septenario conveniret, 7. Haec vero octo, 8. Jsta autem novenario jungeretur, 9 [44]). Quidam vero in hujus formae descriptione literas alfabeti sibi assumebant hoc pacto, ut litera, quae esset prima, unitati, secunda binario, tertia ternario, caeteraeque in ordine naturali numero responderent naturali. Alii autem in hujusmodi opus apices naturali numero insignitos et inscriptos tantummodo sortiti sunt. Hos enim apices ita varie ceu pulverem dispergere in multiplicando et in dividendo consuerunt, ut si sub unitate naturalis numeri ordinem jam dictos caracteres adjungendo locarent, non alii quam digiti nascerentur." (Hier bricht Mannert ab; ich gebe die Fortſetzung nach Chasles S. 534 der deutſchen Überſetzung): „Wenn man die erſte Zahl, d. h. zwei (denn die Einheit iſt, wie in der Arithmetik geſagt wurde, nicht ſelbſt eine Zahl, ſondern der Urſprung und das Fundament der Zahlen), wenn man alſo zwei unter die Linie, die mit der Zehn bezeichnet war, ſtellte, ſo kam man darin überein, daß ſie zwanzig bedeutete; die Drei dreißig, die Vier vierzig; und den andern folgenden Zahlen gab man die Bedeutung, welche aus ihrer eigenthümlichen Benennung folgte. — Wenn man dieſelben apices

43) Mannert l. l. p. 8—10. Chasles S. 530—537.

44) Ich habe hier unſere Ziffern gebraucht; die Zeichen, die ſich bei Boethius finden, werde ich unten in ihrer wahren Geſtalt geben.

unter die Linie, welche mit Hundert bezeichnet war, ſtellte, ſo ſetzte man feſt, daß 2 zweihundert bedeutete, 3 dreihundert, 4 vierhundert, und daß die andern den andern Benennungen entſprächen. Und ſo weiter fort in den folgenden Columnen. Dieſes Syſtem war keinem Irrthum unterworfen [45]."

Zunächſt einiges zur Literatur dieſer Stelle. In den gedruckten Ausgaben von Boethius Geometrie iſt die Stelle dadurch entſtellt, daß anſtatt der von Boethius beſchriebenen Tabelle ſich die gewöhnliche Multiplicationstafel befindet, welche auf Auctorität dieſer Stelle ſehr mit Unrecht den Namen des **Abacus Pythagoricus** erhalten hat. Die wahre Darſtellung der von Boethius beſchriebenen Tafel iſt aus zwei, wie es ſcheint, aus dem elften Jahrhundert herrührenden Manuſcripten entnommen, deren eines auf der Bibliothek zu Altdorf [46]), das andere zu Chartres [47]) befindlich iſt. Die erſte Andeutung auf ein richtiges Verſtändniß dieſer Stelle ſcheint ſich in Theodor Tzwivel's Arithmetice opuscula duo. 4. (unter der Dedication: Monasterii, am Ende des Buchs 1507) zu finden; es heißt darin: characteres sive numerorum apices a divo Severino Boethio nuncupantur. Und auf dem Titel ſteht: **De utilitate hujus libelli Tetrastichon ioannis Murmellii Ruremundensis.**

Si quis arithmetices optat cognoscere praxin,
  Pythagore numeros discere si quis amat
Scire mathematicen si vult. Si denique quicquam
  De sophia, hunc modicum comparet ere librum [48]).

Deutlicher und beſtimmter hat die vorliegende auf unſer Ziffer=

---

45) Deſſelben Inhalts iſt eine Stelle am Ende des zweiten Buchs dieſer Geometrie, welche bei Chasles S. 537 ſo lautet: „Bei der Bildung des obigen Tableau's bedienten ſie (die Alten) ſich Charactere von verſchiedener Art und verſchiedener Form. Wir aber bedienen uns in jedem Werke dieſer Gattung nicht anderer, als derer, welche wir bei der Conſtruction des **Abacus** bezeichnet haben. Wir haben die erſte Linie dieſes Tableau's den Einern zuertheilt, die zweite den Zehnern, die dritte den Hunderten, die vierte den Tauſenden und endlich die anderen Linien den limites der andern Zahlen. Wenn man apices in die erſte Linie ſetzt, ſo werden ſie Einer darſtellen, in der zweiten Zehner, in der dritten Hunderte, in der vierten Tauſende u. ſ. w. f. in den andern."

46) Mannert l. l. p. 6.

47) Chasles S. 531.

48) Ich habe das Buch nicht geſehen, ſondern theile dieſe Data aus Käſtner's Geſch. d. Mathem. Th. 1. S. 82—84 mit.

ſyſtem bezogen Iſaak Voſſius in ſeiner Ausgabe des Pomponius Mela [49]), wo er in einer Note zu dem zwölften Capitel des erſten Buchs ſo ſagt: Manifeste literae hic pro numeris accipiuntur, quemadmodum saepe quoque alias. Notum enim apud omnes gentes ante quam cifrae quas vocamus essent repertae, literas pro numeris in usu fuisse. Nec tamen adeo recens est cifrarum usus, utque plerique existimant. Illae ipsae notae, quibus nunc utimur, exstant quoque in notis Senecae et Tyronis, multo vero clarius apud Boethium in elementis Geometricis, ubi Pythagoricis inventionem earum tribuit. Verum ut id non sit, neutiquam tamen dubitandum, quin antiquissimis etiam Graecis et Romanis cognitae fuerint, ac ab iis praecipue usurpatae, qui compendiarum scribendi genus sectabantur. Hinc adparet toto coelo errare illos, qui ab Indis aut Arabibus notulas has fluxisse existimant. Nullum Arabum monumentum literarium exstat, quod vel Boethii aetatem aequet, ne dicam Senecae et Tyronis. Manifestum est itaque Arabes signa ista numeralia a Graecis hausisse, Indos vero ab Arabibus. Huc accedit quod forma cifrarum in libris Arabum et Indorum plane conveniat cum illa, quae in antiquissimis Graecorum Latinorumque monumentis comparet. Die Schlüſſe ſind zu übereilt und nur durch Mangel an Sachkenntniß zu entſchuldigen. Die letzte Bemerkung iſt unrichtig, und das um ſo mehr, da ſelbſt die Indiſchen und die Arabiſchen Ziffern wenig Ähnlichkeit mit einander haben. — Der zweite, der über dieſen Gegenſtand weitläuftiger geſprochen hat, iſt Huet, von dem ich folgende in mancher Beziehung merkwürdige Stelle hier mittheile [50]): Mutationis hujusmodi praeclarum extat exemplum in notis numerorum, quibus hodie uti solemus. Ab Arabibus, vel ab Indis inventas esse, non vulgus eruditorum modo, sed doctissimi quique ad hanc diem arbitrati sunt. Ego vero falsum id esse, merosque esse Graecorum characteres ajo, a librariis Graecae linguae ignaris interpolatos, et diuturna scribendi consuetudine corruptos. Nam primum, 1, apex fuit seu vir-

---

49) Pomponii Melae libri tres de situ orbis, cum observationibus Isaaci Vossii. Hagae. 1658. Ed. secunda. Franekerae. 1700. 12.

50) Demonstratio Evangelica ad seren. Delphinum. 1681. 4. Ich habe die Ed. quarta. 1694. 4. in Händen. Daſelbſt p. 294—297.

gula, nota μονάδος. 2, est ipsum β, extremis suis truncatum. γ, si in sinistram partem inclinaveris et cauda mutilaveris, et sinistrum cornu sinistrorsum flexeris, fiet 3. Res ipsa loquitas, 4, ipsissimum esse Δ, cujus crus sinistrum erigitur κατὰ κάθετον, et infra basim descendit; basis vero ipsa ultra crus producta eminet. Vides quam 5 similis sit τῷ ε; infimo tantum semicirculo, qui sinistrorsum patebat, dextrorsum converso. Ἐπίσημον βαῦ, quod ita notabatur, ϛ, rotundato ventre, pede detracto, peperit τὸ 6. Ex Z basi sua multato, ortum est τὸ 7. Si H inflexis introrsum apicibus in rotundiorem et commodiorem formam mutaveris, exurget τὸ 8. At 9 ipsissimum est ϑ. Zero, punctum primo videtur fuisse, ad decuplicem praecedentis notae valorem designandum apponi solitum: quod ut magis appareret, insigniusque fieret et crassius, circumducto in circulum calamo spatium inane, properantia primum, deinde consuetudine relictum est. Hinc Arabes et Persae notam hanc, non circuli tantum figura, sed puncto etiam crassiore exprimunt; quam et צפר appellant; unde vocabulum Cifra, quod vulgus ab Ebraica radice ספר derivat. Ad hanc notarum similitudinem si advertetur animus, dubium omne tolletur. Sententiam nostram unice confirmat, quod scripsit eruditissimus Vossius in Melam, se notas illas vulgares deprehendisse in Codice manuscripto Geometricorum Boetii, et in Notis Senecae et Tyronis. Unde recte concludit, vetustiores esse ac vulgo creditur. Ergo Arabicae non sunt: nisi quis putet Senecae et Boetii temporibus Arabicas literas Romae fuisse usitatas. At nos non hac solum aetate vetustiores esse dicimus vulgares numerandi notas, sed plane ipsa esse elementa Graecorum: quae Senecae et Boetii aetate ita jam a nativa forma degeneraverant frequenti calculorum Pythagoricorum usu, ut nec a Boetio agnita sint. Putavit enim conficta fuisse a Pythagoricis, quae ab iis fuerant corrupta. Subjicit deinde literas quoque Alphabeti ab iisdem fuisse in numerando ascitas. Quod de literis Romanis dici non potuit, quippe quae ad operationes arithmeticas ineptae sint. Ergo Pythagorici literas easdem, vel integras nativâ forma calculis suis adhibebant, vel adulteratas et corruptas. Neque notas solum, sed et decuplam progressionem numerorum Arabes a Graecis mutuati sunt.

sunt. Non enim putandum est peculiare quippiam inesse progressioni huic, quamobrem alia asciscì non potuerit; vel ita pervulgatam fuisse, ut nullam aliam usurpare potuerint. Duodecupla progressio longe utilior est decupla; nam plures recipit partitiones duodenarius numerus, quam denarius. . . . . Cum ipsa ergo numerandi scientia, aliisque doctrinis, arithmeticas quoque notas a Graecis acceperant Arabes, et ut Graecanicae scripturae insueti erant, deformarunt: quas cum ita vitiatas sparsissent per orbem, earum auctores a plerisque habiti sunt, qui corruptores erant. Quidam acceptas retulerunt Indis, qui eas perinde ut occidentis incolae ab Arabibus habuerunt. In ea sunt opinione ipsi quoque Arabes; ultro agnoscentes sibi non deberi notarum illarum inventione, sed falsi in vera earum assignanda origine . . . . Et mirum sane est notarum illarum inventionem tribui Arabibus, quam exoticam esse Arabes ipsi fatentur. Viderunt quidem suas non esse; at cujates essent, pervidere non potuerunt, Indicasque putarunt esse, quae Graecae erant. Descriptionem Abaci Pythagorici ex veteri codice Geometricorum Boetii misit ad me doctissimus Graevius, elegantiorum Musarum pater; cujusmodi codice usum se ait Vossius in Melam. Multum vero ab editione typis impressa discrepat ista descriptio: non solum quoad formam notarum arithmeticarum, quae nostrarum vulgarium persimiles sunt, sed etiam quoad collocationem illarum atque situm: nam a dextra progrediuntur ad sinistram; cum e contrario in libro typis descripto a sinistra procedant ad dextram. Nec id factum putes, quod literae Arabicae sint, et Arabico more collocatae; sed quod minoris valoris numeri collocari soleant ad dextram, majoris ad sinistram. Itaque vulgarem numerorum collocandorum morem retinuit librarius ille; cum libri Boetii editi vulgarem nostram scribendi rationem secuti sint. Praeterea in codice illo manu scripto ad notas arithmeticas apposita sunt vocabula quaedam, quorum nonnulla originem Ebraicam praeferunt: puta quaternarius appellatur *Arbas,* quod est ארבע: quinarius *Quimas,* quod est חמש: septenarius *zenis,* fortasse *zevis,* quod est שבע: octonarius, *Temenias,* quod merum est Chaldaicum תמניא, factum ex Ebraico שמנה. Addita autem suspicor haec vocabula a librario, in gratiam Orientalium; cum codicem for-

Digitized by Google

tusse descripserit eo tempore, quo literae Arabicae florebant. Wenn man ein Beiſpiel dafür haben will, wie Jemand einer einmal aufgefaßten Hypotheſe Alles opfert und anpaßt, ſo kann man kein treffenderes wählen, als dieſe Worte Huet's. Ich überlaſſe dem Leſer die ſpecielle Kritik dieſer Stelle und gehe weiter. Nach Huet hat J. F. Weidler in zwei Diſſertationen[51] auf Grund der obigen Stelle bei Boethius ſich für den Griechiſchen Urſprung unſeres Ziffernſyſtems entſchieden. Was aber Mannert[52], nachdem er die erſte Abhandlung Weidler's erwähnt, mit folgenden Worten ſagen will, weiß ich in der That nicht: „Quo minus argumenta ejus assensu, qui veritati debetur, acciperentur, impedimento praecipue fuit Wallisius Anglus, qui in elementis arithmeticae 1742 editis longe alia via ingrediens affirmare non dubitabat, numerorum figuras, quas Arabicas appellamus, in nullo antiquo nec Boethii nec alius latini autoris codice deprehendi, illatas posterius esse a seculi XIV^{ti} et XV^{ti} libros transscribentibus; assertionis veritatem sese volenti e libris manu exaratis bibliothecae Bodlejanae etc. evincere posse. Weidlerus adversarii verbis haud deterritus secundam prelo subjecit dissertationem, quae suam novis rationibus roboraret sententiam." Mir iſt nur ein Weidler und nur ein Wallis bekannt, von denen hier die Rede ſein könnte. Zwar drückt Mannert ſich in Betreff des Erſteren ganz unbeſtimmt aus und nennt nicht einmal ſeine beiden Diſſertationen bei ihren Titeln; es kann aber kein anderer gemeint ſein, als Johann Friedrich Weidler, Profeſſor zu Wittenberg (Professor Wittenberg. nennt ihn Mannert), der Verfaſſer der bekannten historia astronomiae, und der beiden in der Note 51. genannten Diſſertationen, von denen die erſtere im Jahre 1727 erſchienen iſt. Wallis aber, der berühmte Engliſche Mathematiker, der wirklich an mehr als einer Stelle ſeiner Algebra ſich ganz beſtimmt und unbedingt für den Indiſch-Arabiſchen Urſprung unſers Ziffernſyſtems ausſpricht[53], war bereits im Jahre

---

51) De characteribus numerorum vulgaribus et eorum aetatibus. Viteb. 1727. — Spicilegium observationum ad historiam notarum numeralium pertinentium. Viteb. 1755. Ich habe beide Schriften nicht erhalten können.

52) S. die angeführte Diſſertation S. 5.

53) Vergl. Opera T. II. p. 4. 10. 11. 15 und noch ſehr oft. Wallis

1703 geſtorben, konnte alſo unmöglich 1742 in ſeinen Elementis arithmeticae der Anſicht Weidler's ſtörend entgegentreten. Ich weiß nicht, was dem gelehrten Hiſtoriker hier vorgeſchwebt hat. Denn abgeſehen davon, daß kein Werk von Wallis den von Mannert angeführten Titel hat, und dieſer nur deſſen Mathesis universalis seu arithmeticum opus integrum oder den Tractatus de Algebra gemeint haben kann, von denen aber das erſte ſchon im Jahre 1657, das zweite 1685 zuerſt erſchien, ſo iſt kein einziges Werk von Wallis ſpäter als im Jahre 1699, in welchem Jahre der dritte Band ſeiner auf Koſten der Oxforder Univerſität gedruckten Werke herauskam, wieder gedruckt worden [54]). Mannert muß ſich hier auf irgend eine Weiſe verſehen haben, und wir haben hier wieder einmal ein Beiſpiel von den traurigen Folgen unbeſtimmter Citate vor Augen. Übrigens mag es wahr ſein, daß die Auctorität der vielgeleſenen Werke Wallis ein Hinderniß für das Aufkeimen der von Weidler aufgeſtellten Anſicht geweſen iſt. Nachdem auch Montucla [55]) dieſen

---

fügt faſt bei jeder Gelegenheit, wo er der Ziffern erwähnt, hinzu, daß dieſelben Indiſchen Urſprungs ſeien.

54) In Rogg's Handbuch der math. Lit. finde ich noch folgende Werke von J. G. Wallis (der berühmte hieß bloß Johannes): Rechenkunſt für ſolche, welche mit ganzen und gebrochenen Zahlen ſowohl auf dem Papier als im Kopfe auf eine möglichſt kurze und geſchwinde Art rechnen zu lernen wünſchen. Göttingen. 1794. 8. und: Kubikrechnung des Bau- und Nutzholzes. Göttingen. 1794. 8. Beide Schriften können alſo nicht gemeint ſein. Ferner von einem anderen J. Wallis: Die Quadratur des Kreiſes, den Freunden der Wiſſenſchaft. Berlin. 1822. 4. und: Mathematiſch-conſtructionelle Entdeckungen. Berlin. 1826. 4. Beide Verfaſſer ſind doch wohl Deutſche.

55) Hist. des math. T. I. p. 122. 123. Boëce nous apprend que quelques Pythagoriciens avoient inventé et employoient dans leurs calculs neuf caractères particuliers etc. . . . En effet les manuscrits de Boëce, où l'on trouve ces caractères si ressemblans aux premiers de l'arithmétique arabe, n'ayant aussi que trois à quatre siècles, il est assez probable qu'ils sont l'ouvrage du copiste. Au reste, cela est peu important; il s'agit ici beaucoup plus du fonds de cette arithmétique Pythagoricienne, que de la forme des caractères qu'elle employoit; et si le récit de Boëce, qui ne paroît pas également altéré, est vrai, il faudra admettre que l'on connut dans l'école de Pythagore une manière de noter les nombres semblable à la nôtre. Ce trait de Boëce admis dans toute son étendue, ne me paroît pas néanmoins un motif suffisant pour nous porter à chercher un nouveau système sur l'origine de notre arithmétique; les témoignages nombreux des Arabes me porteront toujours à croire qu'elle est née dans

Gegenſtand kurz berührt und ſich dafür entſchieden hatte, daß Pythagoras von ſeinen Reiſen, vielleicht aus Indien, dieſe Kenntniß mitgebracht haben könnte, ſo gab **Mannert** in Folge eigener Beſichtigung des Altdorfer Codex (was geſchehen war, bevor ihm Weidler's Arbeiten bekannt geworden [56])), ſeine vorhin ſchon erwähnte Diſſertation De numerorum, quos Arabicos vocant, vera origine Pythagorica (Norimb. 1801. 8.) heraus, worin er zuerſt zeigt, daß die bei Boethius befindliche Tabelle nicht, wie noch Weidler geglaubt hatte, die unter dem Namen des Abacus Pythagoricus ſeit Jahrhunderten bekannte Multiplicationstafel, ſondern eine Tabelle zur Beleuchtung des Ziffernſyſtems ſei. Die Tabelle ſelbſt hat er nebſt einem Stücke des zur Erklärung derſelben dienenden Textes nach dem Manuſcript in Kupfer ſtechen laſſen und ſeiner Schrift beigefügt. Zuletzt hat Chasles in der zwölften Note zu ſeinem Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géometrie [57]) weitläuftig und gründlich über die in Rede ſtehende Stelle gehandelt. Der Verfaſſer hat das Manuſcript der Bibliothek zu Chartres, welches ebenſo wie das Altdorfer aus dem elften Jahrhundert herrühren ſoll, benutzt, die Zeichen ſind bei ihm und Mannert etwas verſchieden; ja Beide geben etwas abweichende Zeichen aus der Tabelle und dem Texte von den Worten an: ut haec notula responderet unitati etc. Ich will hier alle vier Reihen von Zeichen zuſammenſtellen:

Mannerts Tabelle:
Mannerts Text:
Chasles' Tabelle:
Chasles' Text:

les Indes; et j'aimerai mieux conjecturer que ce fut une de ces inventions que Pythagore puisa chez les Indiens, que de penser que ceux-ci la tirèrent des Grecs. J'avoue que si cette arithmétique eût été ordinaire chez ces derniers, ce seroit une grande présomption en leur faveur. Mais une méthode usitée seulement par un petit nombre d'hommes mystérieux, ne me paroît point propre à avoir pénetré jusqu'aux Indes.

56) Mannert a. a. O. p. 6.

57) S. 526 folg. der deutſchen Überſetzung.

Das letzte Zeichen, welches die Null vorſtellen ſoll, kommt in beiden Texten nicht vor. Über den Zeichen der Tabelle ſtehen der Reihe nach folgende Namen:

Igin	andras	ormius	arbas	quinas	calctis	zenis	temenias	celentis	sipos.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Für ormius lieſt Chasles ormis, für quinas, quimas, für calctis, caltis. Außerdem hat Chasles in ſeinem Manuſcripte am Ende der Geometrie folgende Verſe gefunden:

Ordine primigeno . . . . [58]) nomen possidet *Igin.*
Andras ecce locum previndicat ipse secundum.
Ormis post numerus non compositus sibi primus.
Denique bis binos succedens indicat *Arbas.*
Significat quinos ficto de nomine *Quimas.*
Sexta tenet *Calcis* perfecto munere gaudens.
Zenis enim digne scpteno fulget honore.
Octo beatificos *Termenias* exprimit unus.
Hinc sequitur *Sipos* est qui rota namque vocatur [59]).

Zu bemerken ſind hier erſtens zwei abweichende Leſearten, nämlich calcis für ſechs, wofür Chasles im Texte caltis, Mannert calctis hat, und termenias, wahrſcheinlich Schreibfehler für temenias; zweitens aber fehlt offenbar ein Vers für celentis gleich neun, und ich möchte ſchwerlich mit Chasles [60]) glauben, daß sipos und celentis zwei verſchiedene Namen des neunten Zeichens ſeien; ſowohl die Geſtalt des Zeichens, als die Stellung in der Tabelle, als auch endlich, wie wir unten ſehen werden, der Name deuten unzweifelhaft darauf hin, daß sipos die Null vertritt.

Es iſt nicht leicht und auch hier noch nicht am rechten Orte, über die wahre hiſtoriſche Bedeutung dieſer Erſcheinung und über deren Einwirkung auf die Verbreitung des Ziffernſyſtems in Europa zu ſprechen. Das können wir erſt dann in ſeinem ganzen Zuſammenhange thun, wenn wir über das Alter dieſes Syſtems in Aſien und ſeine von da aus bewerkſtelligte Herüberpflanzung nach dem Occident werden ins Klare gekommen ſein. Ich will hier nur vor-

58) Hier fehlt im Verſe ein Wort von zwei Augen oder einer langen Sylbe.

59) S. 540.

60) Ebend. Note 166.

läufig andeuten, worauf es bei dieſer Unterſuchung vorzüglich ankommen wird:

1) Die erſte Frage, welche zu beantworten ſein wird, iſt die: gehört die beſprochene Stelle dem Auctor Boethius ſelbſt an, oder iſt ſie vielleicht von einem ſpäteren Abſchreiber in deſſen Geometrie hineingetragen. Es wäre alſo zu ermitteln, ob ſie ſich in allen Handſchriften des Boethius vorfindet, namentlich in den älteren. Es wäre die Frage zu beantworten, in welchem Verhältniſſe dieſe Stelle zu der berühmten Schrift ſteht, die denſelben Gegenſtand behandelnd dem im Jahre 1003 als Pabſt Sylveſter **II.** verſtorbenen Gerbert zugeſchrieben wird und die in Beda's Werken abgedruckt iſt; und wenn eine, welche von beiden auf die andere ſich ſtützt.

2) Es wäre die Frage zu beantworten, wie eine ſo wichtige und ſchöne Kenntniß bei den Pythagoräern in dem wiſſenſchaftlich regen Griechenland ſich Jahrhunderte lang ſo geheim halten konnte, daß ſie allen Mathematikern, die uns übrig geblieben ſind, und unter denen ſich, wohl zu bemerken, auch Pythagoräer befinden (z. B. Nikomachus), völlig unbekannt geblieben iſt, und ſpurlos verſchwunden wäre, wenn nicht ein Römiſcher Kirchenvater des ſechſten Jahrhunderts ſich ihrer bemächtigt hätte. Pythagoras und ſeine Schüler waren doch mit ihren ſonſtigen mathematiſchen Erfindungen nicht ſo geheimnißvoll; vielmehr verdanken wir dieſer Schule einige der wichtigſten Wahrheiten, auch in der Zahlenkunde.

3) Woher rühren die Namen, welche in den Manuſcripten den Zahlzeichen beigeſchrieben ſind? Kein einziger iſt Lateiniſch oder Griechiſch, wohl aber ſind mehrere ſichtbar Semitiſch. **Arbas**, vier, iſt **arba** (ארבע, اربعة), **quimas**, fünf, iſt **chams**, **chamesch** (خمس, חמש), **temenias**, acht, iſt Aramäiſch oder Arabiſch **temânia** (תמניה, ثمانية); **zenis**, ſieben, iſt vielleicht urſprünglicher Schreibfehler für **zebis** oder **zevis**, und dann haben wir das Semitiſche **sab'a**, **scheba** (سبعة, שבע); vielleicht iſt auch nur das Arabiſche von einem Halbkundigen falſch geleſen, indem **n** und **b** in dieſer Sprache ſo leicht verwechſelt werden; **sipos** iſt leicht entſtellt aus dem Arabiſchen **sifr** (صفر) = 0[61]); und wenn wir **igin**,

61) Es iſt viel über die Bedeutung unſeres Worts Ziffer geſchrieben worden, welches nach Einigen Zahl (Hebr. ספר, zählen), nach Andern Nichts, Null, bedeuten ſoll. Ich muß mich, auf den Sprachgebrauch der Arabiſchen Mathematiker geſtützt, durchaus für die letztere Bedeutung erklären, für welche ſich

eins, in igid verwandeln, und für andras, zwei, achras leſen, ſo haben wir das Semitiſche echad (אחד, أحد) und achar (آخر, אחר), der andere. Solche Verſtümmelungen aber, zuſammengehalten mit den abweichenden Leſearten, dürfen uns nie befremden, wenn ſie unverſtändliche Worte betreffen. Wie ſind nicht manche aus dem Arabiſchen hergenommene aſtronomiſche Benennungen entſtellt worden! Aus semt-al-râs (سمت الراس), Gegend des Kopfes oder Scheitels, iſt zenith geworden, indem

---

unter Andern ſchon Maximus Planudes ausſpricht, wenn er ſagt: Τιθέασι δὲ ἕτερόν τι σχῆμα, ὃ καλοῦσι τζίφραν, κατ' Ἴνδους σημαῖνον οὐδέν. καὶ τὰ ἐννέα δὲ σχήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικά ἐστιν. ἡ δὲ τζίφρα γράφεται οὕτως ο. (Wallis T. I. p. 48. T. II. p. 10). Mit Unrecht ſagt v. Bohlen (das alte Indien 2. Th. S. 222): „Maximus Planudes begeht einen doppelten Irrthum, daß nur die Null τζίφρα geheißen und dieſes οὐδὲν bedeute.“ Der einzige Fehler, den Planudes begeht, iſt der, daß er die Araber mit den Indern verwechſelt. Allerdings bedeutet im Arabiſchen sifr (صفر) nur die Null, und ich habe es nie in der Bedeutung gefunden, in welcher wir das Wort Ziffer gebrauchen. Es iſt dieſes eine treue Überſetzung des Indiſchen çûnya, das Leere, von dem Verbum safira, صفر, leer ſein, welches nicht die Bedeutung des Hebräiſchen ספר, zählen hat. Es mag genügen, wenn ich hier nur eine, aber eine triftige Auctorität für meine Behauptung anführe; der Scholiaſt von Beha-eddin's Khulaſet-al-Hiſab S. 17 ſagt: اگر در مرتبهٔ از مراتب عدد نبود براي نگاهداشت مرتبهٔ صورت هاي مدور يعني ه كه علامت صفر بمعني خالي ست نويسند u. ſ. w. d. h. „Wenn an irgend einer Stelle keine Zahl vorhanden iſt, ſo ſchreibt man der Deutlichkeit wegen an der Stelle das Finalzeichen des Buchſtaben Ha, nämlich ه, welches das Zeichen Sifr, in dem Sinne von Etwas Leerem, iſt.“ Weiter unten ſagt der Verfaſſer: „Gegenwärtig iſt die Veränderung eingetreten, daß das Finalzeichen Ha die Fünf bedeutet, und für das Zeichen *Sifr* ein Punct geblieben iſt.“ Die Engliſche Sprache hat das Wort cipher in dieſer urſprünglichen Bedeutung aufbewahrt; in allen übrigen Europäiſchen Sprachen bedeutet gegenwärtig Ziffer, ciphra, ſo viel als Zahlzeichen im Allgemeinen. Dagegen finden wir im ſpäteren Latinismus und in mehrern Romaniſchen Sprachen für die Null den Ausdruck zero, der wahrſcheinlich auch Arabiſchen Urſprungs iſt; sahrâ, صحراء, heißt das Feld, (auch die Wüſte, daher der Pluralis sahârâ, صحاري zur Bezeichnung der großen Africaniſchen Wüſte); demnach würde صحراء صفر, sahrâ sifr, das leere Feld, die leere Stelle bedeuten, woraus leicht, mit Übergehung des charakteriſtiſchen Adjectivs sifr das Lateiniſche zero entſtanden ſein kann.

man ni ſtatt m las, und den folgenden Genitiv ganz wegwarf. Das Sternbild des Adlers heißt im Arabiſchen nasr at-tâïr, der fliegende Adler; dafür finden wir die Namen Athair, Altair, Athais, Alcar u. ſ. w. Mit den drei übrigen Zahlworten, ormis (ormius), calctis (caltis, calcis) und celentis weiß ich nichts anzufangen; wo indeß ſieben Namen ihre Deutung finden, da werden auch wohl die drei übrigen ihren Urſprung haben.

Aber geſetzt auch, künftige Forſchungen ſtellten die Echtheit der Stelle bei Boethius und die Bekanntſchaft der Pythagoräer mit dem Indiſch-Arabiſchen Ziffernſyſtem außer Zweifel, ſo würde doch dieſes Reſultat für die Geſchichte der Wiſſenſchaft erſt bei der Unterſuchung über die Verbreitung dieſes Syſtems in Europa zur Zeit des ſogenannten Mittelalters Intereſſe gewinnen. Auf die Fortbildung der Griechen hat dieſe problematiſche Kenntniß keinen Einfluß gehabt, und für die Griechiſchen Mathematiker, mit denen wir hier zu thun haben, iſt ſie nicht da geweſen. Und daß ſelbſt Boethius, wenn die obige Stelle von ihm herrührt, weiter nichts thut, als daß er etwas ihm ſelbſt nicht weniger als Geläufiges, vielleicht etwas eben erſt Gelerntes wiedererzählt, geht aus ſeinen Worten gar zu deutlich hervor. Was er über den praktiſchen Nutzen und den Gebrauch des von ihm beſchriebenen Syſtems ſagen will, zeigt klar, daß er dieſen Nutzen und den Gebrauch des Syſtems gar nicht verſtanden und gekannt hat. Darum breche ich hier dieſen Gegenſtand ab, um erſt bei ſpäteren Unterſuchungen wieder darauf zurückzukommen. Man wird mir es um ſo weniger verargen, daß ich die gründliche Erörterung dieſer Stelle auf eine künftige Gelegenheit hinausſchiebe, als ich, wie ſchon erwähnt, das Werk von Boethius ſelbſt noch gar nicht geſehen habe. Ich gehe von dieſem problematiſchen Sujet auf ein reelleres, die praktiſche Rechenkunſt der Griechen über.

Viertes Kapitel.

Die Logiſtik der Griechen.

Ein Zahlenſyſtem iſt an und für ſich todt, wenn es nicht auf einen praktiſchen Gebrauch bezogen wird, und gerade das praktiſche Bedürfniß des geſelligen Lebens hat die Menſchen auf die conventionelle Feſtſtellung gewiſſer Syſteme von Zahlzeichen hingeführt. Dieſes Bedürfniß war aber zwiefacher Natur. Man wollte entweder bloß eine Zahl aufnotiren, um ſo dem Gedächtniſſe zu Hilfe zu kommen; zu dieſem Zwecke war, ſo lange er Privatangelegenheit blieb, jedes beliebige und willkührliche Syſtem von Zeichen ausreichend, und ſelbſt für den öffentlichen Gebrauch bedurfte es nur eines, zwar allgemein anerkannten, aber keinesweges auf große Bequemlichkeit berechneten Syſtems, wie denn wir uns noch gewöhnlich bei Inſchriften und ſelbſt auf Büchertiteln des ſehr unbequemen Römiſchen Zahlenſyſtems bedienen, weil die Züge deſſelben vernehmlicher in die Augen fallen, als die modernen Ziffern. Die älteſten Römer ſchlugen Nägel in den Jupitertempel, um die verfloſſenen Jahre anzudeuten; ebenſo die Volſinier in den Tempel der Nortia: **Lex vetusta est, priscis literis verbisque scripta, ut, qui praetor maximus sit, Idibus Septembribus clavum pangat. Fixus** (oder **fixa, sc. lex**) **fuit dextro lateri aedis Jovis optimi maximi, ex qua parte Minervae templum est. Eum clavum, quia rarae per ea tempora literae erant, notam numeri annorum fuisse ferunt; eoque Minervae templo dicatam legem, quia numerus Minervae inventum sit. Volsiniis quoque clavos, indices numeri annorum, fixos in templo Nortiae, Etruscae Deae, comparere, diligens talium monumentorum auctor Cincius affirmat. M. Horatius consul ex lege templum Jovis optimi maximi dedicavit anno post reges exactos: a consulibus postea ad dictatores, quia majus imperium erat, solemne clavi figendi translatum est. Intermisso deinde more, digna etiam per se visa res,**

propter quam dictator crearetur[1]). — Das zweite Bedürfniß, welches die Entſtehung von Zahlenſyſtemen verurſachen mußte, war die Nothwendigkeit, Rechnungen auszuführen, welche das Leben und ſpäterhin die Wiſſenſchaft mit ſich führte. Zu dieſem Zwecke iſt der Gebrauch ſchriftlicher Zahlzeichen gewiß erſt ſpäter entſtanden, und Geſchichte und Sprache weiſen darauf hin, daß man in älteren Zeiten ſich zunächſt der Finger (daher das durchgängig conſequente Erſcheinen des Decimalſyſtems und deſſen Abarten, des pentadiſchen und Vigeſimalſyſtems, daher die Begriffe von Hand und Fuß zur Bezeichnung der Zahlen in Americaniſchen Sprachen, daher das Griechiſche πεμπάζειν, Dinge, über die ich oben weitläuftiger geſprochen habe), dann aber kleiner Steinchen, Kügelchen oder Fruchtkörner und dergleichen zur Veranſchaulichung und Erleichterung der Rechnung bediente. Die Griechiſche Sprache bildet von dem Worte ψῆφος, Steinchen, Muſchel, das Verbum ψηφίζειν, rechnen, das Nomen ψηφοφορία, Rechenkunſt u. a. neben λογίζεσθαι, die Lateiniſche von calculus, Steinchen, ihr calculare, rechnen, calculum ponere, calculum subducere, zuſammenrechnen u. ſ. w. Herodot erzählt, daß die Ägypter mit Steinchen (ψήφοις) gerechnet haben[2]), welche ſie nicht, wie die Griechen, von der Linken zur Rechten, ſondern umgekehrt legten (wenn das Letztere ſich in der angeführten Stelle nicht etwa bloß auf das γράφειν bezieht, was doch aber nach der Conſtruction kaum anzunehmen iſt). Ein Fortſchritt war es ſchon, wenn man Steine von verſchiedener Größe oder verſchiedener Farbe nahm, und nachdem man zehn durchgezählt, ſtatt zehn kleiner Steine einen größeren hinlegte, der zehn bedeutete; eben ſo bei hundert, ſo daß man von jeder Species nicht mehr als neun Steine nöthig hatte. Dieſe Sitte konnte leicht auf den Gedanken führen, eine ſo geringe Anzahl von Steinen, um ſie leichter bei der Hand zu haben, auf Schnüre zu ziehen, von denen eine die Einer, die zweite die Zehner, die dritte die Hunderter u. ſ. f. enthielt, und hiemit ſtehen wir auf hiſtoriſchem Boden. Solche Rechenſchnüre ſind in Aſien, namentlich bei den Tataren und den Chineſen, von uralten Zeiten her im Gebrauch geweſen, und ſollen ſich auch bei

1) Livius l. VII. c. 3.

2) l. II. c. 36. Γράμματα γράφουσι καὶ λογίζονται ψήφοισι Ἕλληνες μὲν ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ φέροντες τὴν χεῖρα, Αἰγύπτιοι δὲ ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερά.

den Peruanern und Mexicanern vorfinden [3]); und der chriſtlich-religiöſe Roſenkranz, welchen die Kreuzzüge aus Aſien nach Europa herüberbrachten, verdankt wahrſcheinlich ebenſo wie die akshamâlâ (Augen- oder Perlenkranz), die den Indiſchen Brahmanen bei der Aufzählung der Namen des Gottes Viſchnu behiflich iſt, ſeinen erſten Urſprung dieſer zum Rechnen oder Abzählen beſtimmten Kugelſchnur. Weiter vervollkommnet erſcheinen dann mehre ſolcher Schnüre in einen Rahmen geſpannt, wovon wir hiſtoriſche Beiſpiele in dem Römiſchen Abacus, und in dem bis auf den heutigen Tag in ganz China und Hochaſien gebräuchlichen Suanpan haben. Beide Inſtrumente vermindern die Anzahl der auf jeder Schnur befindlichen Kugeln, indem ſie das pentadiſche Zahlenſyſtem mit dem dekadiſchen vermiſchen. Ein Querholz theilt ſämmtliche Parallelſchnüre in je zwei ungleiche Theile, von denen der größere im Suanpan fünf, der kleinere zwei Kugeln enthält, deren jede an Werth gleich fünf Kugeln der Hauptſchnur iſt. Im Römiſchen Abacus hatte die Hauptſchnur nur vier, die Nebenſchnur eine Kugel; denn anſtatt fünf Kugeln der Hauptſchnur zu gebrauchen, konnte man ſchon eine der Nebenſchnur, und ſtatt zwei Kugeln der Nebenſchnur eine der folgenden Hauptſchnur anwenden [4]). Die Chineſen ſollen auf dieſer Tafel weit ſchneller rechnen als wir mit unſern Ziffern. Die Griechen ſcheinen den Abacus (ἄβαξ) [5]) wenig gebraucht zu haben; deſto einheimiſcher

---

3) Humboldt a. a. O. S. 206.

4) Ebend. S. 216. 217. Eine Abbildung des Suanpan befindet ſich in Du Halde ausführliche Beſchreibung des chineſiſchen Reichs und der großen Tartarey, a. d. Franz. überſ. mit einer Vorrede von Mosheim (Roſtock 1749. 4.) 3. Thl. S. 350.

5) Ἄβαξ und das davon abſtammende Abacus ſind etymologiſch dunkle Worte. Außer der mit Schnüren beſpannten Rechentafel hieß ſo auch ein Brett mit erhabenem Rande, welches mit Staub oder feinem Sande beſtreut zur Zeichnung geometriſcher Figuren diente. Da die Griechen auch dieſes Hilfsmittel vielleicht aus Aſien erhalten haben, ſo könnte man an das Semitiſche אבק, abak, Staub, denken. Eigenthümlich iſt der Gebrauch des Wortes abacus bei den ſpätern von den Arabern gebildeten Mathematikern, bei denen es ſynonym mit algorithmus oder algorismus (der Arabiſche Artikel al mit dem Griechiſchen Worte ἀριθμός) die Rechnung mit den Arabiſchen Ziffern bedeutet. Vergl. Wallis T. II. p. 11. 13. Daher ſtellt Lucas de Burgo (Pacioli) die übrigens gewiß falſche Hypotheſe auf, daß abacus verſtümmelt ſei aus arabicus. „Algorithmus etiam *abacus* dicebatur olim. Quam vocem putat Lucas de Burgo corrupte dici pro *Arabico*, quod ab Arabibus et rem et nomen habuerimus." Wallis T. II. p. 11.

ward er dagegen bei den Römern, die bei ihrer unbehilflichen Zahlenſchrift einer ſolchen ſinnlichen Unterſtützung weit mehr bedurften; der Gebrauch deſſelben reicht bei ihnen bis tief in die Zeiten des Mittelalters hinein und wurde wohl erſt durch die allgemeinere Einführung der Indiſch-Arabiſchen Ziffern verdrängt. Inwiefern eine graphiſche Übertragung der auf dieſem Rechenbrette gewonnenen Reſultate auf das Papier zu einer Erſcheinung, wie die beſprochene Tafel bei Boethius, und zu der Erfindung der Ziffern mit Stellenwerth führen konnte, iſt eine Unterſuchung, die ich mir für eine andere Stelle dieſes Werkes vorbehalte.

Die Griechen, welche von den Phöniziern zugleich mit dem Alphabete ein zwar nicht ſehr conſequentes, aber doch nicht unbequemes Zahlenſyſtem erhielten, ſcheinen, wie geſagt, ſchon frühe von der ſinnlichen Rechenkunſt mit den ψήφοις zu der graphiſchen übergegangen zu ſein; es iſt uns aber von ihrer praktiſchen Rechenkunſt und den zur Erleichterung ihrer Rechnungen angewandten Kunſtgriffen im Ganzen wenig aufbehalten worden, und gerade in dieſer Hinſicht iſt der Verluſt der beiden erſten Bücher der mathematiſchen Sammlung von Pappus zu bedauern, da dieſelben dieſem Gegenſtande gewidmet geweſen zu ſein ſcheinen, wie aus dem von Wallis aufgefundenen und bekannt gemachten Fragmente erhellt. Das älteſte bis auf unſere Zeiten gekommene Griechiſche Werk, welches auf Zahlenrechnungen baſirt iſt, iſt die Κύκλου μέτρησις von Archimedes. Leider aber begnügt der Verfaſſer ſich überall damit, von dem Anſatze der Rechnung einen Sprung auf das Reſultat zu machen, ſo daß wir aus ſeiner Schrift von der Art der Ausführung keine Anſchauung erlangen. Dieſe Ausführungen aber ſind uns in dem noch in mancher andern Beziehung intereſſanten Commentar des Eutokius von Askalon über das genannte Werk, wenigſtens zum Theil, erhalten worden; er giebt uns Beiſpiele von Addition, Subtraction und Multiplication in ganzen und gebrochenen Zahlen, aber keine Diviſion und keine Wurzelausziehung, obgleich gerade auf der letztgenannten Operation Archimed's Rechnung hauptſächlich beruht, indem er, die wirklichen Quadrate nicht mitgezählt, der Reihe nach die Quadratwurzeln aus folgenden Zahlen 349450, $1373943\frac{33}{64}$, $5472132\frac{1}{16}$, 9082321, 3380929, 1018405, $4069284\frac{1}{36}$ hat ausziehen müſſen. Archimedes ſetzt die Wurzeln der genannten ſieben Zahlen in derſelben Reihenfolge $591\frac{1}{8}$, $1172\frac{1}{8}$, $2339\frac{1}{4}$, $3013\frac{3}{4}$, $1838\frac{9}{11}$, $1009\frac{1}{6}$,

$2017\frac{1}{4}$ ohne weitere Rechnung; er verfährt z. B. bei der erſtgenannten Wurzel ſo: ἡ ΕΗ πρὸς ΗΓ δυνάμει μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}\overline{\text{ϡυν}}$ πρὸς $\overset{\beta}{\mathrm{M}}\overline{\text{γυϑ}}$, μήκει ἄρα μείζονα ἢ ὃν $\overline{\text{φϟα}}$ η′ πρὸς $\overline{\text{ρνγ}}$. d. h. „ΕΗ zu ΗΓ hat im Quadrat (d. i. $\mathrm{EH}^2 : \mathrm{H\Gamma}^2$) ein größeres Verhältniß, als 349450 zu 23409, in der Länge alſo (d. i. ΕΗ : ΗΓ) ein größeres als $591\frac{1}{8}$ zu 153.“ Auffallend iſt es an dieſem Beiſpiele, daß $591\frac{1}{8}$ nicht die nächſtkleinere Wurzel iſt, welche ſich durch einen ſo kleinen Bruch ausdrücken läßt; $591\frac{1}{7}$ iſt bedeutend näher und auch noch kleiner als der wahre Werth, was hier erfordert wird; es iſt nämlich $(591\frac{1}{8})^2 = 349428\frac{49}{64}$, dagegen $(591\frac{1}{7})^2 = 349449\frac{43}{49}$. Ebenſo iſt für die zweite Zahl $1172\frac{1}{7}$ näher als die angenommene Wurzel $1172\frac{1}{8}$. Die dritte Wurzel iſt ziemlich nahe, wenigſtens läßt ſich mit einem kleinen Bruche keine nähere angeben. Von der vierten Zahl an werden die Wurzeln, dem Gange des Räſonnements zufolge, zu groß verlangt; aber gleich die vierte, $3013\frac{3}{4}$ iſt bedeutend zu groß, indem hier $\frac{3}{4}$ für den Decimalbruch 0,6889 ſubſtituirt iſt, da doch erſt $0{,}75 = \frac{3}{4}$ iſt; und das Quadrat von $3013\frac{3}{4}$ iſt um $368\frac{1}{16}$ größer als die Zahl, deren Wurzel es vorſtellen ſoll. Die folgende Wurzel $1838\frac{9}{11}$ iſt wieder bedeutend zu groß; es bietet ſich uns hier die merkwürdige Erſcheinung dar, daß die Methode der Kettenbrüche der Reihe nach folgende Werthe giebt: 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{11}$ u. ſ. w.; nun iſt $\frac{8}{11}$ zunächſt zu klein; es hat alſo faſt den Anſchein, als ſei deshalb von Archimedes $\frac{9}{11}$ gewählt worden. Die ſechſte und ſiebente Wurzel ſind ziemlich nahe. Es wäre intereſſant, wenn Eutokius uns einige Aufklärung gegeben hätte über die Methode der Alten, die irrationalen Wurzeln näherungsweiſe zu finden; das thut er aber nicht, ſondern er begnügt ſich zu ſagen: die Wurzel von 349450 iſt nahe $591\frac{1}{8}$, denn das Quadrat von $591\frac{1}{8}$ iſt ungefähr um $21 + \frac{1}{6} + \frac{1}{15}$ kleiner als das wirkliche, — τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ $\overline{\text{φϟα}}$ η′ ἔγγιστα (ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ $\overline{\text{φϟα}}$ η′ τετράγωνος εἰς τὸ ἀκριβὲς M^{o} $\overline{\text{κα}}$ ϛ′ ιε′ ἔγγιστα). Dann fügt er mit den Worten οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται als Probe das Schema der Quadraterhebung der in Rede ſtehenden Wurzel hinzu, und nachdem er da in dem angeführten Beiſpiel das Quadrat $= 349428\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{64}$ $(= \frac{49}{64})$ gefunden, ſagt er: ἐλλείπει ἄρα τοῦ ἀκριβοῦς M^{o} $\overline{\text{κα}}$

ς' ιε' ἔγγιστα [6]). Wahrſcheinlich alſo hatten die Griechen keine beſtimmte Methode, um aus einer im gewöhnlichen Zahlenſyſtem gegebenen Zahl, welche kein Quadrat iſt, die irrationale Quadratwurzel auszuziehen. Zwar ließ die Methode, welche Theon bei Zahlen in ſechzigtheiligen Brüchen anwendet, ſich auch, wie wir unten ſehen werden, auf das Griechiſche Decimalſyſtem anwenden; aber die Operation würde bei größeren Zahlen weitläuftig und ſchwierig geworden ſein. Die Bemerkung, welche wir oben bei der fünften Archimediſchen Wurzel, $1838\frac{9}{11}$ machten, ließe von ferne vermuthen, als wäre den Griechen eine Rechnung, ähnlich unſerer Rechnung mit Kettenbrüchen, nicht fremd geweſen. Allein eben dieſe Methode hätte bei den beiden erſten Wurzeln $\frac{1}{7}$ ſtatt des von Archimedes angenommenen $\frac{1}{8}$ an die Hand gegeben. Es bleibt alſo nur die Vermuthung übrig, daß die Alten ihre Wurzeln durch Verſuche und Errathen gefunden haben, worauf namentlich die Multiplicationsproben bei Eutokius hindeuten. Die zunächſt kleinere ganze Zahl, welche der geſuchten Wurzel entſprach, konnten ſie leicht aus einer Tabelle der Quadratzahlen entnehmen; und daß ähnliche Tafeln, die ihnen ihre mühſamen Rechnungen erleichterten, ihnen nicht fremde waren, beweiſt die Multiplicationstafel bei Nikomachus [7]).

Wenn ich eben ſagte, die von Theon bei der Sexageſimalſcala angewandte Methode der Quadratwurzeln ſei wahrſcheinlich auf Zahlen im Decimalſyſtem von den Griechen nicht angewandt worden, ſo ſcheint mir Eutokius ſelbſt darin zu widerſprechen. Man leſe zu dem Ende folgende Stelle, den Anfang ſeines Commentars zu dem dritten Lehrſatze der Κύκλου μέτρησις [8]), die auch noch in mancher andern Beziehung intereſſant iſt: Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα, τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὑρεῖν. Τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὑρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου, ἀδύνατον. Ἀριθμὸς μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος ποιεῖ τινὰ τετράγωνον ἀριθμόν· ὁ ἀριθμὸς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γινόμενα οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. Ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοῖς Μετρικοῖς,

6) Über die Reduction des Bruchs $\frac{15}{64} = 1 - \frac{49}{64}$ auf die Form $\frac{1}{6} + \frac{1}{15}$ werde ich unten ſprechen.

7) Nicomachi arithm. l. I. c. 19. S. 96 der Ausg. von Aſt.

8) S. 80. 81 der Ausg. von Gutenäcker.

εἴρηται δὲ Πάππῳ καὶ Θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν ἐξηγουμένοις τὴν Μεγάλην Σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου. Ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκείνων ἀναλέγεσθαι. D. h. In dieſem Satze wird uns beſtändig aufgegeben, von einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu finden. Dieſe aber bei einer Zahl, die kein Quadrat iſt, genau zu finden, iſt unmöglich. Denn eine Zahl mit ſich ſelbſt multiplicirt giebt eine Quadratzahl; aber eine Zahl und ein Bruch in ſich ſelbſt multiplicirt geben keine ganze Zahl, ſondern auch einen Bruch. Wie man aber eine Wurzel findet, deren Quadrat einer gegebenen Zahl ſehr nahe gleich kommt, iſt von Hero in den Μετρικοῖς, und von Pappus, Theon und Andern, welche die Μεγάλη Σύνταξις von Klaudius Ptolemäus commentirt haben, gelehrt worden. Daher haben wir nicht nöthig Unterſuchungen hierüber anzuſtellen, da Freunde der Wiſſenſchaft bei Jenen nachſehen können. Hier ſcheint alſo Eutokius offenbar zu ſagen, daß er die Ausziehung der Quadratwurzeln darum nicht mittheile, weil er ſie aus den Werken von Hero, Pappus, Theon und Anderen als bekannt vorausſetzen dürfe. Aber, fragen wir, warum führt er denn ſo ſorgfältig alle vorkommenden Multiplicationen aus, die doch gewiß nicht weniger bekannt waren? Ich glaube, die angeführte Stelle anders verſtehen zu müſſen. Eutokius ſagt nur, er wolle das Princip, auf welchem, rein wiſſenſchaftlich betrachtet, die Ausziehung der Quadratwurzel beruhe, nicht auseinanderſetzen, weil Andere vor ihm, die Jedermann nachleſen könne, das hinlänglich gethan haben. Er ſpricht aber hier nicht von der praktiſchen Anwendung dieſes Princips. Allerdings war durch die von Theon auseinandergeſetzte Methode (die Werke von Hero und Pappus ſind nicht mehr vorhanden), welche wir unten darſtellen wollen, wiſſenſchaftlich die Möglichkeit gegeben, die Operation von den in Sexageſimaltheilen ausgedrückten Zahlen auf Zahlen in dem Decimalſyſteme zu übertragen. Eine andere Frage iſt aber die, ob dieſe Übertragung der Methode auf größere Zahlen im Decimalſyſtem in der Praxis ſich auch als anwendbar bewährte. Daß das aber nicht der Fall war, beweiſt Eutokius ſelbſt durchweg, indem er immer das umgekehrte Verfahren wählt, und multiplicirt, anſtatt durch eine auf das Princip gegründete Operation die Wurzel analytiſch herzuleiten. So beſitzen wir, um ein Analogon

Digitized by Google

anzuführen, ſeit beinahe drei Jahrhunderten Methoden, um auf directem Wege die Wurzeln einer biquadratiſchen Gleichung zu beſtimmen; ich glaube aber nicht, daß ſich ſchon irgend Jemand bei einer wirklich vorliegenden Gleichung der Methoden von Ferrari, Bombelli, Descartes u. ſ. w. bedient hat, ſo richtig dieſelben auch in theoretiſcher Hinſicht ſind; ſondern Jeder wird die weniger wiſſenſchaftlichen, aber unendlich leichter zum Ziele führenden Näherungsmethoden in der Praxis anwenden.

Eben ſo wenig bietet uns die ganze Griechiſche Literatur ein Beiſpiel von einer ausgeführten Diviſion in gewöhnlichen Zahlen dar. Eutokius, der einzige Schriftſteller, der uns überhaupt ausgeführte Rechnungen in dem gewöhnlichen Griechiſchen Decimalſyſtem aufbewahrt hat, hat in ſeinem Commentar keine Gelegenheit gefunden, eine Diviſion zu verrichten. Theon in ſeinem Commentar über Ptolemäus giebt uns auch von der Diviſion Beiſpiele, aber gleichfalls im Sexageſimalſyſtem; das von ihm gebrauchte Verfahren läßt ſich allerdings auch auf das Decimalſyſtem übertragen, wie Delambre [9]) gezeigt hat, nur wird dann die Operation ebenfalls weitläuftiger, als bei den Ptolemäiſchen Brüchen, wenn ſie auch nicht ſo große Schwierigkeiten darbietet, wie die Wurzelausziehung.

Bevor wir weiter gehen, müſſen wir erſt etwas über die bei den Griechen übliche Bezeichnung der Brüche ſagen. Die einfachſten Brüche, deren Zähler die Einheit iſt, und mit denen die Alten ſich am liebſten beſchäftigten, bezeichneten ſie auf die Art, daß ſie bloß den Zahlbuchſtaben des Nenners hinſchrieben und denſelben oben mit einem Apex gleich dem Acutus bezeichneten; ſo bedeutet γ' $\frac{1}{3}$, δ' $\frac{1}{4}$, ε' $\frac{1}{5}$, $\xi\delta'$ $\frac{1}{64}$ u. ſ. w. [10]). Nur der erſte aller Brüche, $\frac{1}{2}$, macht davon in der Regel eine Ausnahme und wurde durch ein eigenes Zeichen angedeutet, welches nicht, wie in manchen uncorrecten Druk-

9) Hist. de l'astron. anc. T. II. p. 26. Arithm. d. Griech. S. 33.

10) Eine ähnliche Bezeichnung habe ich noch in der Lateiniſchen Ausgabe des Euklid von Zambertus (Paris. 1516) gefunden, wo fol. 248 (ad Eucl. XIV. 8) die Brüche, deren Zähler die Einheit iſt, durch einen horizontalen Strich über dem Nenner angedeutet werden: $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$, $\overline{12}$, $\overline{18}$, $\overline{24}$, $\overline{48}$, $\overline{72}$, $\overline{96}$, $\overline{144}$, $\overline{192}$ für $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ u. ſ. w. Auch finden ſich daſelbſt eigene Zeichen für die angeführten Brüche von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{192}$, deren erſtes mit dem Griechiſchen Zeichen für $\frac{1}{2}$ übereinſtimmt. Die übrigen will ich nicht hieherſetzen. Andere Abbreviaturen für Brüche giebt Montfaucon (Palaeogr. p. 361) aus einem Pariſer Codex.

Drucken geſchieht, mit dem Buchſtaben K zu verwechſeln iſt[11]). Da die Rechnung mit dieſen Brüchen bedeutend leichter iſt als mit ſolchen, deren Zähler die Einheit überſchreitet, ſo löſen die Griechen die letzteren, wo es ſich thun läßt, gern in mehre Brüche der erſten Art auf. So ſchreibt Eutokius für $\frac{33}{64}$ lieber $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{64}$, und $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{16}$ für $\frac{9}{16}$, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ für $\frac{3}{4}$, ganz ähnlich wie die wo möglich alle Zahlen durch Worte ausdrückenden Araber für drei Achtel ſagen ein Viertel und die Hälfte eines Viertels (رابع ونصف رابع). Ja, Eutokius geht ſo weit, daß er den Bruch $\frac{49}{64}$ ſogar in drei andere, $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{64}$ auflöſt. Ein merkwürdiges Beiſpiel von einer näherungsweiſe vollzogenen Zerlegung eines Bruchs in zwei kleinere mit dem Zähler 1, welches Eutokius Commentar uns darbietet, will ich gleich an dieſer Stelle mitnehmen; ich meine die oben ſchon berührte Zerlegung des Bruchs $\frac{15}{64}$ in die Summe von $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{15}$[12]). Nun iſt $\frac{1}{6} = \frac{10\frac{2}{3}}{64}$, $\frac{1}{15} = \frac{4\frac{4}{15}}{64}$, alſo die Summe beider erſt $= \frac{14\frac{14}{15}}{64}$, demnach um $\frac{1}{960}$ zu klein. Es fragt ſich, auf welchem Wege Eutokius zu dieſer einfachen Zerlegung gelangt iſt. Vielleicht machte er folgende Betrachtung; da in dem Bruche $\frac{15}{64}$ der Zähler nahe ein Viertel des Nenners iſt, ſo wird der Werth des Bruchs nicht bedeutend verändert, wenn man von dem Zähler 1 und von dem Nenner 4 wegnimmt, ſo daß $\frac{15}{64}$ beinahe gleich $\frac{14}{60} = \frac{7}{30} = \frac{5}{30} + \frac{2}{30} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15}$ wird. Vielleicht gefällt auch Einem oder dem Andern die Ableitung von Delambre[13]) beſſer, welcher den Übergang ſo darſtellt:

$$\frac{15}{64} = \frac{45}{192} = \frac{32+13}{192} = \frac{1}{6} + \frac{13}{192} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14\frac{10}{13}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{15}$$

Mir ſcheint die Darſtellung, die ich gegeben habe, einfacher zu ſein. Wir kehren indeß zu unſerm Gegenſtande zurück. Die eben dargeſtellte Bezeichnung der Brüche war aber einerſeits nicht allgemein angenommen, wie wir aus Diophant erſehen, der auch die einfachen Brüche mit dem Zähler 1 ſo ſchreibt, wie alle übrigen, andrer-

---

11) In Hoffmann's Überſetzung von Delambre's Schrift über die Arithmetik der Griechen S. 25 ſtehen die ſonderbaren Worte: „Das Zeichen K, welches unſerm k gleicht, bedeutet $\frac{1}{2}$.“ Das erſte Zeichen iſt ganz deutlich ein großes, das zweite ein kleines k. In der zweiten Ausgabe des Originals (Delambre Hist. de l'astron. anc. T. II.) habe ich eine ähnliche Stelle nicht gefunden; die erſte Ausgabe in Peyrard Oeuvres d'Archimède habe ich nicht zur Hand.

12) Ausg. v. Gutenäcker S. 88 und 134.

13) Arithm. der Griechen S. 25. Hist. de l'astr. anc. T. II. p. 21.

ſeits war dieſe Methode nicht ausreichend für Brüche, deren Zähler nicht die Einheit iſt. Dieſe letzteren Brüche nun, und oft auch die erſteren bezeichnen die Griechen ſo, daß ſie in die ordentliche Zeile der Zahlen und Worte den Zähler ſtellen, und den Nenner ihm als Exponenten oben anſetzen, ſo daß z. B. $\overline{\vartheta}^{\iota\alpha'}$ oder $\vartheta^{\iota\alpha}$ bei Archimedes und Eutokius $\frac{9}{11}$ bedeutet, und ebenſo ſehr oft bei Diophant, ſelbſt bei großen Zahlen, nur mit dem Unterſchiede, daß wenigſtens in den gedruckten Ausgaben ſtatt des Acutus ein Circumflexus oben an den Nenner geſetzt wird; z. B. **Dioph. IV, 17.** $\overline{\gamma.\varsigma\chi\kappa\alpha}^{\beta\psi\delta\sim} = \frac{36621}{2704}$; **IV, 18** $\overline{\iota\zeta.\text{ϡ}\pi\vartheta}^{\tilde{\alpha}.\omega\iota\varsigma\sim} = \frac{170989}{10816}$. In dem letzten Beiſpiele iſt bei dem α des Nenners außer dem Myriadenpuncte (ſ. oben) noch einmal das Zeichen ~ geſetzt, um, wie es ſcheint, davor zu warnen, daß man es für $\alpha = 1000$ halte, da in der Zahl die Stelle der Tauſender leer geblieben iſt. Sonſt drückt Diophant auch, zumal bei größeren Zahlen, das Bruchverhältniß zuweilen ſo aus, daß er zwiſchen die Zahl des Zählers und des Nenners die Worte *ἐν μορίῳ* oder *μορίου* ſetzt, z. B. **IV, 29.** $\overline{\rho\nu.\zeta\text{ϡ}\pi\delta}$ *μορίου* $\kappa\varsigma.\beta\rho\mu\delta$, das heißt $\frac{1507984}{262144}$. Es ſei mir erlaubt, hier eine intereſſante Stelle aus Diophant (IV, 45) abzuſchreiben. Der Verfaſſer hat für drei geſuchte Zahlen die Werthe $\overline{\alpha.\alpha\zeta}^{\psi\kappa\varsigma\sim} = \frac{11007}{726}$, $\overline{\beta\omega\iota\zeta}^{\psi\kappa\varsigma\sim} = \frac{2817}{726}$ und $\overline{\pi\zeta}^{\psi\kappa\varsigma\sim} = \frac{87}{726}$ gefunden. Nun verlangt aber die Aufgabe, daß die Summe von je zweien dieſer Zahlen eine Quadratzahl ſei; da fährt der Auctor ſo fort: *καὶ ἐπεὶ τὸ μόριον τὸ* $\overline{\psi\kappa\varsigma}$ *οὐκ ἔστιν τετράγωνος, ἕκτον δὲ ἔστιν αὐτοῦ, ἐὰν λάβωμεν* $\overline{\rho\kappa\alpha}$, *ὅ ἐστι τετράγωνος· πάντων οὖν τὸ ἕκτον καὶ ὁμοίως ἔσται ὁ μὲν πρῶτος* $\overline{\alpha\omega\lambda\delta}^{\rho\kappa\tilde{\alpha}}.\overline{\alpha}^{\beta\sim}$ *· ὁ δὲ δεύτερος* $\overline{\upsilon\xi\vartheta}^{\rho\kappa\tilde{\alpha}}.\overline{\alpha}^{\beta\sim}$ *· ὁ δὲ τρίτος* $\overline{\iota\delta}^{\rho\kappa\tilde{\alpha}}.\overline{\alpha}^{\beta\sim}$ *· καὶ ἐὰν ἐν ὁλοκλήροις θέλῃς, ἵνα μὴ τὸ ἥμισυ ἐπιτρέχῃ, εἰς τέσσαρα ἔμβαλες· καὶ ἔσται ὁ πρῶτος* $\overline{\zeta\tau\lambda\eta}^{\upsilon\pi\delta\sim}$ *· ὁ δὲ δεύτερος* $\overline{\alpha\omega o\eta}^{\upsilon\pi\delta\sim}$ *· ὁ δὲ τρίτος* $\overline{\nu\eta}^{\upsilon\pi\delta\sim}$. d. h. „und da der Nenner 726 kein Quadrat, ſein Sechſtel aber, nämlich

121, ein Quadrat iſt; ſo wird, wenn wir von Allem ein Sechſtel nehmen, die erſte Zahl $\frac{1834\frac{1}{2}}{121}$, die zweite $\frac{469\frac{1}{2}}{121}$, die dritte $\frac{14\frac{1}{2}}{121}$; und wenn du es in ganzen Theilen verlangſt, ſo größere, damit das Halbe nicht mit einlaufe, durch vier, und es wird ſein die erſte Zahl $\frac{7338}{484}$, die zweite $\frac{1878}{484}$, die dritte $\frac{58}{484}$." — Für unſern Zweck bemerkenswerth iſt hier die Bedeutung von $\overset{\beta^{\sim}}{\overline{\alpha}}$, welches nicht abſolut eine halbe Einheit, ſondern die Hälfte von $\frac{1}{121}$ anzeigt, was ich dadurch angedeutet habe, daß ich in der Überſetzung das $\frac{1}{2}$ in den Zähler ſtellte; denn, dem Griechiſchen analog geſchrieben $\frac{1834}{121}\,\frac{1}{2}$ würde entweder gar keinen, oder den Sinn haben, daß beide Brüche zu addiren wären. Übrigens wäre Diophant einfacher und ohne die Brüche von Brüchen zu demſelben Reſultat gekommen, wenn er in den urſprünglich gefundenen Ausdrücken Zähler und Nenner durch 3, anſtatt durch 6 dividirt, und mit 2 multiplicirt hätte; denn mna^2 wird ſowohl, wenn man es mit mn, als wenn man es $\frac{m}{n}$ multiplicirt oder dividirt, ein Quadrat.

Wie Diophant Brüche bezeichnet, deren Nenner mehrgliedrig iſt, und einen Ausdruck der unbekannten Größe in ſich ſchließt, geht uns hier nichts an, weil es nicht mehr reine Zahlenrechnung iſt. Wir werden gehörigen Orts auf dieſen Gegenſtand zurückkommen.

Nachdem wir geſehen, wie die Griechen Brüche geſchrieben haben, ſteht uns nichts weiter im Wege, was das Verſtändniß der von Eutokius mitgetheilten Rechnungen hindern könnte. Alle ſeine Rechnungen haben den Zweck, nachzuweiſen, daß die von Archimedes angenommenen Quadratwurzeln der Wahrheit hinlänglich nahe kommen, zu welchem Ende er die vorliegende Wurzel auf das Quadrat erhebt. Er fängt, umgekehrt wie wir, die Multiplication allemal mit der höchſten Ziffer, alſo von der linken Seite an; er multiplicirt mit der höchſten Ziffer des Multiplicators jede Ziffer des Multiplicandus und ſchreibt die einzelnen Producte in eine Reihe; dann verfährt er eben ſo mit der zweiten und den folgenden Ziffern, und addirt endlich die vorhandenen einzelnen Reſultate. Wir wollen ſeine

Methode zuerſt an einem ganz einfachen Beiſpiel veranſchaulichen. Er hebt z. B. (S. 84. der Ausg. v. Gutenäcker) die Zahl $\overline{\sigma\xi\varepsilon}$, d. h. 265 auf das Quadrat; nun verfährt er ſo: 200 mal 200 giebt 4 Myriaden, $\overset{\delta}{M}$; 200 mal 60 giebt eine Myriade und 2000, $\overset{\alpha}{M}{}_{,}\beta$; 200 mal 5 giebt 1000, ${}_{,}\alpha$; dieſe Producte bilden die erſte Reihe. Weiter giebt 60 mal 200 eine Myriade und 2000, $\overset{\alpha}{M}{}_{,}\beta$; 60 mal 60 giebt 3000 und 600, ${}_{,}\gamma\chi$; 60 mal 5 giebt 300, τ; dieſes iſt die zweite Reihe. Endlich 5 mal 200 giebt 1000, ${}_{,}\alpha$; 5 mal 60 giebt 300, τ; und 5 mal 5 giebt 25, $\varkappa\varepsilon$; das iſt die dritte Reihe. Die Addition dieſer einzelnen Elemente giebt das Endreſultat 7 Myriaden und 225, $\overset{\zeta}{M}\sigma\varkappa\varepsilon$. Ich ſetze das Rechnungsſchema, welches er giebt, hieher, und füge demſelben die Übertragung in unſere Ziffern bei.

$\overline{\sigma\xi\varepsilon}$	265
$\overline{\sigma\xi\varepsilon}$	265
$\overset{\delta}{M}\ \overset{\alpha}{M}{}_{,}\beta\ {}_{,}\alpha$	40000, 12000, 1000
$\overset{\alpha}{M}{}_{,}\beta\,\overline{{}_{,}\gamma\chi\tau}$	12000, 3600, 300
${}_{,}\alpha\ \overline{\tau\varkappa\varepsilon}$	1000, 300, 25
$\overset{\zeta}{M}\ \overline{\sigma\varkappa\varepsilon}$	70225

Dieſe Methode und Anordnung der Rechnung iſt ganz dieſelbe, welche wir bei der Multiplication algebraiſcher Ausdrücke befolgen, wo wir auch zuerſt alle Partialproducte hinſchreiben und darauf die gleichartigen addiren.

Eine große Anzahl der Beiſpiele, welche Eutokius uns ſo ausgerechnet vor Augen führt, enthält Brüche, mit denen er aber ganz auf dieſelbe Weiſe verfährt. Als Beiſpiel wähle ich die Rechnung S. 106, wo $1838_{\frac{9}{11}}$ oder $\overline{{}_{,}\alpha\omega\lambda\eta}\ \vartheta\ \overline{\iota\alpha}'$ auf das Quadrat erhoben wird.

Erſte Reihe. 1000 · 1000 = 100 Myriaden, $\overset{\varrho}{M}$

1000 · 800 = 80 Myriaden, $\overset{\pi}{M}$

1000 · 30 = 3 Myriaden, $\overset{\gamma}{M}$

1000 · 8 = 8000, $\overline{͵\eta}$

1000 · $\frac{9}{11}$ = 818$\frac{2}{11}$, $\overline{\omega\iota\eta}\ \overline{\beta}^{\iota\alpha'}$

Zweite Reihe. 800 · 1000 = 80 Myriaden, $\overset{\pi}{M}$

800 · 800 = 64 Myriaden, $\overset{\xi\delta}{M}$

800 · 30 = 2 Myriaden und 4000, $\overset{\beta}{M}\ \overline{͵\delta}$

800 · 8 = 6400, $\overline{͵\varsigma\upsilon}$

800 · $\frac{9}{11}$ = 654$\frac{6}{11}$, $\overline{\chi\nu\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

Dritte Reihe. 30 · 1000 = 3 Myriaden, $\overset{\gamma}{M}$

30 · 800 = 2 Myriaden und 4000, $\overset{\beta}{M}\ \overline{͵\delta}$

30 · 30 = 900, ϡ

30 · 8 = 240, $\overline{\sigma\mu}$

30 · $\frac{9}{11}$ = 24$\frac{6}{11}$, $\overline{\kappa\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

Vierte Reihe. 8 · 1000 = 8000, $\overline{͵\eta}$

8 · 800 = 6400, $\overline{͵\varsigma\upsilon}$

8 · 30 = 240, $\overline{\sigma\mu}$

8 · 8 = 64, $\overline{\xi\delta}$

8 · $\frac{9}{11}$ = 6$\frac{6}{11}$, $\overline{\varsigma}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

Fünfte Reihe. $\frac{9}{11}$ · 1000 = 818$\frac{2}{11}$, $\overline{\omega\iota\eta}\ \overline{\beta}^{\iota\alpha'}$

$\frac{9}{11}$ · 800 = 654$\frac{6}{11}$, $\overline{\chi\nu\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

$\frac{9}{11}$ · 30 = 24$\frac{6}{11}$, $\overline{\kappa\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

$\frac{9}{11}$ · 8 = 6$\frac{6}{11}$, $\overline{\varsigma}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

$\frac{9}{11}$ · $\frac{9}{11}$ = $\frac{81}{121}$, $\overline{\pi\alpha}^{\rho\kappa\alpha'}$

Demnach ſieht das Schema ſo aus:

$\overline{\alpha\omega\lambda\eta}\ \overline{\vartheta}^{\iota\alpha}$

$\overline{\alpha\omega\lambda\eta}\ \overline{\vartheta}^{\iota\alpha'}$

$\overset{\varrho}{M}\ \overset{\pi}{M}\ \overset{\gamma}{M}\ ,\eta\ \overline{\omega\iota\eta}\ \overline{\beta}^{\iota\alpha'}$

$\overset{\pi}{M}\ \overset{\xi\delta}{M}\ \overset{\beta}{M}\ ,\delta\ ,\varsigma\ \overline{\upsilon\chi\nu\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

$\overset{\gamma}{M}\ \overset{\beta}{M}\ ,\delta$ ϡ $\overline{\sigma\mu\kappa\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

$,\eta\ ,\varsigma\ \overline{\upsilon\sigma\mu\xi\delta\varsigma}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}$

$\overline{\omega\iota\eta}\ \overline{\beta}^{\iota\alpha'}\ .\ \overline{\chi\nu\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}\ .\ \overline{\kappa\delta}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}\ .\ \overline{\varsigma}\ \overline{\varsigma}^{\iota\alpha'}\ .\ \overline{\pi\alpha}^{\varrho\kappa\alpha'}$

$\overset{\tau\lambda\eta}{M}\ \overline{\alpha\ \sigma\nu\alpha}\ \overline{\zeta}^{\iota\alpha'}\ \ \overline{\pi\alpha}^{\varrho\kappa\alpha'}$

$\hat{\eta}\ \overset{\tau\lambda\eta}{M}\ \overline{\alpha\sigma\nu\beta}\ \overline{\lambda\zeta}^{\varrho\kappa\alpha'}$

d. h. 3381251 $\frac{7}{11}\ \frac{81}{121}$ oder 3381252 $\frac{37}{121}$.

Und nun noch ein Beiſpiel mit zwei Brüchen, wovon ich aber bloß das Schema hieherſetzen will (Guten. S. 103).

$\overline{\gamma\iota\gamma}$ 𐅵 δ'	3013 $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$
$\overline{\gamma\iota\gamma}$ 𐅵 δ'	3013 $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$
ϡ $\overset{\gamma}{M}$ $M\ \vartheta\ \alpha\ \overline{\varphi\psi\nu}$	9000000, 30000, 9000, 1500, 750
$\overset{\gamma}{M}\ \overline{\varrho\lambda\varepsilon\beta}$ 𐅵	30000, 100, 30, 5, $2\frac{1}{2}$
$\vartheta\ \overline{\lambda\vartheta\alpha}$ 𐅵 𐅵 δ'	9000, 30, 9, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ $(=\frac{3}{4})$
$\overline{\alpha\varphi\varsigma}$ *) 𐅵 $\delta'\ \eta'$	1500, 5, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$
$\overline{\psi\nu\gamma}$ **) $\delta'\ \eta'\ \iota\varsigma'$	750, $2\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ $(=\frac{3}{4})$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$
ϡ $\overset{\eta}{M}\ \overline{\beta\chi\pi\vartheta}\ \iota\varsigma'$	9082689 $\frac{1}{16}$

*) Pro $\overline{\alpha\varphi\varsigma}$ malim $\alpha\varphi\varepsilon\alpha$. **) Pro $\psi\nu\gamma$ malim $\psi\nu\beta$ 𐅵 𐅵.

Dieſen beiden Bemerkungen von Gutenäcker muß ich vollkommen beiſtimmen; die im Griechiſchen Schema dargeſtellte Zuſammenziehung von 5 und $1\frac{1}{2}$ in $6\frac{1}{2}$, und von $2\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ in 3, wo noch überdieß das letztere $\frac{1}{2}$ mit dem folgenden $\frac{1}{4}$ enge verbunden iſt, iſt ohne ein Beiſpiel, das die Schreibart rechtfertigen könnte.

Multiplicationen ungleicher Factoren kommen bei Eutokius nicht vor; es iſt indeß kein Grund vorhanden zu glauben, daß ſie anders als die vorliegenden ſeien ausgeführt worden. Die Addition und Subtraction geſchah ganz wie bei uns mit benannten Zahlen. Es wird hinreichend ſein, das Schema aufzuſtellen.

Addition.	$\overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}}$ ͵ϛ – μ α	3 2 6 0 4 1
	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γ υ – ϑ	2 3 4 0 9
	$\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$ ͵ϑ υ ν	3 4 9 4 5 0
Subtraction.	$\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}$ ͵γ χ λ ϛ	9 3 6 3 6
	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$ ͵γ υ – ϑ	2 3 4 0 9
	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$ – σ κ ζ	7 0 2 2 7

Eutokius ſtellt zwar die Schemata nicht ſo auf, indeß iſt dieſe Untereinanderſtellung natürlich und wahrſcheinlich.

Dieſes ſind die praktiſchen Rechnungen, welche der Commentar des Eutokius uns darbietet. Wer ſich von dem Weſen dieſer Rechnungen einen deutlicheren Begriff machen will, ohne ſich in die Griechiſche Zahlenbezeichnung hineinzuarbeiten, der darf nur, nach Delambre's Methode, die verſchiedenen Potenzen von zehn mit Buchſtaben bezeichnen, etwa die Myriaden mit *m*, die Tauſende mit *t*, die Hunderte mit *h*, die Zehner mit *z*, die Einer mit *e*, und z. B. für 9082689 ſchreiben $908^m\ 2^t\ 6^h\ 8^z\ 9^e$, ſo hat er ganz das dem Griechiſchen entſprechende Bild der benamten Zahlen. Ich hielt dieſe Darſtellungsweiſe für unnöthig.

Einige intereſſante hiſtoriſche Data enthält noch der Schluß von Eutokius Commentar, weshalb ich denſelben hier mittheilen will. Ὡς μὲν οὖν ἐνεχώρει, οἱ παῤ αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοὶ μετρίως ἐυσαφηνίσθησαν. Ἰστέον δὲ, ὅτι καὶ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ Ὠκυτοβόῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δἰ ἀριθμῶν ἑτέρων, ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγάγων. Τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν Ἀρχιμήδους σκοπόν. Ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ, τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας. Ὥστε οὐδὲ Πόρος ὁ Νικαεὺς εὔκαιρον εὑρηθήσεται μέμψιν ἐπάγων Ἀρχιμήδει, ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι, ποίᾳ εὐθείᾳ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια. Ἐξ ὧν αὐτὸς

ἐν τοῖς Κηρίοις φησί, τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον, Φίλωνα λέγων τὸν ἀπὸ Γαδάρων, εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν, τῶν ὑπ' Ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε $\overline{\zeta}$ φημὶ καὶ τῶν $\overline{\kappa\beta}$. Ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἠγνοηκότες· κέχρηται δὲ καὶ τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὔκολον παρακολουθεῖν, τὸν μὴ διὰ τῶν Μάγνου Λογιστικῶν ἠγμένον. Εἰ δέ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ καταγαγεῖν, ἐχρῆν τοῖς ἐν τῇ Μαθηματικῇ Συντάξει τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα, διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν etc. etc. D. h. „So viel es möglich war, habe ich die von dem Verfaſſer aufgeſtellten Zahlen erläntert. Zu bemerken iſt noch, daß auch Apollonius von Perga in dem Ὠκυτόβοος daſſelbe durch andere Zahlen bewieſen hat, indem er die Annäherung noch weiter treibt. Das ſcheint nun zwar genauer zu ſein, es iſt aber für den Zweck des Archimedes nicht geeignet; ich ſagte nämlich, er habe in dieſem Buche den Zweck, nur eine Annäherung zu finden, wegen ihres Gebrauchs im Leben. Daher wird man auch finden, daß Porus von Nikäa ſehr unpaſſend gegen Archimedes ſich tadelnd ausſpricht, daß er nicht genau beſtimmt habe, welcher geraden Linie die Peripherie des Kreiſes gleich ſei. Daher ſagt er in ſeinem Buche Κηρία, daß ſein Lehrer, Philo von Gadara, dieſes auf genauere Zahlen geführt habe, als die Archimediſchen ſind, nämlich 7 und 22. Alle nach der Reihe ſcheinen den Zweck deſſelben verkannt zu haben; denn ſie bedienen ſich der Multiplicationen und Diviſionen mit Myriaden, denen nicht leicht Jemand folgen kann, der nicht die Logiſtik des Magnus durchſtudirt hat. Wenn aber Jemand die Sache ganz bis auf das Kleinſte durchführen wollte, ſo müßte er ſich der in der Μαθηματικὴ Σύνταξις des Claudius Ptolemäus gelehrten Methode bedienen, und durch Grade und Minuten und durch gerade Linien im Kreiſe die Sache bewerkſtelligen u. ſ. w."

Was hier zunächſt das angeführte Werk von Apollonius anlangt, ſo iſt daſſelbe verloren gegangen, und man weiß nicht mehr, weder was der Titel Okytoboos (oder Okytoboon) bedeutet, noch was der Inhalt deſſelben war. Dieſe Notiz bei Eutokius iſt die

einzige, die wir davon haben. Eutokius Ausdrucksweiſe läßt vermuthen, daß Apollonius in dieſem Werke ebenfalls das Kreisverhältniß beſtimmt hat. Dafür ſtimmt auch Wallis, nur ſagt er, wie oft, wieder zu viel [14]): **Sed et post Archimedem alii jam olim, utut ad minorem, credo, accurationem quam recentiores, eandem prosecuti sunt methodum** (die nämlich durch fortgeſetzte Halbirung des Bogens), **ut Apollonius Pergaeus in ejus Ocytoboo, qui ad nostras manus non pervenit, et Philo Gedarensis, quod testatur Eutocius etc.** Ob Apollonius in dieſem Okytoboos zugleich, vielleicht als erklärende Einleitung für ſeine Rechnungen, die Multiplication großer Zahlen gelehrt, und ob dieſes Werk, wie Wallis [15]) vermuthet, daſſelbe geweſen, aus welchem Pappus die in den Sätzen 15 bis 27 des zweiten Buchs ſeiner Sammlung vorgetragenen Lehren, von denen wir weiter unten ſprechen werden, entnommen hat, läßt ſich nicht entſcheiden, iſt aber, wie wir ſehen werden, nicht wahrſcheinlich.

Von Porus von Nikäa und ſeinem angeführten Werke, Κηρία, wiſſen wir eben ſo wenig, wie von ſeinem Lehrer Philo von Gadara. Es iſt dieſes die einzige Stelle, an welcher beide Auctoren genannt werden. Von dem Werke Κηρία iſt es ſogar unbeſtimmt, ob es Porus oder Ariſtoteles angehört habe. Denn an einer andern Stelle ſeines Commentars (S. 77) nennt Eutokius daſſelbe Ἀριστοτελικά.

Endlich ſcheint ein gewiſſer Magnus, von dem wir gar nichts

---

14) Opera T. II. p. 360.

15) Opera T. III, p. 599 (ad Pappum II, 18): Licet hinc et ex sequentibus Apollonium quendam (Pergaeum puto) tractatum scripsisse (qui periit) de numeris quantumvis magnis inter se multiplicandis, unde haec desumpta sunt collectanea. Quis fuerit ille liber, aut quomodo appellatus, non constat (eo quod secundi hujus collectaneorum libri initium desit), nisi forte (quod non est vero absimile) ille fuerit, quem Eutocius (sub finem commentariorum in Archimedis dimensionem circuli) ὠκυτόβοον vocat, ab Apollonio Pergaeo conscriptum, sed qui periit, cujus argumentum huic absimile non fuisse, inde constat. Das erhellt nun aus unſerer Stelle wohl nicht ſo ganz deutlich. Heilbronner aber ſchreibt dieſe Vermuthung von Wallis ganz getroſt als Thatſache ab (S. 277), indem er unter den verloren gegangenen Büchern von Apollonius aufführt: ὠκυτόβοος de numeris magnis multiplicandis.

wiſſen, in ſeiner Logiſtik über die Multiplication und Diviſion großer Zahlen, die über die Myriaden hinausgehen, geſchrieben zu haben.

Bei unſerer vollkommenen bis zu jeder beliebigen Ausdehnung ſich ſelbſt conſequent bleibenden Zahlenbezeichnung hat das Rechnen mit großen Zahlen durchaus keine eigenthümliche Schwierigkeit. Anders war es bei den Griechen, deren Zeichen und Zahlworte über die Myriaden hinaus unſicher und unbequem und von der Methode der kleineren Zahlen abweichend wurden, und es ſtellt ſich bei der Schwerfälligkeit ihrer Operationen recht deutlich die Wahrheit ans Licht, wie abhängig der Begriff von dem Zeichen iſt. Dagegen können wir auch den Scharfſinn derer nicht genug bewundern, welche die Schranken der Schrift und der Sprache durchbrechend ſich eigene Wege ſchufen, um Zahlen, die die alltäglichen Vorſtellungen weit überſchritten, dem Verſtande anſchaulich zu machen. Obenan ſteht hier wieder der Heros der Griechiſchen Mathematik, Archimedes, von dem wir ein in dieſer Hinſicht merkwürdiges Werk beſitzen, welches er Ψαμμίτης genannt hat, und in dem er ſich folgende Aufgabe ſtellt: Eine Zahl anzugeben, welche größer iſt als die Zahl der Sandkörner, die eine Kugel faſſen würde, deren Radius die Entfernung des Erdmittelpuncts von dem Fixſternhimmel iſt. Archimedes nimmt hier den Durchmeſſer der Sphäre der Fixſterne nach Ariſtarch's Theorie kleiner als zehntauſend Millionen Stadien an (ἐλάττων ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ϙ̅). Die intereſſante dem Könige Gelon von Syrakus zugeeignete Schrift ſcheint eine gelegentliche Veranlaſſung gehabt zu haben. Vielleicht hatte in Gelon's und Archimed's Geſellſchaft Jemand behauptet, die Anzahl der auf der Erde vorhandenen Sandkörner laſſe ſich durch keine Zahl angeben, wodurch bewogen Archimedes ſich jene noch viel umfaſſendere Aufgabe ſtellte. Nun überſteigt aber die Zahl, welche bei dieſer Rechnung herauskommt, bei Weitem die Grenzen der Griechiſchen Zahlworte und Zahlzeichen. Darum ſieht der Verfaſſer ſich genöthigt, ein eigenthümliches Zahlenſyſtem ſich zu bilden. Ich erinnere hier daran, was ich oben ſchon erwähnt habe, daß nämlich die Griechen bei der Bildung größerer Zahlen gewohnt waren, von vier zu vier Stellen fortzuſchreiten. Dieſe bekannte Vorſtellung behält Archimedes bei den erſten acht Stellen bei, und nennt ſie πρῶτοι ἀριθμοὶ, erſte Zahlen, ſo daß die Zahlen

von 1 bis 9	μονάδες	τῶν πρώτων ἀριϑμῶν
10 – 99	δεκάδες oder δέκα μονάδες	
100 – 999	ἑκατοντάδες od. ἕκοντα μονάδες	
1000 – 9999	χιλιάδες oder χίλιαι μονάδες	
10000 – 99999	μυριάδες	
100000 – 999999	δέκα μυριάδες	
1000000 – 9999999	ἕκοντα μυριάδες	
10000000 – 99999999	χίλιαι μυριάδες	

heißen. Und nun fährt er ſo fort: *τῶν δὲ πρώτων ἀριϑμῶν αἱ μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσϑω δευτέρων ἀριϑμῶν*, d. h. er betrachtet die Zahl 100000000, oder nach Griechiſcher Vorſtellung 1,0000,0000 als eine neue Einheit, und baut darauf nach dem eben gegebenen Schema eine zweite Zahlenordnung, welche alſo bis zur Ordnung 1000000000000000 oder den *χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριϑμῶν* fortſchreiten. Es heißt nämlich: *καὶ ἀριϑμείσϑωσαν δευτέρων ἀριϑμῶν μονάδες καὶ ἀπὸ τᾶν μονάδων δεκάδες καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες καὶ μυριάδες ἐς τὰς μυρίας μυριάδας. Πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριϑμῶν μονὰς καλείσϑω τρίτων ἀριϑμῶν.* Alſo 1 mit ſechszehn angehängten Nullen oder zehntauſend Billionen ſtellen eine neue Einheit dar, und ſo weiter fort. Die Einheiten der verſchiedenen Ordnungen ſtellen ſich alſo einfach ſo dar:

Einheit	der	erſten Ordnung	—	10^0 oder 1
„	„	zweiten „	—	10^8
„	„	dritten „	—	10^{16}
„	„	vierten „	—	10^{24}
„	„	fünften „	—	10^{32}
„	„	ſechſten „	—	10^{40}
„	„	ſiebenten „	—	10^{48}
„	„	achten „	—	10^{56}

Im Allgemeinen iſt die Einheit der *n*ten Ordnung $10^{8(n-1)}$. Die Zahlen der neunten Ordnung braucht Archimedes nicht mehr, denn ſein Reſultat verliert ſich in den tauſend Myriaden der achten Zahlen. Nichts deſto weniger lehrt er dieſes Syſtem beliebig fortſetzen. Er ſagt nämlich: *καὶ ἀεὶ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριϑμοὶ τὰ ὀνόματα ἐχόντων, ἐς τὰς μυριακισμυριοστῶν ἀριϑμῶν μυρίας μυριάδας*, d. h. man kann auf dieſe Weiſe bis zu den tauſendmillionſten Zahlen fortſchreiten. Ja, ſagt er, man kann noch weiter

gehen; man nenne die bis jetzt behandelten Zahlen Zahlen der erſten Periode, die letzte Zahl der erſten Periode, oder die μύριαι μυριάδες der zehntauſendmillionſten Zahlen, alſo

$$10^{800000000}$$

nenne man eine Einheit der erſten Zahlen der zweiten Periode. Dieſe zweite Periode wird dann wieder in zweite, dritte, vierte u. ſ. w. bis zu den tauſendmillionſien (μυριακισμυριοστοὶ) Zahlen eingetheilt; die letzte Zahl dieſer zweiten Periode, oder zehntauſend Myriaden der tauſendmillionſten Zahlen der zweiten Periode, heiße dann eine Einheit der erſten Zahlen der dritten Periode, und ſo weiter fort.

Dieſes auf den einfachen Begriff der geometriſchen Progreſſion gebaute Syſtem hat neben dem Vortheil der Ausdehnbarkeit bis zu jeder beliebigen Grenze noch den der klaren und leichten Überſichtlichkeit und macht ſeinem Urheber um ſo mehr Ehre, je einfacher es iſt. Es iſt aber zu viel geſagt, wenn man in dieſem Syſtem ein Bewußtſein des Indiſchen Decimalſyſtems mit Stellenwerth entdecken will, wie es wohl zuweilen geſchieht. Denn das progreſſive Fortſchreiten der Zahlen nach den Potenzen von zehn lag ja von jeher in der Griechiſchen Sprache begründet, und Archimedes hat weiter nichts gethan, als daß er die Sprache, welche im gewöhnlichen Leben nicht über μυριάκις μύριαι μυριάδες hinausreichte, mit Gewandtheit bis ins Unendliche hin bereicherte; ſein Syſtem erſtreckt ſich demnach nur auf die *Zahlworte*, nicht auf die *Zahlzeichen*; es hat alſo mit dem Indiſchen Poſitionsſyſtem nichts gemein, als die von jeher in Griechenland bekannte Progreſſion von zehn zu zehn, und die unendliche Ausdehnbarkeit.

Die einfache Regel, welche Archimedes für den Gebrauch dieſes Syſtems giebt, iſt folgender Satz: *Wenn mehre Zahlen von der Einheit an in geometriſcher Progreſſion ſtehen, ſo wird jedes Product von irgend zwei Gliedern dieſer Progreſſion derſelben Progreſſion angehören, indem es ſo weit von dem größeren Factor entfernt iſt, als der kleinere Factor von der Einheit; und der Abſtand des Products von der Einheit wird um eins kleiner ſein, als die Summe der Abſtände der beiden Factoren von der Einheit*[16]. Es iſt bei dieſem Satze nur zu bedenken, daß die

16) Wallis Opera T. III. p. 521: Ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνὰ

Griechen bei Angaben von Abſtänden beide Grenzen mitzählen; das heißt, wenn ſie die Progreſſion haben

$$1 \ a \ a^2 \ a^3 \ a^4 \ a^5 \ a^6 \ a^7 \ a^8 \ a^9 \ a^{10}$$

wo a^{10} z. B. das Product von a^4 in a^6 iſt, ſo ſteht nach Griechiſcher Vorſtellungsweiſe a^4 um 5, a^6 um 7 von der Einheit ab, alſo a^{10} um 5 von a^6 und um $5 + 7 - 1 = 11$ von der Einheit. Wir würden nach unſerer Vorſtellung alle dieſe Zahlen um 1 vermindern müſſen, oder wir müßten uns der Ordinalzahlen als Stellenzahlen bedienen. Eben ſo ſagt der Grieche „nach drei Tagen," wo wir „nach zwei Tagen" oder „am dritten Tage" ſagen, weil wir das Anfangsglied nicht mitzählen.

Ein Beiſpiel möge zeigen, auf welche einfache Weiſe Archimedes ausmittelt, welcher Rubrik ein erhaltenes Reſultat angehört. Er hatte vorher berechnet, daß eine Kugel, deren Durchmeſſer 100 *δάκτυλοι* beträgt, weniger Sandkörner in ſich faßt, als 1000 Myriaden der zweiten Zahlen. Dann fährt er ſo fort[17]: „Ferner iſt eine Kugel, welche 10000 *δάκτυλοι* zum Durchmeſſer hat, das 1000000fache (*πολλαπλασία ταῖς ρ̄ μυριάδεσσι*) derjenigen, welche 100 *δάκτυλοι* zum Durchmeſſer hat. Wenn man alſo von Sand eine Kugel hat, mit dem Durchmeſſer gleich 10000 *δάκτυλοι*, ſo iſt klar, daß die Zahl des Sandes kleiner ſein wird, als das Product der 1000 Myriaden der zweiten Zahlen in die 100 Myriaden. Da nun 1000 Myriaden der zweiten Zahlen in der Progreſſion die ſechszehnte Zahl von der Einheit iſt, die 100 Myriaden aber die ſiebente in derſelben Progreſſion, ſo iſt klar, daß das Product die zwei und zwanzigſte Zahl von der Einheit ſein wird. Von dieſen zwei und zwanzig aber gehören die acht erſten zu den erſten Zahlen, die acht folgenden zu den zweiten Zahlen, die ſechs übrigen zu den dritten Zahlen, und die letzte derſelben iſt zehn Myriaden der dritten Zahlen."

Wir kommen nun zu dem ſchon mehrmals erwähnten Fragment

λόγον ἐόντων, πολλαπλασιάζοντές τινες ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ἀπέχων ἀπὸ μείζονος τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάττων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνὰ λόγον ἀπέχῃ· ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάττονας ἢ ὅσους ἐστὶν ἀριθμὸς συναμφοτέρων, οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους.

17) Ib. p. 523.

aus dem zweiten Buche der mathematiſchen Sammlungen von Pappus, welches Wallis in der Oxforder Bibliothek aufgefunden und zuerſt 1688 Griechiſch und Lateiniſch mit Anmerkungen herausgegeben hat. Es iſt nachher im dritten Bande ſeiner Werke, Oxford 1699, fol. p. 595—614 wieder abgedruckt worden. Das Fragment enthält die Sätze 15 bis 27 des genannten Buchs, und giebt Regeln, die Multiplication der Vielfachen von zehn und deſſen Potenzen auf die Multiplication der entſprechenden Einheiten (πυθμένες) zurückzuführen, Regeln, die uns, denen das Bild unſerer Zahlzeichen in Gedanken vorſchwebt, ziemlich unnöthig ſcheinen, die aber für die Griechen von weſentlicherem Nutzen waren, als es ſcheint. Pappus beruft ſich in dieſen Sätzen, deren Anfang leider fehlt (denn der funfzehnte, mit dem das Fragment beginnt, iſt weder der erſte einer neuen Abhandlung, noch ſelbſt an und für ſich vollſtändig) öfters auf Apollonius [18], ohne denſelben nach der den Griechen doch ſo gebräuchlichen Weiſe durch einen Zuſatz näher zu beſtimmen, und ohne den Titel des Werkes zu nennen, aus welchem er ſeine Auszüge entnommen hat. Vielleicht oder wahrſcheinlich befanden ſich dieſe fehlenden Nachrichten in dem verloren gegangenen Anfange dieſes Abſchnitts. Mit ziemlicher Gewißheit läßt ſich indeß annehmen, daß hier der berühmte Mathematiker Apollonius von Perga, ὁ Περγαῖος, gemeint ſei, und es iſt intereſſant, dieſen μέγας γεωμέτρης, wie ſeine Landsleute ihn auszeichnender Weiſe nennen, auch auf dem Gebiete des Calculs geiſtreich beſchäftigt wiederzufinden. Nicht ſo augenſcheinlich iſt es, daß die Sätze ſeinem von Eutokius erwähnten Werke, welches den Titel Ὠκυτόβοος führte, angehört haben [19], und es läßt ſich über dieſe Frage nichts entſcheiden, ſo lange wir über das letztere Werk nicht genauere Nachrichten haben. Unwahrſcheinlich wird indeß dieſe Annahme der Identität beider Werke durch den Ausdruck des letzten Satzes vorliegender Schrift, wie wir weiter unten ſehen werden.

Hiſtoriſch merkwürdig an dieſen Sätzen iſt, daß Apollonius ſich in ähnlicher Art, wie wir es eben bei Archimedes geſehen haben, ein eigenes Syſtem bildet, um große Zahlen darzuſtellen. Wie Archimedes bei ſeiner Eintheilung in erſte, zweite, dritte u. ſ. w. Zahlen

18) Vergl. Satz 18. 19. 20. 24. 26. 27.

19) Vergl. die Note 15. dieſes Capitels.

von acht zu acht Stellen fortſchreitet, ſo ſchreitet Apollonius, der zu ſeinem Zwecke nicht ſo ungeheurer Zahlenausdrücke bedarf, von vier zu vier Stellen fort, und nennt die erſten vier Stellen Einheiten, μονάδες, die zweiten vier Stellen einfache Myriaden, μυριάδες ἁπλαῖ, die dritten vier Stellen doppelte Myriaden, μυριάδες διπλαῖ, dann ebenſo dreifache, vierfache u. ſ. w. Myriaden. Dieſe Namen ſind, wie es ſcheint, von der gewöhnlichen Bezeichnungsart hergenommen, indem er zehntauſend Myriaden oder μύριαι μυριάδες, welche man durch MM, und das Myriadenfache davon, welches man durch MMM andeutete, doppelte und dreifache Myriaden nannte. Graphiſch aber bezeichnet er ſelbſt oder Pappus dieſe Zahlenperioden anders; er ſetzt nämlich vor die Zahl der einfachen Myriaden das Zeichen Mα., vor die Zahl der doppelten Mβ., der dreifachen Mγ. und ſo fort. So drückt er z. B. im 27. Satze die Zahl 5,601,052,800,000 oder Griechiſch abgetheilt 5,6010,5280,0000 ſo aus: Mγ. ε̄ καὶ Mβ. ͵ϛῑ καὶ Mα. ͵εσπ̄. In den vorhandenen Sätzen ſagt Pappus nichts zur Erläuterung dieſes Princips, wahrſcheinlich aber hat er das in dem verloren gegangenen Anfange dieſer Abhandlung gethan.

Der Inhalt der einzelnen Sätze nun, welche Pappus vorlegt, iſt folgender:

S. 15. (Es ſind mehre Zahlen gegeben, von der Beſchaffenheit), daß ſie kleiner als 100, aber durch 10 theilbar ſind; man ſoll ihr Product (τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν) angeben, ohne ſie ſelbſt zu multipliciren.

Es ſeien die Zahlen ν ν ν μ μ λ (50, 50, 50, 40, 40, 30); die entſprechenden Einheiten (οἱ πυθμένες) werden alſo ſein ε ε ε δ δ γ (5, 5, 5, 4, 4, 3). Das Product derſelben iſt gleich 60 Einheiten, und da die Anzahl der Dekaden 6 iſt, und 6 durch 4 einmal gemeſſen 2 zum Reſte läßt, ſo wird das Product dieſer Dekaden 100 einfache Myriaden ſein. Und da das Product aus den Dekaden, multiplicirt in das Product der Pythmenes, das verlangte Product giebt, und die 100 Myriaden, multiplicirt in die 60 Einheiten, 60 doppelte Myriaden geben, ſo iſt das Product der Zahlen 50, 50, 50, 40, 40, 30 gleich 60 doppelten Myriaden.

Pappus bezieht ſich hier auf einen Satz, der vermuthlich vorhergegangen iſt, und der beſtimmen lehrt, welcher Zahlenklaſſe das Product einer gegebenen Anzahl von Dekaden angehört. Dieſe Beſtimmung iſt einfach und hängt, analog wie es im 18. Satze ge-

zeigt wird, davon ab, welchen Quotienten und welchen Reſt man erhält, wenn man die Anzahl der gegebenen Dekaden durch 4 dividirt.

S. 16. Es ſeien beliebig viele Zahlen, deren jede kleiner als 1000, aber durch 100 theilbar iſt, man ſoll u. ſ. w.

S. 17. Es ſeien zwei Zahlen A, B, und A ſei kleiner als 1000, aber theilbar durch 100 (etwa 500 Einheiten), B aber ſei kleiner als 100, aber theilbar durch 10 (etwa 40 Einheiten); man ſoll u. ſ. w.

S. 18. Es ſei eine Anzahl von Zahlen, A, deren jede kleiner als 100, aber durch 10 theilbar iſt, und eine andere Anzahl B, deren jede kleiner als 1000, aber durch 100 theilbar iſt, man ſoll u. ſ. w.

Die Ausführung dieſer Aufgabe iſt der Mittheilung werth, weil ſie ein ſchönes Beiſpiel iſt, wie die Griechen mit allgemeinen Zahlenausdrücken umgingen.

Es ſeien die Pythmenes der in A begriffenen Zahlen H (die Einheiten 1, 2, 3, 4), der in B begriffenen Zahlen Θ (die Einheiten 2, 3, 4, 5); nimmt man das Product ſämmtlicher Pythmenes und nennt es E (es iſt 2880); ſo ſei die Anzahl der in A begriffenen Zahlen, plus der doppelten Anzahl der in B begriffenen, im erſten Falle durch 4 theilbar, und der Quotient ſei Z; und Apollonius zeigt, daß das Product aller in A und B enthaltenen Zahlen ſo viele Myriaden enthält, als E Einheiten, und daß dieſelben der Zahl Z gleichnamig ſind (alſo in dem Beiſpiele 2880 dritte Myriaden). Denn eine der Zahl Z gleichnamige (alſo dritte) Myriade, mit E (d. i. mit 2880) multiplicirt, giebt das Product der Zahlen in A und B. Das Product der Zahlen in A und B enthält alſo ſo viele der Zahl Z gleichnamige Myriaden, als in E Einheiten ſind.

Im zweiten Falle aber ſoll die Anzahl der Zahlen in A, plus der doppelten Anzahl der Zahlen in B, durch 4 dividirt 1 zum Reſte laſſen; und Apollonius thut dar, daß das Product der Zahlen in A und B ſo viele der Zahl Z gleichnamige Myriaden enthält, als das zehnfache von E beträgt.

Wenn aber die genannte Anzahl, durch 4 dividirt, 2 als Reſt läßt, ſo enthält das Product aus den in A und B begriffenen Zahlen ſo viele der Zahl Z gleichnamige Myriaden, als das Hundertfache der Zahl E beträgt.

Wenn endlich der Reſt 3 bleibt, ſo iſt das Product gleich ſo vielen

vielen der Zahl Z gleichnamigen Myriaden, als das Tauſendfache von E beträgt.

Es iſt hiebei nicht zu überſehen, daß Pappus uns, ſelbſt unter dem erſten Falle, nicht den vollſtändigen Beweis des Apollonius liefert, ſondern nur eine Andeutung, welchen Gang der Verfaſſer in ſeinem Beweiſe genommen hat.

S. 19. Es ſei eine Zahl A kleiner als 100, aber theilbar durch 10, und beliebig viele andere Zahlen B, Γ, Δ, E kleiner als 10, man ſoll das Product finden.

S. 20. Ferner ſeien zwei Zahlen A, B, jede kleiner als 100 und theilbar durch 10; Γ, Δ, E aber jede kleiner als 10; man ſoll u. ſ. w.

S. 21. Daſſelbe von drei Zahlen, A, B, Γ, aber in Form eines Lehrſatzes.

S. 22. Ebenſo, wenn mehr als drei Zahlen gegeben ſind.

S. 23. Sei A kleiner als 1000, aber theilbar durch 100; jede der Zahlen B, Γ, Δ kleiner als 10; man ſoll u. ſ. w.

S. 24. Wenn zwei Zahlen A, B kleiner als 1000 und theilbar durch 100, und außerdem Γ, Δ, E jede kleiner als 10 gegeben ſind.

S. 25. Dieſer Satz ſagt, wie er bei Wallis daſteht, in andern Worten ganz daſſelbe, was ſchon der 20. Satz geſagt hat. Er lautet nämlich ſo: Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος (καὶ ὁ δεύτερος A B) ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος, μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος· ἕκαστος δὲ τῶν Γ Δ E ἔστω ἐλάσσων δεκάδος· καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν. Wahrſcheinlich hat Wallis die in Parentheſe eingeſchloſſenen Worte, welche in dem Manuſcripte fehlen, falſch ergänzt. Der Ausdruck ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ſcheint anzudeuten, daß Pappus hier von zwei Zahlen ſprechen will, die verſchiedene Beſchaffenheit haben, ſo daß er die erſte von der zweiten unterſcheidet, da er ſonſt ſagen mußte: ἔστω ἑκάτερος τῶν A, B ἐλάσσων etc. oder ähnlich. Ich glaube den Satz, damit er in ſich ſelbſt und an dieſer Stelle Sinn bekommt, ſo ergänzen zu müſſen: Ἔστω ὁ μὲν πρῶτος A ἐλάσσων μὲν χιλιάδος, μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος· ὁ δὲ δεύτερος B ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος, μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος· ἕκαστος δὲ τῶν Γ Δ E ἔστω ἐλάσσων δεκάδος· καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν. „Es ſei die erſte Zahl A kleiner als 1000 und theilbar durch 100; die zweite B kleiner als 100 und theilbar durch 10; und

jede der Zahlen Γ Δ E ſei kleiner als 10; man ſoll das Product aller angeben.“ Dieſen Satz erfordert durchaus der Zuſammenhang. Wallis ſagt nicht, ob er in der Auflöſung etwas geändert habe; die iſt freilich ganz ſeiner Leſeart angemeſſen, muß aber jedenfalls auch geändert werden.

S. 26. Es ſeien zwei oder mehre Zahlen A B, deren jede kleiner als 1000, aber theilbar durch 100 iſt; und beliebig viele andere Zahlen Γ Δ E, deren jede kleiner iſt als 100, aber theilbar durch 10; und wiederum beliebig viele Zahlen Z H Θ, deren jede kleiner iſt als 10; man ſoll das Product A B Γ Δ E Z H Θ angeben.

Die Pythmenes der Zahlen A B Γ Δ E ſeien reſpective Λ M N Ξ O; die Summe der doppelten Anzahl der Zahlen A B und der einfachen der Zahlen Γ Δ E iſt entweder durch 4 theilbar oder nicht. Dieſe Summe ſei erſtens durch 4 theilbar und der Quotient ſei K; und es mögen den Zahlen A B die Hunderte Π P, und den Zahlen Γ Δ E die Zehner Σ T Υ zugehören; ſo iſt alſo auch die Summe der doppelten Anzahl der Π P und der einfachen Anzahl der Σ T Υ durch 4 theilbar, und der Quotient K. Und es iſt offenbar, daß das Product der Zahlen Π P Σ T Υ, multiplicirt in das Product von Λ M N Ξ O gleich iſt dem Product A B Γ Δ E. Man nehme nun das Product der Zahlen Λ M N Ξ O Z H Θ; es ſei Φ. Ich ſage, daß das Product von A B Γ Δ E Z H Θ ſo vielen der Zahl K gleichnamigen Myriaden gleich iſt, als in der Zahl Φ Einheiten ſtecken. Dieſes hat Apollonius an der Figur gezeigt. Wenn aber die Summe der doppelten Anzahl von A B und der einfachen Anzahl von Γ Δ E nicht durch 4 theilbar iſt, ſo wird dieſelbe 1, 2 oder 3 als Reſt laſſen. Wenn ſie 1 als Reſt läßt, ſo enthält das Product der Zahl Π P Σ T Υ zehn Myriaden, welche dem Quotienten K gleichnamig ſind; wenn 2, hundert Myriaden, gleichnamig der Zahl K; wenn drei, tauſend Myriaden gleichnamig der Zahl K. Und aus dem vorigen iſt klar, daß das Product der Zahlen A B Γ Δ E Z H Θ ſo viele dem K gleichnamige Myriaden enthalten wird, als das Zehnfache, oder das Hundertfache, oder das Tauſendfache der Zahl Φ beträgt.

S. 27. Dieſer Satz enthält zwei Anwendungen der vorigen Sätze, indem Apollonius ſich die Aufgabe ſtellt, die Producte der Zahlen, welche durch die Buchſtaben zweier Verſe vorgeſtellt werden, zu finden. Die Verſe ſind:

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι
und Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου.

Apollonius verfährt hier ganz ſyſtematiſch, indem er ſich zuerſt diejenigen Buchſtaben, welche Hunderter bedeuten, dann die Zehner und zuletzt die Einer zuſammenſtellt, ſodann von den erſten beiden Klaſſen die Pythmenes nimmt, dieſe ſammt den urſprünglichen Einern in ein Product verbindet, und dann nach der im 26. Satze gegebenen Regel unterſucht, mit wie vielen Myriaden dieſes Product wegen der vernachläſſigten Hunderter und Zehner noch zu vervielfältigen iſt. Die Ausführung iſt etwas langweilig, zumal da der Verfaſſer gewiſſenhaft immer auch mit 1 an gehöriger Stelle multiplicirt. Das Product der Pythmenes und Einer des erſten Verſes iſt

Mδ. $\overline{\iota\vartheta}$ καὶ Mγ. $\overline{͵\varsigma\lambda\varsigma}$ καὶ Mβ. $\overline{͵\eta\upsilon\pi}$

d. h. 19 vierfache, 6036 dreifache und 8480 doppelte Myriaden oder die Zahl

196036848000000000.

Nun enthält der erſte Vers zehn Buchſtaben, welche Hunderter, und ſiebzehn, welche Zehner bedeuten; alſo iſt die doppelte Anzahl der erſten, 20, plus der einfachen Anzahl der zweiten, 17, zuſammen 37, welches durch 4 dividirt den Quotienten 9 und den Reſt 1 giebt. Demnach enthält das Product ſämmtlicher Zahlen ſo viele neunfache Myriaden, als das zehnfache Product der Pythmenes und Einer Einheiten enthält, das heißt, das Geſammtproduct beträgt 196 dreizehnfache, 368 zwölffache und 4800 elffache Myriaden, oder die Zahl 196036848 mit ſechs und vierzig angehängten Nullen. Ganz ähnlich iſt das Verfahren bei dem zweiten Verſe. Das Product der Pythmenes und Einer giebt nämlich 2 vierfache, 1849 dreifache, 4402 doppelte und 5600 einfache Myriaden. Nun enthält der Vers fünf Buchſtaben, welche Hunderter, und zwölf, welche Zehner bedeuten; es iſt alſo die Summe der doppelten Anzahl der erſteren und der einfachen Anzahl der letzteren gleich 22, welches durch 4 dividirt den Quotienten 5 und den Reſt 2 giebt; daher enthält das Product ſämmtlicher Zahlen ſo viele fünffache Myriaden, als das hundertfache Product der Pythmenes und Einer Einheiten enthält, das heißt, das Geſammtproduct beträgt 218 neunfache, 4944 achtfache, und 256 ſiebenfache Myriaden, oder die Zahl 21849440256 mit acht und zwanzig Nullen.

Was nun die Art, wie dieſer letzte Satz bei Pappus ausge-

ſprochen iſt, aubetrifft, ſo klingt der Ausdruck deſſelben ganz eigengenthümlich und ſcheint einiges Licht auf den verlorenen Anfang und den Zweck vorliegender Schrift zu werfen. Der Satz lautet im Original nämlich alſo: Τούτου δὲ θεωρήματος προεκτεθειμένου, πρόδηλόν ἐστι τὸν δοθέντα στίχον πολλαπλασιάσαι, καὶ εἰπεῖν τὸν γενόμενον ἀριθμὸν ἐκ τοῦ τὸν πρῶτον τῶν ἀριθμῶν ὃν εἴληφε τὸ πρῶτον τῶν γραμμάτων, ἐπὶ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε δεύτερον τῶν γραμμάτων πολλαπλασιασθῆναι· ἐπεὶ τὸ γενόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ τρίτον γράμμα· καὶ κατὰ τὸ ἑξῆς παραίνεσθαι μέχρι τοῦ διεξοδεύεσθαι τὸν στίχον· ὡς εἶπεν Ἀπολλώνιος, ἐν ἀρχῇ, κατὰ τὸν στίχον, οὕτως· Ἀρτέμιδος etc. d. h. „Nachdem dieſer Satz vorher feſtgeſtellt iſt (nämlich der 26.), iſt es thunlich **den gegebenen Vers** zu multipliciren, und das Product anzugeben, welches entſteht, wenn man die erſte Zahl, welche der erſte Buchſtabe ausdrückt, mit der zweiten Zahl, welche der zweite Buchſtabe ausdrückt, multiplicirt; dann das Reſultat mit der dritten Zahl, welche der dritte Buchſtabe darſtellt; und ſo nach der Reihe fort zu verfahren, bis man durch den ganzen Vers gekommen iſt; wie Apollonius **am Anfange** ſagt" u. ſ. w. Und am Schluſſe der Entwickelung der Multiplication des erſten Verſes, als Pappus das Geſammtreſultat angegeben hat, fügt er hinzu: συμφώνως τοῖς ὑπὸ Ἀπολλωνίου κατὰ τὴν μέθοδον ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου προγεγραμμένην, d. h. „übereinſtimmend mit der Angabe des Apollonius nach der **am Anfange des Buchs** vorgeſchriebenen Methode."

Darnach ſcheint es erſtens, daß dieſe Schrift, ähnlich wie die eben beſprochene von Archimedes, eine gelegentliche Spielerei zu ihrer Veranlaſſung gehabt, und mit dem Okytoboos, der ſich mit der genauern Berechnung der Kreisperipherie beſchäftigte, durchaus nichts gemein hat. Wie aus dem Ausdruck dieſes letzten Satzes hervorgeht, hat Apollonius am Anfange der Schrift ſich die ſucceſſive Multiplication der Zahlbuchſtaben der angeführten Verſe als Aufgabe geſtellt, und um das Verfahren zu erleichtern und zugleich dieſe Erleichterung wiſſenſchaftlich zu begründen, der Ausführung ſelbſt eine Reihe von Sätzen vorausgeſchickt. Dieſe Sätze ſelbſt, ſoweit ſie erhalten ſind, ſtehen, wenn meine Conjectur in Betreff des 25. Satzes richtig iſt, in völlig ſyſtematiſcher Anordnung da, und laſſen ſich in

zwei Hauptabtheilungen bringen, deren erſte unvollſtändig iſt, und mit den Sätzen 15 und 16 ſchließt; die zweite aber in den Sätzen 17 bis 26 vollſtändig vorliegt. Der erſte Abſchnitt enthält Regeln für die Multiplication gleichartiger Zahlen, als mehrer Zehner, oder mehrer Hunderter unter einander; die Analogie des zweiten Abſchnitts läßt ſchließen, daß Apollonius auch hier mit zwei Zehnern, mit drei Zehnern, und ebenſo mit zwei und drei Hundertern angefangen hat, bevor er zu dem allgemeinen Ausdruck der Regel für beliebig viele Zehner und Hunderter im 15. und 16. Satze fortgeſchritten iſt. Der zweite Abſchnitt enthält ſodann Regeln für die Multiplication verſchiedenartiger Zahlen, als Hunderter mit Zehnern (S. 17, 18), Zehner mit Einern (S. 19—22), Hunderter mit Einern (S. 23, 24) und Hunderter mit Zehnern und Einern (S. 25 nach der Wiederherſtellung, und S. 26). Dieſe Sätze waren aber, wie geſagt, nicht Zweck, ſondern Mittel, wenigſtens der Form der Darſtellung nach, welche die Multiplication der Verſe als alleinigen Zweck der Schrift, nicht etwa als beiläufig gegebene Anwendung erſcheinen läßt.

Zweitens aber erhellt aus den zuletzt angeführten Worten, daß Apollonius außer der in dieſen Sätzen vorgetragenen Methode noch einer anderen ſich bedient hat, um die vorgeſetzte Multiplication auszuführen. Vielleicht hatte er am Anfange der Schrift die Multiplication der Zahlwerthe der Buchſtaben der Reihe nach, ohne vorher die Pythmeues abzuſondern, ausgeführt, um durch den Augenſchein zu lehren, wie viel beſchwerlicher und weitläuftiger dieſer Weg ſei, als die von ihm erfundene und in vorliegenden Sätzen vorgetragene Abkürzungsmethode. Dann ſtehen die Worte: συμφόνως τοῖς ὑπὸ Ἀπολλωνίου u. ſ. w. als ein Beweis vermittels des Augenſcheins da, als wollte der Verfaſſer ſagen: Das übereinſtimmende Reſultat lehrt alſo, daß dieſe abgekürzte Methode eben ſo ſicher zum Ziele führt als jene weitläuftige.

Nun noch einige Worte über einen Zuſatz, den Pappus bei einigen der vorliegenden Aufgaben macht. Pappus giebt uns, wie ſchon erwähnt, nicht die vollſtändigen Beweiſe für dieſe Sätze, dagegen verweiſt er bei mehren derſelben auf den Beweis des Apollonius und zwar auf einen geometriſchen Beweis; z. B. am Ende des 19. Satzes: Τὸ δὲ γραμμικὸν ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου δέδεικται [20]).

20) Ähnlich bei den Sätzen 20, 22, 23, 24, 26.

Es erſcheint uns ein wenig wunderbar, wenn wir hören, daß Jemand reine Zahlenſätze geometriſch beweiſen will. Wir müſſen hier aber bedenken, daß Geometrie und Calcul bei den Griechen in einem Verhältniſſe zu einander ſtanden, welches gerade das umgekehrte iſt von dem, in welchem beide Methoden bei uns zu einander ſtehen. Wollen wir einen ſchwierigen geometriſchen Satz oder eine ſolche Aufgabe ſchnell und möglichſt klar ausführen, ſo berechnen wir dieſelben. Bei uns iſt der Calcul die höhere Wiſſenſchaft, und die Geometrie eine derſelben untergeordnete Methode und einer der unzähligen Nahrungsſtoffe für jenen. Die Griechen dagegen, bei denen der Calcul aus Mangel an ordentlichen Rechnungszeichen immer in ſeiner Kindheit geblieben iſt, waren durchaus Geometer, und eine Rechnung oder ein arithmetiſcher Satz gewann für ſie erſt dann völlig überzeugende Kraft, wenn ſeine Wahrheit an einer Figur durch geometriſche Conſtruction dargethan war. Die Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ war gleich allen ähnlichen Sätzen im zweiten Buch Euklid's bei den Griechen ein rein geometriſcher Satz, und ſobald ſie denſelben auf die Rechnung anwenden, zeichnen ſie die Figur daneben, um die Zuläſſigkeit einer ſolchen Übertragung, die in ihren Augen immer etwas Fremdartiges und Gewagtes an ſich zu haben ſchien, zu beweiſen. So trägt Euklides in dem zehnten Buche ſeiner Elemente die Lehre von den Irrationalzahlen als eine Lehre von den Irrationallinien vor; Diophant beweiſt die Sätze ſeiner Lehre von den figurirten Zahlen an der Figur, und ebenſo, wie wir ſogleich ſehen werden, Theon ſeine Methode für die Ausziehung der Quadratwurzel, ja ſelbſt für die Multiplication und Diviſion. Eben ſo ſcheint alſo auch Apollonius die hier vorgetragenen Sätze geometriſch bewieſen zu haben. Dieſer Standpunct iſt bei der Beurtheilung der Griechiſchen Mathematiker durchaus im Auge zu behalten, weil nur er ſo manche Erſcheinung zu erklären vermag, über welche ſeit Jahrhunderten Conjecturen über Conjecturen gehäuft worden ſind, welche alle unnöthig geweſen wären, wenn man an das hier erwähnte Verhältniß der Griechiſchen Geometrie zum Calcul gedacht und nicht die Griechen immer auf unſern Standpunct geſtellt hätte.

Ich beſchließe dieſen Gegenſtand mit folgender Stelle aus Delambre's **Arithmétique des Grecs**[21]): **Cette idée d'Apollonius,**

21) Hist. de l'astron. anc. T. II. p. 30. 31. In Hoffmann's Überſetzung

de substituer dans les calculs les simples unités aux dixaines, centaines etc., abrégeait considérablement les calculs; et c'était un pas assez marqué vers le système indienne; il semble qu'après avoir réduit les octades d'Archimède en tranches qui n'avaient que quatre chiffres au lieu de 8, il aurait dû essayer les tranches de trois chiffres qui lui auraient permis de supprimer les lettres particulières et pointées pour les mille. Il aurait trouvé un avantage encore plus sensible en réduisant les tranches à deux chiffres, qui lui auraient épargné les lettres qui désignent les centaines; enfin en réduisant les tranches à un chiffre, il épargnait les lettres des dixaines et arrivait nécessairement à l'Arithmétique indienne, arabe et moderne. Il parait au contraire n'avoir réduit les tranches de 8 chiffres d'Archimède à des tranches de 4, que pour rentrer dans les limites de l'Arithmétique des Grecs, et pour que chacune de ses tranches ne contint que les chiffres communément admis. On est humilié et chagrin de voir une idée aussi simple et aussi féconde échapper à deux hommes comme Archimède et Apollonius, qui cependant ont travaillé l'un à étudier, l'autre à diminuer les inconvéniens de l'Arithmétique reçue. Mais ces grands génies méprisaient trop la pratique, ils ne se complaisaient qu'aux spéculations difficiles. En réduisant chaque tranche à un chiffre et donnant la plus grande étendue au principe de la valeur de position, il aurait senti le besoin d'un dixième caractère pour supprimer les points entre les tranches et remplir les places vides etc. etc. Faſſen wir kurz zuſammen, was dieſe Stelle ſagt, ſo reducirt ſich ihr Inhalt auf folgende zwei Wahrheiten: 1) Wenn Apollonius noch das und das gethan hätte, ſo hätte er noch das und das erfunden. 2) Apollonius und Archimedes haben das Zahlenſyſtem mit Stellenwerth nicht erfunden. Hinterher iſt leicht zu deduciren, wie eine große Erfindung hätte gemacht werden können; hiſtoriſch aber iſt ſie denn doch in der Regel auf ganz anderm Wege erfunden worden.

Dieſes nun iſt es etwa, was von den praktiſchen Rechnungen der Griechen mit gewöhnlichen Decimalzahlen uns aufbehalten iſt.

S. 39. 40 ſteht die Stelle bedeutend kürzer, und ebenſo wahrſcheinlich in der erſten Ausgabe des Originals.

Nun bleibt uns aber noch eine große Klaſſe von Rechnungen zu erläutern übrig, die Rechnung mit dem, wie es ſcheint, von Ptolemäus eingeführten Sexageſimalſyſtem, welche für uns doppelt wichtig iſt, einerſeits wegen ihrer allgemeinen Verbreitung in Europa während eines Zeitraums von etwa vierzehn Jahrhunderten, andrerſeits weil in dieſem Syſtem uns Rechnungen der Griechen aufbewahrt ſind, welche ſich in den Büchern, die dem Decimalſyſtem folgen, nicht mehr vorfinden, namentlich Diviſionen und Wurzelausziehungen. Ptolemäus trägt nämlich in dem erſten Buche ſeiner Μεγάλη Σύνταξις [22]) die zu den aſtronomiſchen Berechnungen nothwendigen trigonometriſchen Vorarbeiten vor, und lehrt die Sehnentafel (welche erſt von den Arabern mit der Sinustafel vertauſcht war) berechnen. Hier nun ſtanden ihm, wenn er bei einiger Genauigkeit die immerwährende Rechnung mit Brüchen, die im Griechiſchen Zahlenſyſteme manche Unbequemlichkeit mit ſich führte, vermeiden wollte, zwei Wege offen. Entweder konnte er, wie es z. B. in unſern logarithmiſch-trigonometriſchen Tafeln der Fall iſt und wie auch die Aſtronomen des funfzehnten und ſechszehnten Jahrhunderts thaten, für den Durchmeſſer des Kreiſes eine ſehr große Zahl annehmen, ſo daß er mit Vernachläſſigung der Brüche auch die Sehnen kleiner Bogen mit hinlänglicher Genauigkeit in ganzen Zahlen ausdrücken konnte; oder er konnte ſich einer kleinern Zahl mit gruppenweiſe geordneten Unterabtheilungen bedienen. Ptolemäus wählte das Letztere, weil auch die Rechnung mit großen Zahlen den Griechen, deren einfache Zahlzeichen bei zehntauſend aufhören, nicht bequem war; und zwar theilt er den Durchmeſſer in 120 Theile, μοιραί, jede μοιρά in 60 gleiche Theile, πρῶτα ἑξηκοστά, minuta prima, jede von dieſen abermals in

22) Die allgemeine Verbreitung und die Bewunderung, welche dieſem Werke zu Theil ward und welche es durch einen ſo langen Zeitraum genoſſen hat, mögen den Titel allmählig in den Superlativ verwandelt haben, ſo daß aus der μεγάλη σύνταξις eine μεγίστη σύνταξις ward. In dieſer Form ſcheint der Titel des Werks zu den Arabern übergegangen zu ſein, welche daſſelbe immer Almajisti (المجسطي) nennen; wenigſtens wüßte ich ſonſt keine paſſende Erklärung dieſes bei den Arabern ganz allgemein eingeführten Namens zu geben. Da ſpäterhin Ptolemäus, gleichwie Euklides, Archimedes und andere Griechiſche Mathematiker den Europäern viel früher aus Arabiſchen Überſetzungen, als aus dem Griechiſchen Original bekannt ward, ſo ging von den Arabern dieſer Titel wieder nach Europa zurück, und kein Menſch faſt nennt bis auf den heutigen Tag Ptolemäus Werk anders als den Almageſt. Vergl. Wallis Op. T. II. p. 4.

60 Theile, δεύτερα ἑξηκοστά, **minuta secunda** und ſo fort[23]). Die Bezeichnung geſchah in der Art, daß man über die μοιράς oder Grade den gewöhnlichen Horizontalſtrich, welcher den Zahlwerth der Buchſtaben andeutet, ſetzte, bei den erſten Sechzigtheilen den einfachen Bruchaccent, (′), bei den zweiten Sechzigtheilen daſſelbe Zeichen doppelt (″) u. ſ. w., wie wir unten bei den Rechnungsbeiſpielen ſehen werden. Auch dieſes Syſtem iſt auf den Begriff der geometriſchen Progreſſion baſirt, aber einer abſteigenden, welche nach den Potenzen von $\frac{1}{60}$ fortſchreitet. Es lag nahe, und bei ſpäteren Aſtronomen ſoll ſich dergleichen wirklich finden, die Reihe auch rückwärts aufſteigend fortzubilden, ſo daß man ſechzig Grade oder μοιραί als eine Einheit der nächſt höhern Ordnung, ſechzig von dieſen abermals als eine neue Einheit, und ſo fort betrachtete. Weil ich aber bei den Alten hiervon keine Spur gefunden habe, ſo halte ich mich dabei nicht länger auf[24]). Zur Vermeidung von Irrthümern war es bei dieſem Syſtem zwar nicht durchaus nothwendig, aber doch wünſchenswerth, das Fehlen eines der Glieder in der geometriſchen Progreſſion durch ein eigenes Zeichen anzudeuten, und ſo erſcheint auf einmal in der Sehnentafel bei Ptolemäus das Nullzeichen mit einem Horizontalſtrich

---

23) Die erſte Eintheilung der μοιρά oder des gradus, wie es bei den Späteren heißt, nannte man auch ſchlechthin ἑξηκοστά, und Lateiniſch minuta, die folgenden bezeichnete man dann zum Unterſchiede bloß mit dem Zahlworte, secunda, tertia etc., nämlich minuta, woraus die jetzt gebräuchlichen Benennungen Minuten, Secunden, Tertien entſtanden ſind. Die Arabiſchen Überſetzer des Ptolemäus gaben den Ausdruck μοιρά wieder durch درجة, darajah (דרגה), scala, gradus; das Lateiniſche gradus iſt alſo eine wörtliche Überſetzung aus dem Arabiſchen, dagegen iſt das Franzöſiſche und Engliſche degré, degree, mit Transpoſition der Buchſtaben g und r, das Arabiſche Wort ſelbſt.

24) Vergl. Wallis Op. T. II. p. 23. 24. Et pariter quo numeros grandiores vitarent, sexaginta integrorum collectionem Sexagenas vocabant, saltem posteriores, et harum totidem. Sexagenas secundas et sic porro quoties opus fuerit. Sic verbi gratia pro integri cujuspiam parte quarta ponebant 15′, pro $\frac{1}{8}$ ponebant 7′ 30″, pro $\frac{1}{7}$ ponebant 8 aut 9 aut 8′ 34″ aut 8′ 34″ 17‴. Similiter pro 227015 (qui est numerus dierum quibus Arabum epocha Hegira dicta serius incipit quam nostra) ponunt 1‵‵‵ 3‵‵ 3‵ 35°, hoc est, 1 sexagenam tertiam, 3 sexagenas secundas, 3 sexagenas primas et 35 dies. Hujusmodi processus per sexagesimalem multiplicationem etc. habetur eleganter descriptus et geometrice demonstratus in erudito simul et accurato tractatu graeco Barlaami Monachi, Λογιστική dicta, quem Vossius refert ad annum Chr. 1350.

über ſich, ō, wahrſcheinlich als Abkürzung von οὐδέν, obgleich weder Ptolemäus ſelbſt, noch ſein Commentator Theon auch nur ein Wort, über die Einführung und den Gebrauch dieſes bis dahin ganz unbekannten Zeichens verlieren [25]). Möchte es vielleicht erlaubt ſein, aus dieſem argumentum a silentio den Schluß zu ziehen, daß das Zeichen ō erſt in ſpätere Manuſcripte hineingetragen worden iſt, nachdem man ſich durch den Gebrauch der aus dem Arabiſchen gemachten Bearbeitungen an daſſelbe gewöhnt hatte? Ich mag darüber nichts entſcheiden; auch könnte nur das Vorhandenſein oder das Fehlen des Zeichens in ſehr alten Handſchriften etwas für oder wider die Hypotheſe beweiſen.

Theon [26]) lehrt in demjenigen Capitel des erſten Buchs ſeines

---

25) In dem gedruckten Texte des Commentars von Theon findet ſich das Zeichen ō gar nicht, was die oben folgende Conjectur vielleicht beſtätigt. Maximus Planudes im vierzehnten Jahrhundert kennt die Null unter dem Namen τζίφρα; er iſt aber ein Schüler der Araber. (Vergl. die Note 61 des dritten Cap.). Sonderbar klingt, was Delambre (Hist. de l'astr. anc. T. II. p. 10) ſagt: Le zéro, en grec, se nommait τζιφρα . . . Ce mot a l'air un peu barbare, et je ne l'ai vu dans aucun auteur ancien. A l'article Planude nous avons dit que ce mot est arabe. Planudes ſagt ja doch ausdrücklich: Τιθέασι δὲ ἕτερόν τι σχῆμα, ὃ καλοῦσι τζίφραν. Wie kann Jemand auf Grund dieſer Stelle ſagen, die Null werde von den Griechen τζίφρα genannt?! T. I. p. 547 ſagt derſelbe: Nous avons vu dans Planude que le zéro s'appelle plus ordinairement le *rien*. On trouve aussi ce mot dans Théon. Daß man bei Theon das Wort οὐδέν (nicht rien) findet, daran wird wohl Niemand zweifeln; in dem Sinn aber, daß es die Null bedeutet, findet man es wenigſtens in dem gedruckten Texte nicht. Wenig plauſibel auch ſcheint zu ſein, was derſelbe Schriftſteller (T. II. p. 14. 15) über das Zeichen 0 oder ō ſagt: Nous voyons ici le zéro tenir la place des degrés qui manquent dans la seconde ligne. Il est marqué comme chez nous, par le caractère 0. Cette lettre dans l'Arithmétique grecque signifie 70. Il ne pourrait donc sans équivoque se placer dans les nombres decimaux . . . Mais dans l'Arithmétique sexagésimale 0 ne peut rien signifier, puisque le nombre le plus fort est ξ = 60. Cependant pour le distinguer on le couvre ordinairement d'un trait horizontal ō. . . . Or la lettre o micron = 70 est la première des lettres qui n'entrent pas dans les fractions sexagésimales, elle suit immédiatement ξ qui signifie 60 et qui se rencontre souvent dans l'usage de ces fractions; tel paraît être le motif déterminant qui l'a fait choisir par les astronomes grecs pour le caractère du zéro. Das Zeichen ō für eine Abkürzung von οὐδέν zu halten, liegt denn doch wohl bedeutend näher, als dieſe künſtliche Herleitung.

26) Dieſer Commentator des Ptolemäus und Überarbeiter Euklid's lebte gegen

Commentars, welches ebenſo wie das entſprechende Capitel der Μεγάλη Σύνταξις betitelt iſt: Περὶ τῆς πηλικότητος τῶν ἐν κύκλῳ εὐϑειῶν (Über die Größe der geraden Linien im Kreiſe) die Principe der Rechnung mit dieſen von Ptolemäus gebrauchten Sexageſimaltheilen. Die Regel für die Multiplication iſt einfach dieſe: Die Μοιραί oder Grade, ſagt er, welche die Stelle der Einheiten bei gewöhnlichen Zahlen vertreten, laſſen als Multiplicator die verſchiedenen Species (εἴδη) unverändert[27]). Dieſelbe Erſcheinung, fährt er fort, ſinden wir nicht bei den Theilen der Moira beſtätigt, ſondern dieſelben verändern als Multiplicatoren die Species des Multiplicators. In welcher Art dieſe Veränderung geſchieht, und welche Species in jedem Falle als Reſultat hervorgeht, zeigt Theon ziemlich weitläuftig an einer Figur. Uns möge es hier genügen zu bemerken, daß erſte Sechzigtheile (Minuten), in irgend eine Species multiplicirt, dieſelbe um eine Stufe, zweite Sechzigtheile (Secunden) dieſelbe um zwei Stufen herabziehen, und in der Art weiter fort. Die Regel für die Diviſion beweiſt er ähnlich. Das Reſultat iſt folgendes: Die Moira als Diviſor läßt die Species des Dividendus unverändert, die erſten Sechzigtheile erheben die Species des Dividendus um eine, die zweiten Sechzigtheile um zwei Stufen, u. ſ. w. Hierauf ſchreitet Theon zur Praxis und zeigt, wie man Zahlen, die in den drei Species

---

das Ende des vierten Jahrhunderts, und heißt zum Unterſchiede Anderer dieſes Namens ὁ Ἀλεξανδρεύς, Alexandrinus. Er war der Vater der berühmten Hypatia, und iſt nicht zu verwechſeln mit einem älteren Mathematiker Theon, den Ptolemäus ſelbſt citirt, und von welchem wir im folgenden Capitel ſprechen werden; dieſer Letztere hat den Beinamen ὁ Σμυρναῖος. Das hier in Rede ſtehende Werk iſt mit Ptolemäus zugleich, bloß Griechiſch, herausgegeben unter dem Titel: Κλ. Πτολεμαίου μεγάλης συντάξεως βιβλ. ιγ. Θεῶνος Ἀλεξανδρέως εἰς τὰ αὐτὰ ὑπομνημάτων βιβλ. ια. Basileae apud J. Walderum. 1538. fol. Die Syntaxis nimmt 327 Seiten ein. Dann folgt mit beſonderem Titel Theon's Commentar, indem die Seitenzahlen wieder von 1 beginnen. Dieſer Commentar iſt meines Wiſſens noch nicht aus dem Griechiſchen überſetzt worden. Zwar ſagt Montucla (T. I. p. 332): le commentaire sur l'Almageste n'a jamais été traduit, *excepté le premier livre,* es iſt mir aber bis jetzt nicht gelungen, dieſe letzte gar zu allgemein gehaltene Beſchränkung zu verificiren.

27) Ed. Basil. p. 40: τῆς μονάδος ἀμεταϑέτου οὔσης καὶ ἑστώσης πάντοτε, τὸ πολλαπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσται· τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἡ μοιρὰ ἐφ' ὃ ἂν εἶδος πολλαπλασιασϑῇ, αὐτὸ τὸ εἶδος φυλάττει. Wir werden auf dieſe merkwürdige Stelle noch einmal in einer andern Beziehung zurückkommen.

gegeben ſind, mit einander multiplicirt und durch einander dividirt; und zwar ſtellt er ſich zunächſt die Aufgabe, die Seite des in den Kreis beſchriebenen regelmäßigen Zehnecks aufs Quadrat zu erheben. Die Ausführung will ich wörtlich überſetzen [28]): „Es ſei uns vorgeſchrieben die Seite des Zehnecks, welche, wie gezeigt werden wird, gleich 37° 4′ 55″ ($\overline{\lambda\xi}$. δ′. νε″) iſt, mit ſich ſelbſt zu multipliciren. Ich ſchreibe ſie hin, und dieſelbe noch einmal darunter, wie im Schema (ὡς ὑπογέγραπται, ſ. u.), und multiplicire zuerſt die 37 Grade mit ſich ſelbſt, und mit den erſten und den zweiten Sechzigtheilen, dann die vier erſten Sechzigtheile mit den 37 Graden, mit ſich ſelbſt und mit den zweiten Sechzigtheilen, und endlich die zweiten Sechzigtheile mit den Graden, mit den erſten Sechzigtheilen und mit ſich ſelbſt; auf dieſe Art gelange ich am bequemſten zu dem Reſultat. Die 37 Grade in ſich ſelbſt multiplicirt, geben 1369 Grade; in die 4 Minuten, 148 Minuten, und in die 55 Secunden, 2035 Secunden; ferner die 4 Minuten in die 37 Grade machen 148 Minuten; in ſich ſelbſt, 16 Secunden, und in die 55 Secunden, 220 Tertien; endlich die 55 Secunden in die 37 Grade geben 2035 Secunden, in die 4 Minuten, 220 Tertien, und in ſich ſelbſt geben ſie 3025 Quarten; und die Anordnung der Zahlen geſchieht, wie ſie hier beigefügt iſt.“ Das Schema am Rande nämlich ſieht ſo aus:

$\overline{\lambda\xi}$	δ′	νε″		
$\overline{\lambda\xi}$	δ′	νε″		
$\overline{\alpha\tau\xi\vartheta}$	ρμη′	͵βλε″		
	ρμη′	ιϛ″	σκ‴	
		͵βλε″	σκ‴	͵γκε⁗

oder in unſern Ziffern ausgedrückt:

37°	4′	55″		
37°	4′	55″		
1369°	148′	2035″		
	148′	16″	220‴	
		2035″	220‴	3025⁗

28) Ed. Bas. p. 42. Der Kürze wegen habe ich für erſte, zweite, dritte, vierte Sechzigtheile die jetzt gewöhnlichen Ausdrücke Minuten, Secunden, Tertien, Quarten gebraucht.

Theon fährt fort: „Dieſes faſſen wir ſo zuſammen: wenn wir zunächſt die 3025 Quarten durch 60 dividiren, ſo erhalten wir 50 Tertien und 25 Quarten; eben ſo geben die Tertien, welche mit den aus der Diviſion der Quarten hervorgegangenen 50 zuſammen 490 betragen, 8 Secunden und 10 Tertien; ferner die Secunden, zuſammen 4094, geben 68 Minuten und 14 Secunden; und endlich die Minuten, zuſammen 364, machen 6 Grade und 4 Minuten; und das Reſultat iſt $1375^\circ\ 4'\ 14''\ 10'''\ 25''''$; da Ptolemäus in der Folge, wo er dieſes vorträgt, nur noch die Secunden berückſichtigt, ſo nimmt er $1375^\circ\ 4'\ 14''$ beinahe an, und vernachläſſigt die Tertien und Quarten. Ebenſo, wenn die Multiplicatoren verſchiedene Zahlen ſind.“

Dieſe Multiplication mit ſechzigtheiligen Brüchen iſt alſo der von Eutokius auf Decimalzahlen angewandten Methode vollkommen analog; ein unweſentlicher Unterſchied beſteht darin, daß Eutokius die einzelnen Reſultate ſchon reducirt hinſchreibt, was indeß in der Art der Griechiſchen Zahlenbezeichnung ſeinen Grund hat, da der Grieche nicht in derſelben Art, wie er mehr als 59 Sechzigtheile bezeichnet, auch mehr als 999 Hunderter u. ſ. w. in Zeichen ausdrücken kann.

Von beſonderem Intereſſe aber ſind für uns die Beiſpiele von Diviſion und von Wurzelausziehung bei Theon, weil ſie überhaupt die einzigen Beiſpiele ſind, welche die Griechiſche Literatur für dieſe Operationen uns darbietet. Darum iſt es aber auch um ſo nothwendiger, gerade hierin Theon's Verfahren ganz treu wiederzugeben, und nicht, wie Delambre namentlich in dem Beiſpiel von der Wurzelausziehung thut, zu zeigen, wie Theon es hätte machen können[29]. Da die Ausgabe des Originals nichts weniger als eine typographiſche Rarität iſt, ſo begnüge ich mich auch hier mit einer möglichſt treuen Überſetzung: „Es ſei ferner,“ ſagt Theon[30], „die Aufgabe geſtellt,

29) Delambre Hist. de l'Astr. anc. T. II. p. 27. Arithm. der Griechen S. 35. Delambre geſteht ſeine Abweichung vom Original ſelbſt ein, und ſucht dieſelbe durch folgende Worte zu rechtfertigen: J'ai fait quelques changemens au calcul de Théon, mais sans rien supposer qui ne fût bien connu des Grecs. Warum aber überhaupt Abweichungen? Der angeführte Grund kann dieſelben ſchwerlich entſchuldigen, geſchweige denn motiviren, da es ſich um eine hiſtoriſche Kenntniß handelt. Was könnte man mit einem ſolchen Grundſatze aus fremden Werken nicht Alles machen!

30) Ed. Bas. p. 42.

eine gegebene Zahl durch Grade, Minuten und Secunden zu dividiren. Die gegebene Zahl ſei 1515° 20′ 15″ ($\overline{\text{αφιε}}$ κʹ ιεʺ), und man ſolle ſie dividiren durch 25° 12′ 10″ (μερίσαι αὐτὸν ἐπὶ τὸ $\overline{\text{κε}}$ ιβʹ ιʺ), das iſt, man ſoll finden, wie oft die Zahl 25° 12′ 10″ in der Zahl 1515° 20′ 15″ enthalten iſt. Wir nehmen zuerſt den Quotienten 60 (μερίζομεν αὐτὸν πρῶτον παρὰ τὸν $\overline{\text{ξ}}$), weil 61 zu groß iſt, und wir ſubtrahiren ſechzigmal die 25° und die 12′ und die 10″, und zwar zuerſt die 25°; es werden 1500°; dann löſen wir die reſtirenden 15 Grade in 900 Minuten auf, und addiren dieſe zu den 20 Minuten; von der Summe, 920 Minuten, ſubtrahiren wir ſechzigmal 12 Minuten, d. i. 720′; und endlich von den reſtirenden 200 Minuten und 15 Secunden ſubtrahiren wir ſechzigmal 10, das iſt 600 Secunden, oder 10 Minuten; es bleiben 190′ 15″ übrig. Indem wir nun wieder von vorne anfangen, dividiren wir dieſe durch 15°; der Quotient iſt 7 (γίνεται ὁ μερισμὸς περὶ τὸν $\overline{\text{ζ}}$), denn 8 iſt zu groß (ὑπερπίπτει γὰρ περὶ τὸν $\overline{\text{η}}$); und die aus der Multiplication [31]) hervorgegangenen 175 Minuten ſubtrahiren wir von den 190 Minuten; dann löſen wir die

---

31) Im Original heißt es: καὶ τὰ γενόμενα ἐκ τῆς παραβολῆς ἑξηκοστὰ $\overline{\text{α}}$ (d. i. πρῶτα) ροεʹ ἀφαιροῦμεν etc. Παραβάλλειν, παραβολή ſind Ausdrücke, die bei den Griechiſchen Mathematikern einige Schwierigkeit haben. Παραβάλλειν heißt zunächſt *heranwerfen*, *heranlegen*; daher wird das Verbum gebraucht z. B. in der Aufgabe, einen gegebenen Raum in ein Rechteck mit gegebener Seite zu verwandeln; Eucl. El. I, 44: Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν. Weil man nun durch Rechnung die zweite Seite des Rechtecks findet, wenn man den gegebenen Raum durch die gegebene Seite dividirt, ſo hat παραβάλλειν die Bedeutung von *Dividiren*, παραβολή *Diviſion* erhalten. An unſerer Stelle aber müſſen wir wieder auf die Grundbedeutung zurückgehen; um den Reſt zu erhalten, *legt* man das Product des Quotienten in den Diviſor *an* den Dividendus; das iſt die παραβολή. Ich habe dem Sinne nach *Multiplication* überſetzt. Weil in dem von Archimedes ſogenannten rechtwinkligen Kegelſchnitte das Quadrat der Ordinate, an den Parameter angelegt, d. h. in ein Rechteck verwandelt, deſſen eine Seite der Parameter iſt, zur andern Seite die Abſciſſe erhält, alſo gewiſſermaßen an die Abſciſſe *herangeworfen* dieſelbe deckt, ſo nennt Apollonius dieſen Kegelſchnitt παραβολή, Parabel. In der Ellipſe iſt das Quadrat der Ordinate kleiner als das Rechteck aus dem Parameter in die Abſciſſe; daher wird bei jener Anlegung nicht die ganze Abſciſſe gedeckt, es fehlt noch etwas, (ἐλλείπει), daher dieſe Curve ἔλλειψις. In der Hyperbel iſt jenes Quadrat größer als das genannte Rechteck, es fällt alſo bei der Anlegung über die Abſciſſe

übrig bleibenden 15 Minuten in 900 Secunden auf und addiren dazu die 15″, von der Summe ſubtrahiren wir ſiebenmal 12 Minuten, das iſt 84 Secunden, weil auch die 7, Minuten ſind; und es bleiben 831 Secunden Reſt; endlich ſubtrahiren wir davon gleichfalls ſiebenmal 10 Secunden, nämlich 70 Tertien, oder eine Secunde und 10 Tertien, und es bleiben 829 Secunden 50 Tertien übrig. Dieſe dividiren wir abermals durch 25°, und der Quotient wird 33; die Multiplication (παραβολή, wie oben) giebt 825″, es bleiben 4″ 50‴ Reſt, oder 290‴; dann ſubtrahiren wir wiederum dreiunddreißigmal 12 Minuten, welches 396‴ ſind, ſo daß das Reſultat der Diviſion der 1515° 20′ 15″ durch 25° 12′ 10″ nahe 60° 7′ 33″ wird. Denn wenn wir umgekehrt dieſe letzteren multipliciren mit 25° 12′ 10″, ſo erhalten wir nahe 1515° 20′ 15″."

Dieſe Methode iſt alſo ganz einfach, und läßt ſich ebenſo auf Decimalzahlen anwenden, indem man die ſechzigtheiligen εἴδη durch Einer, Zehner, Hunderter u. ſ. w., aber in aufſteigender Ordnung erſetzt; Delambre führt nach der von Theon gegebenen Theorie eine ſolche Diviſion in gewöhnlichen Zahlen aus; die Operation wird aber weitläufig und beſchwerlich, wenn die Zahlen groß ſind, und ſomit die Anzahl der Species anwächſt. Theon giebt kein Schema der Rechnung, wie er es bei der Multiplication thut; es läßt ſich auch nicht gut einfach und verſtändlich hinſchreiben, und iſt überdies nicht nöthig, da die Operation auch ohne daſſelbe ganz klar iſt. Indeß will ich der Vollſtändigkeit halber das Schema, wie Delambre [32]) es anordnet, hieher ſetzen:

---

hinweg, ὑπερβάλλεται, daher ὑπερβολή. In abgeleiteter Bedeutung heißt παραβολή dann auch *Vergleichung*, die ja eben durch *Aneinanderhalten* geſchieht.

32) Hist. de l'Astr. anc. T. II, p. 25. Arithm. d. Griechen S. 33.

Dividendus	1515° 20′ 15″	25° 12′ 10″	Diviſor
25° × 60°	1500°	60°	erſter Quotient
Reſt	15° = 900′		
Summa	920′		
12′ × 60°	720′		
Reſt	200′		
10″ × 60°	10′		
Reſt	190′ 15″	25° 12′ 10″	
25° × 7′	175′	7′	zweiter Quotient
Reſt	15′ = 900″		
Summa	915″		
12′ × 7′	84″		
Reſt	831″		
10″ × 7′	1″ 10‴		
Reſt	829″ 50‴	25° 12′ 10″	
25° × 33″	825″	33″	dritter Quotient
Reſt	4″ 50‴ = 290‴		
12′ × 33″	396‴		
zu groß	106‴		

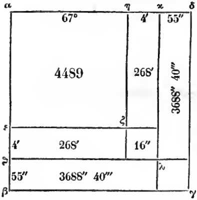
Der Fehler, den Theon durch die Annahme von 33″ macht, iſt nicht ganz unbeträchtlich; denn die Multiplication des Diviſors in den angenommenen Quotienten giebt das Reſultat 1515° 20′ 16″ 51‴ 30⁗, welches faſt um 2 Secunden größer iſt als der Dividendus. Indeß kam es ihm hier nur auf die Theorie an, und zudem hätten 32″ ein viel zu kleines Reſultat gegeben.

Bei der Ausziehung der Quadratwurzel nimmt Theon wieder ſeine Zuflucht zur Betrachtung der Figur, worauf Delambre in ſeiner Darſtellung am angeführten Orte gar keine Rückſicht nimmt. Um ein treues Bild nicht nur von der Sache, ſondern auch von Theon's Vorſtellung zu geben, will ich die auf dieſen Gegenſtand bezügliche Stelle in ihrer ganzen Weitläuftigkeit herſetzen [33]): „Hierauf dürfte es

33) Ed. Bas. p. 44. 45.

es an der Reihe ſein zu bemerken, wie wir, wenn ein quadratiſcher Raum gegeben iſt, der keine in der Länge rationale Seite (πλευρὰν μήκει ῥητήν) hat, die Seite deſſelben durch Annäherung berechnen können. Die Sache iſt für ein Quadrat, welches eine rationale Seite hat, aus dem vierten Satze des zweiten Buchs der Elemente klar, der ſo lautet: Wenn eine gerade Linie beliebig geſchnitten wird, ſo iſt das Quadrat der ganzen Linie gleich den Quadraten der beiden Abſchnitte und dem doppelten Rechtecke, welches von den Abſchnitten gebildet wird. Denn wenn wir eine gegebene Quadratzahl, z. B. 144 haben, welche eine rationale Wurzel (im Gr. πλευρά, Seite, wie oben und immer)

hat, etwa die Linie $\alpha\beta$ [34]), und wir nehmen ein Quadrat, welches kleiner iſt als jenes, etwa 100, deſſen Seite 10 iſt, und nehmen $\alpha\gamma$ gleich 10 an, und verdoppeln es, weil das Rechteck der Abſchnitte doppelt ſein ſoll, und dividiren mit den ſo entſtandenen 20 in den Reſt 44, ſo wird der Reſt 4 das Quadrat von $\beta\gamma$, dieſes ſelbſt aber in der Länge 2 ſein. Es war aber $\alpha\gamma = 10$, alſo wird die ganze Linie $\alpha\beta$ gleich 12 ſein, was bewieſen werden ſollte. Damit uns aber an einer in der Syntaxis vorkommenden Zahl das Weſen dieſes theilweiſen Wegnehmens vor Augen geführt werde, ſo wollen wir die Darſtellung an der Zahl 4500 durchführen, deren Wurzel dort gleich 67° 4′ 55″ geſetzt wurde. Es liege ein quadratiſcher Raum $\alpha\beta\gamma\delta$ vor, allein



im Quadrat rational (δυνάμει μόνον ῥητόν), deſſen Inhalt 4500 Grade (μοιραί) ſein ſoll, und es werde verlangt, die Quadratwurzel deſſelben durch Annäherung zu berechnen. Da nun das der Zahl 4500 nächſtliegende Quadrat mit rationaler Wurzel gleich 4489 ganzen Graden und deſſen Seite gleich 67° iſt, ſo werde von dem Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$ das Quadrat $\alpha\zeta$ gleich 4489 Graden, deſſen Seite 67° iſt, weggenommen. Der Reſt alſo, das heißt, der Gnomon $\beta\zeta\delta$ wird gleich

34) Die hiezu gehörige Figur fehlt in der Baſeler Ausgabe.

11 Graden ſein. Dieſe löſen wir in Minuten auf und erhalten 660′. Dann nehmen wir εζ doppelt, weil zwei Rechtecke auf εζ ſtehen, da εζ gleich ζη iſt (ἔπειτα διπλασιάσαντες τὴν εζ διὰ τὸ δὶς ὑπὸ εζ, ὥσπερ ἐπ' εὐθείας τῇ εζ τὴν ζη λαμβάνοντες), und durch das Reſultat 134 dividiren wir die 660 Minuten und durch den Quotienten, 4 Minuten, erhalten wir jede der beiden Linien εθ, ηκ (καὶ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς δ' α ἑξηκ. ἕξομεν ἑκατέραν τῶν εθ ηκ); und wenn wir die Parallelogramme θζ, ζκ ausfüllen, ſo finden wir ſie gleich 536 Minuten, oder jedes von ihnen gleich 268 Minuten. Nun löſen wir abermals die reſtirenden 124 Minuten in 7440 Secunden auf, und ſubtrahiren auch das Ergänzungsquadrat ζλ, welches 16 Secunden beträgt, ſo daß wir, wenn wir um das vorige Quadrat αζ den Gnomon herumſetzen, das Quadrat αλ erhalten, deſſen Seite 67° 4′, das alſo ſelbſt gleich 4497° 56′ 16″ iſt. Nun bleibt noch der Gnomon βλδ gleich 2° 3′ 44″ oder 7424″ übrig. Wir nehmen alſo wieder θλ doppelt, weil θλ gleich λκ iſt, und dividiren durch dieſe 134° 8′ die 7424 Secunden, und erhalten in dem Quotienten, 55 Secunden, jede der beiden Linien θβ, κδ. Und wenn wir die Parallelogramme βλ, λδ ausfüllen, ſo erhalten wir dieſelben gleich 7377 Secunden 20 Tertien, und jedes derſelben gleich 3688″ 40‴; es bleiben als Reſt 46″ 40‴, welchen nahe kommt das Quadrat λγ, deſſen Seite 55 Secunden iſt, und ſo haben wir die Seite des Quadrats αβγδ, welches gleich 4500 Graden iſt, nahe gleich 67° 4′ 55″. Und im Allgemeinen, wenn wir die Quadratwurzel irgend einer Zahl ſuchen, ſo nehmen wir zuerſt die Wurzel der zunächſtliegenden Quadratzahl, dann verdoppeln wir dieſe und dividiren damit in den Reſt, nachdem wir denſelben in erſte Sechzigtheile aufgelöſt haben, und ſubtrahiren das Quadrat des Quotienten; dann löſen wir wieder den Reſt in zweite Sechzigtheile auf und dividiren ihn durch die doppelten Grade und Minuten, ſo erhalten wir nahe die geſuchte Zahl für die Seite des quadratiſchen Raumes [35]).“

---

35) Καὶ καθόλου ἐὰν ζητῶμεν ἀριθμοῦ τινὸς τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν, λαμβάνομεν πρῶτον τοῦ σύνεγγυς τετραγώνου ἀριθμοῦ τὴν πλευρὰν, εἶτα ταύτην διπλασιάζοντες καὶ περὶ τὸν γενόμενον ἀριθμὸν

Es wird in der Sache ſelbſt gar nichts geändert, wenn die gegebene Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden ſoll, ſchon in Ganzen und ſechzigtheiligen Brüchen gegeben iſt. Indeß will ich auch das Beiſpiel, welches Theon für dieſen Fall giebt, weil es kurz iſt, noch hieher ſetzen[36]. Er hat nämlich die Wurzel aus 2° 28′ zu ziehen, und ſagt: „Ich beſchreibe ein Quadrat und nehme dann ein kleineres Quadrat mit der Seite 1° an, deſſen Inhalt gleichfalls 1° iſt; denn dieſe Zahl iſt dasjenige Quadrat, welches zunächſt kleiner iſt als die Zahl, deren Quadratwurzel geſucht wird. Nun ſubtrahire ich den einen Grad von den 2° 28′, den übrigbleibenden Grad löſe ich in 60 Minuten auf, zu dieſen addire ich die 28′, ſo entſtehen 88′. Dieſe dividire ich durch das Doppelte des 1 Grades, nämlich durch 2°, und der Quotient iſt 34′ (καὶ γίνεται ὁ μερισμὸς περὶ τὸν λδ′), zweimal 34′ iſt 68′; wenn ich dieſe von den 88′ abziehe, bleiben 20 Minuten; dieſe löſe ich in Secunden auf, ſo erhalte ich 1200 (im Original ſteht $\overline{\alpha\varsigma}$, 1006, Druckfehler für $\overline{\alpha\sigma}$); davon ziehe ich ab das Quadrat der 34 Minuten, das heißt 1156 Secunden und es bleiben noch 44 Secunden übrig; dieſe dividire ich wiederum durch das Doppelte von 1 Grad und 34 Minuten, das iſt durch 3 Grade 8 Minuten, ſo wird der Quotient 15, und ich habe als Reſultat gefunden 1° 34′ 15″ beinahe."

Auch bei dieſer Rechnung ſteht am Rande eine Figur, wie bei dem erſten Beiſpiele; nur nimmt der Verfaſſer hier, weil er die Methode ſchon als bekannt vorausſetzen darf, auf die Figur weniger Rückſicht, als oben, wenngleich die Vorſtellung ſich noch nicht ganz von derſelben losſagt und immer noch auf einem geometriſchen Fundamente ruht.

Man erſieht aus dem Mitgetheilten, daß dieſe Methode mit der von uns angewandten im Principe vollkommen übereinkommt,

---

μερίζοντες τὸν λοιπὸν ἀριθμὸν, ἀναλυθέντα εἰς πρῶτα ἑξηκοστὰ, ἀπὸ τοῦ ἐκ τῆς καραβολῆς γινομένου ἀφαιροῦμεν τετράγωνον, καὶ ἀναλύοντες πάλιν τὰ ὑπολειπόμενα εἰς δεύτερα ἑξηκοστὰ καὶ μερίζοντες παρὰ τὸν διπλασίονα τῶν μοιρῶν καὶ ἑξηκοστῶν, ἕξομεν ἔγγιστα τὸν ἐπιζητούμενον τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγωνικοῦ χωρίου ἀριθμόν. Bei Delambre (Hist. p. 27) befindet ſich ein Druckfehler, der auch in Hoffmann's Überſetzung S. 36 übergegangen iſt, indem Beide Secunden ſtatt Minuten geben, an der Stelle, die den Worten ἀναλυθέντα εἰς πρῶτα ἑξηκοστὰ entſpricht.

36) Es ſteht Ed. Bas. p. 47.

und daß die Abweichungen beider in der Praxis nur in der verſchiedenen Zahlenbezeichnung ihren Grund haben. Auch läßt ſich leicht einſehen, daß daſſelbe Verfahren, wenngleich bei großen Zahlen mit bedeutend vermehrter Schwierigkeit, ſich auf das Griechiſche Decimalſyſtem anwenden ließe, wenn man die durch die Potenzen von zehn gebildeten Species an die Stelle der von Theon gebrauchten ſechzigtheiligen ſubſtituirte. Daß indeß dieſe Methode von den Griechen bei Decimalzahlen nicht gebraucht worden iſt, beweiſt, wie ich oben ſchon erwähnt, Eutokius, der die Ausziehung von Quadratwurzeln gefliſſentlich vermeidet, obgleich ſein Commentar zu der Kreismeſſung Archimed's ihm gerade zu dieſer Rechnung ununterbrochen Gelegenheit darbot.

Ich glaube in dieſem Abſchnitte ein treues Bild von den noch vorhandenen Griechiſchen Zahlenrechnungen entworfen zu haben. Wenigſtens habe ich mich bemüht, jedesmal die eigenthümliche Vorſtellungsweiſe der Alten gewiſſenhafter wiederzugeben, als es von Delambre geſchehen iſt, deſſen Vorarbeit ich indeß nichts deſto weniger mit gebührendem Danke anerkenne.

Fünftes Kapitel.

Die Griechiſche Arithmetik.

Der Gegenſtand dieſes Kapitels zwingt uns den bereits gewonnenen ſichern hiſtoriſchen Boden einſtweilen wieder zu verlaſſen, indem er uns in die Zeiten des grauen Alterthums und der unſicheren Sagen zurückverſetzt. Es liegt indeß nicht in meinem Intereſſe, Sagen an einander zu reihen, bei denen wir weiter nichts thun können, als ſie nacherzählen, und aus denen für die Geſchichte der Wiſſenſchaft keine Reſultate gewonnen werden. Ich werde mich daher ſo viel als möglich nur an das Poſitive halten.

Dem ſpeculativen Geiſte der Griechiſchen Philoſophen konnte ein Begriff, wie der der Zahl, nicht lange entgehen, und die Einfachheit, Urſprünglichkeit und Vieldeutigkeit dieſes Begriffs machte ihn frühe zu einem beliebten Gegenſtande philoſophiſcher Unterſuchungen. Es ſcheint, daß der berühmte (faſt möchte man ſagen, der berüchtigte) Pythagoras, um 550 v. Chr. G., hiezu die Bahn gebrochen hat, indem er als erſtes Princip ſeines Syſtems den Begriff der Zahl hinſtellte; und wie ſpäterhin die Platoniſche Schule eine mächtige Pflegerin der Geometrie ward, ſo hat die Schule des Pythagoras die Zahlenlehre fortgebildet. Wir wollen es aber dieſem großen Manne, von dem wir leider, ſo viel auch über ihn erzählt oder vielmehr geſchwatzt wird, faſt gar nichts wiſſen, nicht zum Vorwurf machen, daß die ſpäteren Zöglinge ſeiner Schule und Fortpflanzer ſeines Namens ſich bald in die zügelloſeſten excentriſchen Träumereien verloren und daß man ſeinen Namen mißbrauchte, indem man Ausgeburten einer überſpannten Phantaſie, abgeſchmackte Myſterien über die verborgenen Eigenſchaften einzelner Zahlen, die jedes geſunden Geiſtes unwürdig ſind, dadurch zu legitimiren ſuchte, daß man ihnen den großen Namen des alten Meiſters an ihre freche leere Stirne ſchrieb. Man wird es mir nicht verargen, daß ich hier alle jene auf die Zahlenbetrachtung zurückgeführten kosmologiſchen Träu-

mereien bei Seite ſchiebe und das oft Geſagte, das nicht *einmal* erzählt zu werden verdiente, nicht wiederholen mag. Ich will dagegen den Mathematiker *Pythagoras* ins Auge faſſen, und zwar nur eine, aber eine intereſſante Entdeckung, die er gemacht hat, hier mittheilen. Jedermann weiß aus ſeinen Knabenjahren her, welche ſchöne fruchtbare Eigenſchaft des rechtwinkligen Dreiecks Pythagoras entdeckt hat. Wenn alten Berichten Glauben zu ſchenken und nicht anzunehmen iſt, daß eine ſpäterer Entdeckung auf einen großen Namen der Vorzeit zurückgetragen worden iſt, ſo hat Pythagoras ſich nicht begnügt, ſeinen ſchönen Satz geometriſch ausgeſprochen und bewieſen zu haben, ſondern er hat auch, wie es heißt, eine Methode erfunden, rechtwinklige Dreiecke in rationalen darzuſtellen, d. h. zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl wird, eine Theorie, welche in der ſpäteren Arithmetik von unberechenbarem Einfluß geworden iſt und einen hohen Grad von Berühmtheit erlangt hat. Zwar giebt *Pythagoras* die Formel nicht allgemein, und ſelbſt nach der Ergänzung, welche nach Proklus [1] von *Platon*, nach Boethius von *Archytas* [2] hinzugefügt ward, bleibt ſie noch auf ſpecielle Fälle eingeſchränkt. Der Hauptſchritt aber, nämlich der erſte, war einmal geſchehen, und es war ſonach nicht mehr ſchwer, die ſpecielle Methode zu verallgemeinern, und ſchon bei *Euklides* [3] finden wir ſie in ihrer völligen Allgemeinheit ausgeſprochen. Proklus, der am angeführten Orte die Regel des Pythagoras und Platon uns aufbehalten hat, ſtellt dieſelbe ſo dar: *Παραδέδονται δὲ καὶ μέθοδοί τινες τῆς εὑρέσεως τῶν τοιούτων τριγώνων, ὧν τὴν μὲν εἰς Πλάτωνα ἀναπέμπουσι, τὴν δὲ εἰς Πυθαγόραν, ἣ ἀπὸ τῶν περιττῶν ἐστιν ἀριθμῶν. Τίθησι γὰρ τὸν δοθέντα περιττὸν ὡς ἐλάσσονα τῶν περὶ τὴν ὀρθήν· καὶ λαβοῦσα τὸν ἀπ' αὐτοῦ* [4] *τετράγωνον καὶ τούτου μονάδα ἀφελοῦσα, τοῦ λοιποῦ τὸν ἥμισυν* [5] *τίθησι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸν μείζονα· προσθεῖσα δὲ καὶ τούτῳ μονάδα, τὴν λοιπὴν ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσαν· οἷον τὸν τρία λαβοῦσα καὶ τετραγωνίσασα καὶ ἀφελοῦσα τοῦ*

---

1) Comm. in Eucl. El. I. 47, ed. Bas. p. 111.

2) S. Chasles Geſch. d. Geom. S. 525 d. Überſ.

3) Elem. X, 29. Lemma 1.

4) Ed. *ἐπ' αὐτοῦ*.

5) Ed. *τὸν ἥμισυ*; es muß entweder *τὸν ἥμισυν*, oder *τὸ ἥμισυ* heißen.

ἐννέα μονάδα, τοῦ η̅ λαμβάνει τὸ ἥμισυ τὸν δ̅, καὶ τούτῳ προς τίϑησι [6]) πάλιν μονάδα καὶ ποιεῖ τὸν ε̅, καὶ εὕρηται τρίγωνον ὀρϑογώνιον [7]) ἔχον τὴν μὲν τριῶν, τὴν δὲ [8]) τεσσάρων, τὴν δὲ ε̅. Ἡ δὲ Πλατωνικὴ ἀπὸ τῶν ἀρτίων ἐπιχειρεῖ· λαβοῦσα γὰρ τὸν δοϑέντα ἄρτιον, τίϑησιν αὐτὸν [9]) ὡς μίαν πλευρὰν τῶν περὶ τὴν ὀρϑὴν, καὶ τοῦτον διχοῦσα δίχα καὶ τετραγωνίσασα [10]) τὸ ἥμισυ, μονάδα μὲν τῷ τετραγώνῳ προσϑεῖσα, ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσαν, μονάδα δὲ ἀφελοῦσα [11]) τοῦ τετραγώνου, ποιεῖ τὴν ἑτέραν τῶν περὶ τὴν ὀρϑήν· οἷον τὸν τέσσαρα λαβοῦσα, καὶ τούτου τὸν ἥμισυν [12]) τὸν β̅ τετραγωνίσασα καὶ ποιήσασα αὐτὸν δ̅, ἀφελοῦσα μὲν μονάδα ποιεῖ τὸν γ̅, προσϑεῖσα δὲ ποιεῖ τὸν ε̅, καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ γενόμενον τρίγωνον, ὃ καὶ ἐκ τῆς ἑτέρας ἀπετελεῖτο μεϑόδου. d. h. „Es werden auch einige Methoden mitgetheilt, ſolche Dreiecke zu finden, deren eine man auf Platon, die andere, welche von ungeraden Zahlen anfängt, auf Pythagoras zurückführt. Man nimmt nämlich die gegebene ungerade Zahl als kleinere Kathete an. Von dem Quadrate derſelben die Einheit ſubtrahirt, und der Reſt halbirt, giebt die größere Kathete; zu dieſer die Einheit addirt, giebt die Hypotenuſe. Man nimmt z. B. 3 an, von dem Quadrate 9 nimmt man die Einheit weg, und halbirt den Reſt 8, d. i. 4; dazu addirt man wiederum die Einheit, das macht 5, und es wird das rechtwinklige Dreieck von den Seiten 3, 4, 5 gefunden [13]). Die

---

6) Ed. προτίϑησι.

7) Ed. ὀρϑωγώνιον.

8) δὲ fehlt in der Ausg.

9) Ed. αὐτῶν.

10) Ed. τετραγωνίας.

11) Ed. ἀφελῶν, offenbar falſch, weil überall μέϑοδος als Subject gedacht wird.

12) Ed. ἥμισυ, ſ. N. 5.

13) Dieſes Dreieck aus den Seiten 3, 4, 5 heißt auch zuweilen vorzugsweiſe das Pythagoriſche. Vitruvius IX, 2. ſagt, Pythagoras habe mit Hilfe dieſes Dreiecks gelehrt, praktiſch einen rechten Winkel zu conſtruiren, indem er drei Lineale, deren Längen ſich wie die Zahlen 3, 4, 5 zu einander verhielten, zuſammenſtellte. In den Theologumenis Arithmeticae (Ed. Paris. p. 39. 40. Ed. Ast. p. 38. 39.) περὶ ἑξάδος heißt es: Καὶ νῦν δὲ, ἐφ᾽ ὅσον ἑξάδι προσῆκεν, οὕτως ὁρατέον κατ᾽ ἐπιδρομὴν ἀπὸ μονάδος ἐν τῷ Πυϑαγορικῷ ὀρϑογωνίῳ τριγώνῳ τὴν πρόοδον ποιουμένοις, etc. Die wunderbaren

Platoniſche Methode beginnt von der geraden Zahl. Man nimmt nämlich irgend eine gegebene gerade Zahl, und ſetzt ſie als eine Kathete; dieſe halbirt und die Hälfte aufs Quadrat erhoben, und dem Quadrate die Einheit hinzugefügt, giebt die Hypotenuſe; die Einheit von dem Quadrate ſubtrahirt, giebt die andere Kathete. Nimmt man z. B. 4 an, ſo giebt die Hälfte 2 aufs Quadrat erhoben, 4. Davon die Einheit ſubtrahirt, giebt 3, die Einheit addirt giebt 5, und man erhält daſſelbe Dreieck, welches aus der erſten Methode hervorging."

Wenn wir dieſe beiden Regeln in moderne algebraiſche Formeln uns überſetzen, ſo ſetzen wir in der Pythagoräiſchen Regel die angenommene ungerade Zahl $2m - 1$, ihr Quadrat iſt $4m^2 - 4m + 1$, davon 1 ſubtrahirt und der Reſt halbirt, giebt $2m^2 - 2m$ für die zweite Kathete, und 1 dazu addirt, $2m^2 - 2m + 1$ für die Hypotenuſe. Demnach ſind die drei Zahlen, welche den Seiten des Dreiecks entſprechen

$$2m^2 - 2m + 1$$
$$2m^2 - 2m$$
$$2m - 1.$$

Dieſe Regel umfaßt alſo nur diejenigen rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenuſe und größere Kathete um 1 verſchieden ſind. Die allgemeine Formel giebt bekanntlich für die Hypotenuſe den Ausdruck $m^2 + n^2$, und für die Katheten $m^2 - n^2$ und $2mn$. Vergleichen wir beide Formeln mit einander, ſo ergiebt ſich, daß die Pythagoräiſche ſich auf den Fall beſchränkt, wo $(m^2 + n^2) - 2mn = 1$, d. h. $m - n = 1$ oder $n = m - 1$ iſt, wo alſo die beiden angenommenen Zahlen, aus denen das rechtwinklige Dreieck gebildet wird, um 1 verſchieden ſind [14]).

Eigenſchaften dieſes Dreiecks beſtehen nach des Verfaſſers Anſicht hauptſächlich darin, daß in demſelben ſich ein rechter Winkel, zwei ſchiefe einander ungleiche, zuſammen aber jenem gleiche ſich befinden; daß ferner drei die kleinere, vier die größere Kathete, fünf die Hypotenuſe und ſechs der Flächeninhalt iſt.

14) Von dieſer Formel für das rechtwinklige Dreieck ſcheint Boſſut nichts zu wiſſen. Er ſagt I, 5. 6. De toutes les découvertes arithmétiques de Pythagore, vraies ou supposées, le temps n'a réspecté que sa table de multiplication. Wir haben aber oben geſehen, daß die Multiplicationstafel nur durch ein Mißverſtändniß in der Ausgabe von Boethius Geometrie den Namen des Abacus Pythagoricus erhalten hat. Es wäre alſo weniger als wenig, wenn die Erfindung dieſer Tafel das Einzige wäre, was wir von Pythagoras Arithme-

Platon nimmt eine gerade Zahl, $2m$, als erſte Kathete an; dann wird nach der Vorſchrift die andere Kathete $m^2 - 1$, die Hypotenuſe $m^2 + 1$. Vergleichen wir dieſe Ausdrücke mit den allgemeinen, ſo lehrt der Augenſchein, daß hier $n = 1$ geſetzt iſt. Nimmt man nun zur Bildung rechtwinkliger Dreiecke eine der beiden Zahlen, m, willkührlich an, ſo kann man für n, welches kleiner als m ſein muß, ſucceſſive die Zahlen $m - 1$, $m - 2$, $m - 3$ .... 3, 2, 1 ſetzen, und jede einzige dieſer Combinationen giebt ein von den übrigen verſchiedenes Dreieck. Von dieſen $m - 1$ Werthen, welche n für ein gegebenes m haben kann, benutzen die beiden mitgetheilten Formeln nur die beiden Extreme. Setzt man z. B. $m = 5$, ſo kann n ſucceſſive 4, 3, 2, 1 ſein; davon nimmt Pythagoras nur 4, Platon nur 1 an, und Jener findet nur das Dreieck 41, 40, 9, Dieſer nur das Dreieck 13, 12, 5, und zwiſchen beiden bleiben die Dreiecke 17, 15, 8 und 29, 21, 20 übrig.

Man hat über die Erfindungen, welche Pythagoras in der Arithmetik gemacht hat, ſo viel geſchrieben, freilich nur in unbeſtimmten Ausdrücken, daß Mancher, der ſich um die Geſchichte nicht näher bekümmert hat, ſich wundern wird, wenn ich ſage, das eben Vorgetragene ſei das Einzige, was wir von der Arithmetik vor Euklides wiſſen. Und doch iſt dem vollkommen alſo. Zwar werden uns noch Demokritus, Archytas, Eudoxus, Philippus, Speuſippus, Xenokrates, Theophraſtus und Andere als Verfaſſer arithmetiſcher Werke genannt, aber ihre Namen, und zum Theil die Titel ihrer Bücher, ſind Alles, was uns über ſie bekannt iſt; Grund genug für uns, uns nicht länger bei ihnen aufzuhalten. Wir gehen alſo geradezu auf Euklides über.

Es gab in Europa eine Zeit, da man Alles, was in Euklid's Elementen enthalten war, als bekannt vorausſetzen durfte. Die Zeit iſt jetzt nicht mehr. Ich ſehe mich daher genöthigt, den Inhalt des arithmetiſchen Theils ſeines Werks meinen Leſern etwas ausführlicher vor Augen zu führen, als es vor dreihundert Jahren nöthig geweſen wäre.

Gewöhnlich nennt man die Bücher 7 — 10 der Elemente die

---

tiſches haben. Reimer, der zu ſeiner Überſetzung des Boſſutiſchen Werks namentlich im erſten Bande bedeutende Zuſätze geliefert, hat dieſen Fehler berichtigt und die Theorie des rationalen Dreiecks nach Proklus hinzugefügt. Th. I. S. 31 folgd.

arithmetiſchen, die übrigen die geometriſchen. Dieſe Eintheilung iſt aber weder nach Griechiſcher, noch nach unſerer Vorſtellung ganz richtig. Denn das zehnte Buch iſt der Form nach geometriſch, indem es nicht von Irrationalzahlen, ſondern von Irrationallinien handelt. Erlauben wir uns aber, dieſe von Euklides geometriſch vorgetragene Theorie nach unſerer Denkart als eine arithmetiſche zu betrachten und zu behandeln, ſo dürfte es ſchwer werden, hier zwiſchen Form und Inhalt, als Eintheilungsgrund, eine ſtrenge Grenze zu ziehen. Jedenfalls aber müſſen wir dann das zweite Buch auch zu den arithmetiſchen zählen, da von ſeinen vierzehn Sätzen die erſten zehn gleichfalls nur geometriſch ausgeſprochene und bewieſene, aber ihrem Weſen nach lauter arithmetiſche Wahrheiten enthalten. Dieſe zehn Sätze ſind, arithmetiſch ausgedrückt, folgende:

1. $ab + ac + ad + \ldots\ldots = a\,(b + c + d + \ldots\ldots)$
2. $(a + b)^2 = (a + b)\,a + (a + b)\,b$
3. $(a + b)\,a = ab + a^2$
4. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
5. $ab + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$
6. $(a + b)\,b + \frac{1}{4}a^2 = (\frac{1}{2}a + b)^2$
7. $(a + b)^2 + a^2 = 2\,(a + b)\,a + b^2$
8. $4\,(a + b)\,a + b^2 = (2a + b)^2$
9. $a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a - b}{2}\right)^2$
10. $b^2 + (a + b)^2 = 2\,(\frac{1}{2}a)^2 + 2\,(\frac{1}{2}a + b)^2$

Wir beſitzen auch ſchon eine arithmetiſche Übertragung dieſer zehn Sätze von einem ſpätern Griechen, Barlaam, der Mönch genannt, aus dem vierzehnten Jahrhundert, welche den Titel führt: *ἀριϑμητικὴ ἀπόδειξις τῶν γραμμικῶς ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν στοιχειῶν ἀποδειχϑέντων*, und die von Conrad Daſypodius zugleich mit dem zweiten Buche Euklid's herausgegeben worden iſt [15]). Die Art der Beweiſe in dieſer Bearbeitung iſt ganz dieſelbe, wie in dem ſiebenten und den folgenden Büchern Euklid's. Als Probe wähle ich

15) Εὐκλείδου τῶν πέντε καὶ δέκα στοιχειῶν ἐκ τῶν τοῦ Θεῶνος συνουσιῶν τὸ δεύτερον καὶ Βαρλάαμ μονάχου ἀριϑμητικὴ ἀπόδειξις τῶν γραμμικῶς ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν στοιχειῶν ἀποδειχϑέντων. Per Cunradum Dasypodium. 8. (Am Ende der praefatio ſteht die Jahrzahl 1564).

den vierten der genannten Sätze aus, welcher bei Euklides ſo lautet: Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἔσται τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Barlaam überſetzt den Satz ſo: Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς (τε) ἀπὸ τῶν μερῶν τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν μερῶν ἐπιπέδῳ. Die Ausführung iſt folgende: Ἀριθμὸς γὰρ ὁ $\overline{\alpha\beta}$ διαιρήσθω εἰς δύο ἀριθμοὺς τοὺς $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\beta}$. Λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τοῦ $\overline{\alpha\beta}$ τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\beta}$ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\beta}$ ἐπιπέδῳ. Ἔστω γὰρ ἀπὸ μὲν τοῦ $\overline{\alpha\beta}$ τετράγωνος ὁ $\overline{\delta}$, ἀπὸ δὲ τοῦ $\overline{\alpha\gamma}$ ὁ $\overline{\varepsilon\zeta}$, ἀπὸ δὲ τοῦ $\overline{\gamma\beta}$ ὁ $\overline{\eta\theta}$, ἐκ δὲ τῶν $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\beta}$ ἑκάτερος τῶν $\overline{\zeta\eta}$, $\overline{\theta\kappa}$. Ἐπεὶ τοίνυν ὁ $\overline{\alpha\gamma}$ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν $\overline{\varepsilon\zeta}$, ὁ ἄρα $\overline{\alpha\gamma}$ μετρεῖ τὸν $\overline{\varepsilon\zeta}$ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας· πάλιν ἐπεὶ ὁ $\overline{\gamma\beta}$ τὸν $\overline{\gamma\alpha}$ πολλαπλασιάσας ἐποίησε τὸν $\overline{\zeta\eta}$, μετρεῖ ἄρα τὸν $\overline{\zeta\eta}$ ὁ $\overline{\alpha\gamma}$ κατὰ τὰς ἐν τῷ $\overline{\gamma\beta}$ μονάδας· ἐμέτρει δὲ καὶ τὸν $\overline{\varepsilon\zeta}$ κατὰ τὰς ἐν ἑαυτῷ· ὅλον ἄρα τὸν $\overline{\varepsilon\eta}$ μετρεῖ ὁ $\overline{\alpha\gamma}$ κατὰ τὰς ἐν τῷ $\overline{\alpha\beta}$ μονάδας. Ὁ ἄρα $\overline{\alpha\beta}$ πολλαπλασιάσας τὸν $\overline{\alpha\gamma}$ ἐποίησε τὸν $\overline{\varepsilon\eta}$. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ὁ $\overline{\eta\kappa}$ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ ἐκ τῶν $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$· καὶ ἔστιν ὁ ἀπὸ τοῦ $\overline{\alpha\beta}$ τετράγωνος ὁ $\overline{\delta}$· ἐὰν δὲ ἀριθμὸς διαιρεθῇ εἰς δύο ἀριθμοὺς, ὁ ἀπὸ τοῦ ὅλου τετράγωνος ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς ἐκ τοῦ ὅλου καὶ ἑκατέρου τῶν μερῶν ἐπιπέδοις· ἴσος ἄρα ὁ $\overline{\delta}$ τῷ $\overline{\varepsilon\kappa}$· ἀλλὰ μὴν ὁ $\overline{\varepsilon\kappa}$ συγκείμενός ἐστιν ἔκ τε τῶν ἀπὸ τῶν $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\beta}$ τετραγώνοις καὶ τοῦ δὶς ἐκ τῶν $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\beta}$ ἐπιπέδου· ὁ δὲ $\overline{\delta}$ ὑπάρχει ὁ ἀπὸ τοῦ $\overline{\alpha\beta}$ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ $\overline{\alpha\beta}$ τετράγωνος ἴσος ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\beta}$ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ἐκ τῶν $\overline{\alpha\gamma}$ $\overline{\gamma\beta}$ ἐπιπέδῳ. Eine arithmetiſche Anwendung dieſes nämlichen Satzes haben wir ſchon im vorigen Kapitel betrachtet, bei Gelegenheit der Theonſchen Methode der Wurzelausziehung. Aber der Satz ward da noch geometriſch ausgeſprochen, ſowie Theon's ganze Darſtellungsweiſe noch geometriſch war. Bei Barlaam erſcheint der Satz rein arithmetiſch, und ähnlich ſind die neun übrigen

Sätze behandelt. Von den ſonſtigen arithmetiſchen Arbeiten Barlaam's werden wir in Zukunft gehörigen Orts mehr ſagen. Wir kehren jetzt zu Euklides zurück.

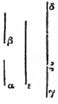
Das ſiebente, achte und neunte Buch der Elemente enthält die eigentliche Arithmetik, nämlich die der Rationalzahlen, welche auch von dem Verfaſſer als ſolche vorgetragen wird, und ſowohl der Gegenſtand als die Behandlungsart unterſcheidet dieſe Bücher weſentlich von dem zehnten. Da dieſe Bücher das älteſte Werk ſind, in welcher die theoretiſche Zahlenlehre behandelt wird, und da dieſelben alſo als die Grundlage aller ſpäteren Unterſuchungen der Art angeſehen werden können, ſo ſei mir hier eine etwas weitläuftigere Analyſe und eine Aufzählung wenigſtens der wichtigeren und für den ſpäteren Stand der Wiſſenſchaft einflußreicheren Sätze erlaubt, nachdem ich einige Worte über Euklid's Methode vorausgeſchickt habe. Die Euklidiſche Arithmetik unterſcheidet ſich von den ſämmtlichen ſpäteren ſehr zahlreichen Werken der Art durch die wiſſenſchaftliche Strenge und Gründlichkeit der Beweiſe. Aber ſeine Beweiſe für Zahlenwahrheiten haften inſofern an geometriſchen Vorſtellungen, als er, in Ermangelung paſſender Symbole, deren Einführung ſpäteren Jahrhunderten vorbehalten blieb, zur ſinnlichen Darſtellung allgemeiner, aller zufälligen acceſſoriſchen Specialitäten entäußerter Zahlen ſich der geraden Linien bedient. Coſſali [16]) nennt eine ähnliche Erſcheinung in dem Werke des Leonard Bonacci nicht unpaſſend eine **Analisi speciosa lineare**, zum Unterſchiede der neueren **Analisi speciosa letterale**. Daß in manchen Handſchriften neben dieſen die allgemeinen Zahlen darſtellenden Linien beſtimmte Zahlenwerthe, welche für den ſpeciellen Fall paſſen, ſich befinden, wie Hornsby aus einem Manuſcript der Bodleyaniſchen Bibliothek mittheilt [17]), thut der Sache weiter keinen Abbruch. Es ſind dieſelben blos als erläuternde Beiſpiele, vielleicht von der Hand eines ſpäteren Abſchreibers, anzuſehen. Um Euklid's lineäre Methode zu veranſchaulichen, wähle ich hier einen ſeiner einfachſten Beweiſe, nämlich den des 37. Satzes des ſiebenten Buchs aus, welcher ſo lautet:

W e n n z w e i Z a h l e n e i n e (andere) Z a h l m e ſ ſ e n, ſ o

16) Orig. dell Alg. T. I. p. 37.

17) Euklid's Elemente überſ. von Lorenz u. Mollweide. 4. Ausg. Halle u. Berlin. 1818. Vorrede S. XIX.

wird auch die kleinſte Zahl, welche von jenen gemeſſen wird, dieſelbe Zahl meſſen.



Beweis. Zwei Zahlen, α, β, ſollen eine Zahl $\overline{\gamma\delta}$ meſſen; die kleinſte, welche von ihnen gemeſſen wird, ſei ε; ſo ſage ich, daß auch ε die $\overline{\gamma\delta}$ mißt. Denn wenn ε die $\overline{\gamma\delta}$ nicht mißt, ſo wird ε, wenn es die $\overline{\delta\zeta}$ mißt, einen Reſt $\overline{\zeta\gamma}$ kleiner als ε laſſen. Da nun α und β die ε, ε aber die $\overline{\delta\zeta}$ mißt, ſo werden auch α und β die $\overline{\delta\zeta}$ meſſen. Aber α und β meſſen auch die ganze Zahl $\overline{\gamma\delta}$, folglich auch den Reſt $\overline{\gamma\zeta}$, welcher kleiner iſt als ε, was unmöglich iſt (weil ε ſchon die kleinſte Zahl war, die von α und β gemeſſen wird). Es iſt alſo nicht möglich, daß ε die $\overline{\gamma\delta}$ nicht mißt; daher mißt ſie dieſelbe; was zu beweiſen war [18]).

Die Baſeler Ausgabe der Elemente von 1533, welche ich zur Hand habe, ſetzt ebenfalls neben die Linien überall entſprechende Zahlenbeiſpiele. Bei dem vorliegenden Satze iſt $\alpha = 2$, $\beta = 3$, ε alſo $= 6$ geſetzt, $\overline{\zeta\gamma}$ unbeſtimmt durch ein Kreuzchen $+$ bezeichnet, und $\overline{\delta\zeta}$ wahrſcheinlich durch einen Druckfehler gleich 8 ſtatt 6 geſetzt, wie Lorenz es bezeichnet. Lorenz hat nämlich mit mehren andern Herausgebern und Überſetzern dieſe beigeſchriebenen Zahlen in der Art ausgedrückt, daß er ſtatt der Linien eine Reihe von Puncten in der angegebenen Anzahl ſetzt, was mir nicht paſſend ſcheint, da es der urſprünglichen und beabſichtigten Darſtellung der Allgemeinheit ſchadet.

Nach dieſer allgemeinen Bemerkung gehe ich zur Darſtellung

---

18) Weil die Kürze des Griechiſchen Originals ſich in keiner Überſetzung erreichen läßt, ſo ſtelle ich dieſen Satz, der ja einmal als Probe der Darſtellung dienen ſoll, in ſeiner Originalgeſtalt hieher:

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ᾽ αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ ἀριθμόν τινα τὸν $\overline{\gamma\delta}$ μετρείτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν $\overline{\varepsilon}$· λέγω ὅτι καὶ ὁ $\overline{\varepsilon}$ τὸν $\overline{\gamma\delta}$ μετρεῖ· εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ $\overline{\varepsilon}$ τὸν $\overline{\gamma\delta}$, ὁ $\overline{\varepsilon}$ τὸν $\overline{\zeta\delta}$ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν $\overline{\gamma\zeta}$, καὶ ἐπεὶ οἱ $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ τὸν $\overline{\varepsilon}$ μετροῦσιν, ὁ δὲ $\overline{\varepsilon}$ τὸν $\overline{\delta\zeta}$ μετρεῖ, καὶ οἱ $\overline{\alpha}$ $\overline{\beta}$ ἄρα τὸν $\overline{\delta\zeta}$ μετρήσουσιν· μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν $\overline{\gamma\delta}$· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν $\overline{\gamma\zeta}$ μετρήσουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ $\overline{\varepsilon}$· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ $\overline{\varepsilon}$ τὸν $\overline{\gamma\delta}$, μετρεῖ ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

der Euklidiſchen Arithmetik ſelbſt über. Wenn ich im Folgenden mich werde veranlaßt ſehen, einen oder den andern Euklidiſchen Beweis mitzutheilen, werde ich nur ſeinen Beweisgang angeben, ohne mich ſtrenge an ſeine Worte zu halten.

Siebentes Buch.

Dieſes Buch beginnt mit den Definitionen für die drei arithmetiſchen Bücher. Euklides definirt die Einheit, die Zahl, den Theil (μέρος, d. i. $\frac{1}{n}$), den Bruch (Lorenz's Überſetzung von μέρη, $\frac{m}{n}$)[19]), das Vielfache, die gerade, ungerade, gerademal gerade (ἀρτιάκις ἄρτιος), gerademal ungerade (ἀρτιάκις περισσός), ungerademal ungerade Zahl (περισσάκις περισσός), die Primzahl (πρῶτος), Primzahlen zu einander und deren Gegenſätze, die zuſammengeſetzte Zahl und zuſammengeſetzte Zahlen zu einander, die Multiplication, die Flächenzahl (ἐπίπεδος), die Körperzahl (στερεός), die Quadrat- und Kubikzahl[20]), endlich die proportionirten, ähnlichen und vollſtändigen (τέλειος) Zahlen. Die Gegenſätze der letztgenannten, die übervollſtändige (ὑπερτελής) und die mangelhafte Zahl (ἐλλιπής), welche bei den ſpäteren Arithmetikern vorkommen, betrachtet Euklides noch nicht.

Satz 1. Wenn von zwei ungleichen gegebenen Zahlen immer abwechſelnd die kleinere von der größern weggenommen wird, und der Reſt den nächſt vorhergehenden nie genau mißt, bis endlich die Einheit übrig bleibt, ſo ſind die gegebenen Zahlen Primzahlen zu einander. (Beweis apagogiſch).

S. 2. 3. Für zwei und mehre Zahlen das größte gemeinſchaftliche Maaß zu finden.

19) Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

20) Ich muß hier bemerken, daß die Griechiſchen Mathematiker die Namen der figurirten Zahlen immer als Maſculina, die Namen der entſprechenden geometriſchen Figuren dagegen immer als Neutra gebrauchen. So heißt τρίγωνον das Dreieck, τρίγωνος die dreieckige Zahl, τετράγωνον das Quadrat, τετράγωνος die Quadratzahl, ἐπίπεδον die Ebene, ἐπίπεδος die ebene oder Flächenzahl, u. ſ. w. Alle dieſe Namen ſind Adjectiva, und es iſt in dem einen Falle ἀριθμός, in dem andern σχῆμα zu ergänzen. Nur κῦβος iſt immer Maſculinum.

S. 4 — 22. Von Theilen und Brüchen. Dieſe Sätze ſind die in arithmetiſche Form umgegoſſenen Lehren der im fünften Buch geometriſch vorgetragenen Theorie der Proportionen.

S. 23. 24. Primzahlen zu einander ſind die kleinſten unter allen Zahlen, welche mit ihnen einerlei Verhältniß haben, und umgekehrt.

S. 25. Sind zwei Zahlen Primzahlen zu einander, ſo iſt die Zahl, welche eine von beiden mißt, eine Primzahl zu der andern.

S. 26. Sind zwei Zahlen Primzahlen zu einer Zahl, ſo iſt auch ihr Product eine Primzahl zu derſelben Zahl.

S. 27. Sind zwei Zahlen Primzahlen zu einander, ſo iſt auch das Quadrat der einen eine Primzahl zu der andern.

S. 28. Sind zwei Zahlen zu jeder von zwei andern Primzahlen, ſo iſt auch das Product der erſtern eine Primzahl zu dem Product der letztern.

S. 29. Sind zwei Zahlen Primzahlen zu einander, ſo ſind auch alle ihre Potenzen Primzahlen zu einander. (Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινὰ, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· κἂν οἱ ἐξαρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει).

S. 30. Sind zwei Zahlen Primzahlen zu einander, ſo iſt auch deren Summe zu jeder von beiden eine Primzahl, und umgekehrt.

S. 31. Jede Zahl iſt eine Primzahl zu jeder Zahl, welche nicht von ihr gemeſſen wird.

S. 32. Wird das Product zweier Zahlen von einer Primzahl gemeſſen, ſo wird dieſe Primzahl auch eine der urſprünglichen beiden Zahlen meſſen [21]).

---

21) Ich muß hier anführen, daß **Grunert** in der Fortſ. von Klügels Wörterbuch Th. V. S. 1089 folg. in Betreff dieſer Euklidiſchen Sätze nicht ganz genau iſt. Unter der Überſchrift „I. Satz des Euklides von den Primzahlen“ giebt er folgende drei Sätze:

1. Wenn jede der beiden Zahlen P, Q kleiner als die Primzahl p iſt, ſo iſt das Product PQ nicht durch p theilbar.
2. Geht die Primzahl p weder in P noch in Q auf, ſo geht ſie auch in PQ nicht auf.

S. 33. Jede zuſammengeſetzte Zahl wird von irgend einer Primzahl gemeſſen.

S. 34. Jede Zahl iſt entweder ſelbſt eine Primzahl, oder wird von einer Primzahl gemeſſen.

S. 35 — 41. Verhältniſſe in kleinſten Zahlen, Aufſuchung des kleinſten Dividendus und Ähnliches.

Achtes Buch.

Stetige Proportion und Progreſſion (ἑξῆς ἀνάλογοι ἀριθμοί), Quadrat- und Cubikzahlen, ähnliche Flächen- und Körperzahlen. Hieraus nur einige Hauptſätze:

S. 1. Mehre ſtetig proportionirte Zahlen, deren äußerſte Primzahlen zu einander ſind, ſind die kleinſten in ihrem Verhältniß.

S. 9. 10. Wenn zwiſchen zwei Zahlen, welche Primzahlen zu einander ſind, einige mittlere Proportionalzahlen (κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογοι) fallen, ſo fallen deren ebenſoviele zwiſchen jede der beiden Zahlen und die Einheit, und umgekehrt.

S. 11. 12. Zwiſchen zwei Quadratzahlen fällt eine, zwiſchen zwei Cubikzahlen fallen zwei mittlere Proportionalzahlen. (S. 18, 19 Ausdehnung deſſelben Satzes auf ähnliche Flächen- und Körperzahlen).

S. 13. Sind mehre Zahlen ſtetig proportionirt, ſo ſind alle ihre gleichnamigen Potenzen auch ſtetig proportionirt.

S. 14 — 17. Meſſen einander Quadrat- oder Cubikzahlen, ſo meſſen einander auch ihre Seiten, und umgekehrt.

Neuntes Buch.

S. 1 — 19. Fortſetzung derſelben Materie.

S. 8. Wenn von der Einheit an beliebig viele Zahlen ſtetig pro-

3. Geht alſo die Primzahl p in PQ auf, ſo muß ſie entweder in P oder in Q aufgehen.
„Dieſen Satz, welcher in der Zahlenlehre ſehr geſchätzt wird, hat ſchon Euklides (VII. 32).“ Und S. 1159 citirt er als Euklidiſch „den oben in I bewieſenen Satz.“ Es iſt hier nicht recht klar, welchen Satz er eigentlich meint. No. 3 iſt allerdings Euklidiſch, VII. 32. Die beiden andern aber, No. 1, 2, ſind wenigſtens in der hier ausgeſprochenen Form nicht Euklidiſch, wenngleich ſie ſich aus VII. 26 leicht herleiten laſſen. Jedenfalls aber iſt Grunert's Anführung ungenau.

proportionirt ſind, ſo iſt die dritte von der Einheit eine Quadratzahl, und ebenſo allemal eine um die andere (οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες); die vierte ein Cubus, und ebenſo alle folgenden, mit Überſpringung von je zweien; die ſiebente zugleich Cubus und Quadrat, und ebenſo alle folgenden mit Überſpringung von fünfen.

Der Grieche ſagt hier wieder die dritte, die vierte, die ſiebente, wo wir die zweite, die dritte, die ſechſte ſagen würden. Ich habe darüber ſchon oben geſprochen. Der Satz erhellt unmittelbar aus der Betrachtung der Reihe

$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ a^9,\ a^{10},\ a^{11},\ a^{12}\ \ldots\ldots$

S. 9. Sind mehre Zahlen von der Einheit an ſtetig proportionirt, ſo ſind, wenn die erſte nach der Einheit eine Quadratzahl iſt, alle folgenden Quadratzahlen, und wenn die erſte nach der Einheit eine Cubikzahl iſt, alle folgenden Cubikzahlen.

S. 12. Sind von der Einheit an mehre Zahlen ſtetig proportionirt, ſo wird von allen Primzahlen, von welchen die letzte gemeſſen wird, auch die neben der Einheit ſtehende gemeſſen werden.

S. 13. Sind von der Einheit an mehre Zahlen ſtetig proportionirt, ſo wird, wenn die auf die Einheit folgende eine Primzahl iſt, die letzte der Zahlen von keiner andern Zahl gemeſſen werden, als von den in der Progreſſion ihr vorhergehenden.

S. 14. Die kleinſte Zahl, welche von gewiſſen Primzahlen gemeſſen wird, wird von keinen andern Zahlen, als von dieſen Primzahlen gemeſſen.

S. 15. Wenn drei ſtetig proportionirte Zahlen die kleinſten in dieſem Verhältniſſe ſind, ſo iſt die Summe von je zweien eine Primzahl zu der dritten.

S. 16 — 19. Dieſe Sätze gelten ausſchließlich für ganze Zahlen. S. 16. Wenn zwei Zahlen Primzahlen zu einander ſind, ſo giebt es zu beiden keine dritte Proportionalzahl (οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά). S. 17. Wenn beliebig viele Zahlen ſtetig proportionirt, und die äußerſten Primzahlen zu einander ſind, ſo giebt es zu der erſten, zweiten und letzten keine vierte Proportionalzahl.

Als Beſchluß dieſer Theorie ſteht der berühmte und wichtige Satz da:

S. 20. Die Anzahl der Primzahlen iſt größer als jede gegebene Menge derſelben.

D. h. Die Anzahl der Prinzahlen iſt unendlich groß. Der

Euklidiſche Beweis dieſes Satzes iſt ſo einfach, daß ich mich nicht enthalten kann, ihn hier anzugeben. Geſetzt es ſeien die Primzahlen a, b, c u. ſ. w. gegeben, ſo iſt, wenn man zu dem Producte derſelben 1 addirt, $abc \ldots + 1$ entweder eine Primzahl (und dann iſt der Satz bewieſen), oder keine Primzahl. Im zweiten Falle wird $abc \ldots + 1$ alſo nach VII, 33 von irgend einer Primzahl gemeſſen werden. Nun kann aber $abc \ldots + 1$ durch keine der Primzahlen $a, b, c \ldots$ gemeſſen werden, weil dann, da $abc \ldots$ durch a, b, c gemeſſen wird, auch 1 durch die genannten Zahlen gemeſſen werden würde, was nicht möglich iſt. Folglich iſt die Primzahl, von welcher $abc \ldots + 1$ gemeſſen wird, von den anfangs gegebenen a, b, c verſchieden. In jedem Falle erhalten wir alſo zu den gegebenen Primzahlen noch eine neue; und das war zu beweiſen. — Hiemit begnügt ſich Euklides; da man aber dieſe Schlußfolgen ohne Ende mit jeder neu hinzugekommenen Primzahl fortſetzen kann, ſo folgt daraus, daß die Anzahl der Primzahlen unendlich groß iſt.

S. 21 — 34. Elementarſätze über gerade, ungerade, geradeмal gerade, geradeмal ungerade Zahlen u. ſ. w. Über den ungerechten Tadel, welchen Jamblichus wegen des S. 34 gegen Euklides ausſpricht, werden wir unten ſprechen.

S. 35. Wenn beliebig viele Zahlen ſtetig proportionirt ſind, und man ſubtrahirt von der zweiten und der letzten eine der erſten gleiche Zahl, ſo wird ſich der Überſchuß der zweiten über die erſte zur erſten Zahl verhalten, wie der Überſchuß der letzten über die erſte zur Summe aller vorhergehenden Glieder.

D. h. Hat man die Progreſſion

$$a^n,\ a^{n-1}\,b,\ a^{n-2}\,b^2, + \ldots a^2\,b^{n-2},\ a\,b^{n-1},\ b^n,$$

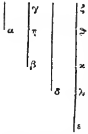
ſo verhält ſich

$$a^{n-1}\,b - a^n : a^n = b^n - a^n : a^n + a^{n-1}\,b + a^{n-2}\,b^2 + \ldots a^2\,b^{n-2} + a\,b^{n-1},$$

woraus unmittelbar der Satz ſo folgt, wie er in den modernen Lehrbüchern gewöhnlich ausgeſprochen wird

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} = a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots a\,b^{n-2} + b^{n-1}.$$

Euklid's Beweis iſt folgender:



Sei $\alpha : \overline{\beta\gamma} = \overline{\beta\gamma} : \delta = \delta : \overline{\varepsilon\zeta}$. Mache $\overline{\gamma\eta} = \overline{\zeta\vartheta} = \alpha$, $\overline{\zeta\varkappa} = \overline{\beta\gamma}$, $\overline{\zeta\lambda} = \delta$, ſo verhält ſich, wenn wir für α, $\overline{\beta\gamma}$, δ ihre entſprechenden Stücke auf $\overline{\varepsilon\zeta}$ ſubſtituiren $\overline{\zeta\vartheta} : \overline{\zeta\varkappa} = \overline{\zeta\varkappa} : \overline{\zeta\lambda} = \overline{\zeta\lambda} : \overline{\zeta\varepsilon}$, alſo dividendo $\overline{\zeta\vartheta} : \overline{\vartheta\varkappa} = \overline{\zeta\varkappa} : \overline{\varkappa\lambda} = \overline{\zeta\lambda} : \overline{\lambda\varepsilon}$ und componendo $\overline{\zeta\vartheta} : \overline{\vartheta\varkappa} = \overline{\zeta\vartheta} + \overline{\zeta\varkappa} + \overline{\zeta\lambda} : \overline{\vartheta\varkappa} + \overline{\varkappa\lambda} + \overline{\lambda\varepsilon}$ und nun wieder die urſprünglichen Größen ſubſtituirt und die Proportion rückwärts geleſen

$$\overline{\varepsilon\vartheta} : \alpha + \overline{\beta\gamma} + \delta = \overline{\beta\eta} : \alpha$$

d. i. $\overline{\varepsilon\zeta} - \alpha : \alpha + \overline{\beta\gamma} + \delta = \overline{\beta\gamma} - \alpha : \alpha$ q. e. d.

Es iſt zugleich leicht einzuſehen, wie der hier nur für vier Größen bewieſene Satz auf mehre ſich ausdehnen läßt.

S. 36. Nimmt man ſo viele von der Einheit an ſtetig verdoppelte Zahlen, bis deren Summe eine Primzahl wird, ſo iſt das Product aus dieſer Summe in die letzte jener Zahlen eine vollſtändige Zahl (numerus perfectus), d. h. eine Zahl, welche der Summe aller ihrer Theiler, 1 mitgerechnet, gleich iſt.

Nimmt man die nach den ganzen Potenzen von 2 fortſchreitende Reihe 1, 2, 4, 8 .... 2^n, deren Summe $2^{n+1} - 1$ iſt, ſo iſt, nach Euklid's Satz, die Zahl $2^n\,(2^{n+1} - 1)$ eine vollſtändige Zahl, ſo oft $2^{n+1} - 1$ eine Primzahl iſt [22]).

Euklid's Beweis dieſes Satzes iſt in ſeiner linearen Manier

22) Der Beweis läßt ſich ſehr leicht ſo führen. Sei $2^{n+1} - 1 = p$, und die Summe der Factoren der Zahl $2^n\,(2^{n+1} - 1)$ d. h. $2^n p$ ſei S, ſo iſt

$$S = 1 + 2 + 4 + \ldots .\; 2^n + p\,(1 + 2 + 4 + \ldots .\; 2^{n-1})$$
$$= (1 + p)\,(1 + 2 + 4 \ldots .\; 2^{n-1}) + 2^n$$

Aber $1 + 2 + 4 \ldots .\; 2^{n-1} = 2^n - 1$,

$1 + p = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, demnach

$$S = 2 \cdot 2^n (2^n - 1) + 2^n = 2^n\,[2\,(2^n - 1) + 1] = 2^n\,(2^{n+1} - 1)$$
$$= 2^n p$$

Aus dieſem Beweiſe leuchtet zugleich ein, daß der Satz nicht gilt, wenn p Factoren hat.

etwas weitläuftig, weshalb ich ihn hier nicht mittheile. Er beweiſt zuerſt, daß die gefundene Zahl, deren Vollſtändigkeit bewieſen werden ſoll, ſich zu der Summe der zum Grunde gelegten Reihe verhalte, wie das letzte Glied dieſer Reihe zur Einheit, ein Reſultat, welches wir durch unſere Formeln ſogleich vor Augen haben, indem wir die in Rede ſtehende Zahl durch 2^n $(2^{n+1} - 1)$ ausdrücken. Nun iſt offenbar, daß dieſe Zahl durch alle Glieder der beiden Reihen $1, 2 \ldots 2^n$ und $2^{n+1} - 1$, $2(2^{n+1} - 1) \ldots 2^{n-1}(2^{n+1} - 1)$ theilbar iſt. Euklid beweiſt nun zweitens, daß $2^n(2^{n+1} - 1)$ die Summe ſämmtlicher Glieder beider Reihen iſt, und drittens, daß dieſelbe Zahl keine anderen Factoren habe, als die genannten, wobei ſich die Bedingung ergiebt, daß $2^{n+1} - 1$ Primzahl ſein muß [23]).

---

23) Die Unterſuchung, ob eine Zahl von der Form $2^{n+1} - 1$ Primzahl ſei oder nicht, iſt nicht ganz leicht, wenn die Zahlen anfangen groß zu werden. **Fermat** hat in einem Briefe an **Merſenne** (Varia opera mathem. Petri de Fermat. Tolosae. 1679. fol. p. 177) drei hübſche Sätze gegeben, welche die Unterſuchung ſehr abkürzen. Schreibt man ſich nämlich in eine Reihe die um 1 verminderten Potenzen von 2, welches eben jene Summenglieder ſind, und darüber die Exponenten der um 1 größeren Zahlen für die Wurzel 2, etwa ſo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		n
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	. . . .	$2^n - 1$

ſo finden zwiſchen den Exponenten und den darunterſtehenden Hauptgrößen folgende Beziehungen ſtatt:

1. Wenn der Exponent keine Primzahl iſt, iſt auch die Hauptgröße keine Primzahl, (weil $a^{pq} - 1$ immer ſowohl durch $a^p - 1$, als durch $a^q - 1$ theilbar iſt).

2. Wenn der Exponent eine Primzahl iſt, ſo iſt die um 1 verminderte Hauptgröße durch den doppelten Exponenten theilbar. $\left(\frac{2^n - 2}{2n} = \frac{2^{n-1} - 1}{n}\right.$, demnach iſt dieſer Satz ein ſpecieller Fall des bekannten Satzes, daß, wenn p Primzahl iſt und in a nicht aufgeht, allemal $a^{p-1} - 1$ durch p aufgeht).

3. Wenn der Exponent n eine Primzahl iſt, ſo kann die Hauptgröße nur theilbar ſein durch Zahlen von der Form $2mn + 1$. Hat nun die Hauptgröße keinen Theiler dieſer Form, was ſich leicht verſuchen läßt, ſo hat ſie überhaupt keinen Theiler.

Für den vorliegenden Zweck dienen namentlich der erſte und dritte dieſer Sätze. Wie gewöhnlich, ſo theilt auch hier Fermat ſeinen Beweis nicht mit, ſondern begnügt ſich, den ausgeſprochenen Sätzen die Worte hinzuzufügen: **Voilà trois fort belles propositions que j'ay trouvées et *prouvées* non sans**

So wie Euklid den Satz ausgeſprochen hat, hat er ihn ſcharf und genügend bewieſen; aber wir vermiſſen bei dem Satze etwas, deſſen Euklides nicht Erwähnung thut, nämlich die Behauptung und den Beweis, daß es außer den hier angegebenen keine anderen Zahlen giebt, welche die erwähnte Eigenſchaft haben.

Übrigens iſt die Materie dieſes an und für ſich allerdings merkwürdigen Satzes, den darum Euklides auch als Schlußſtein ſeiner rationalen Arithmetik benutzt, ziemlich unfruchtbar, und auch in der Folgezeit nicht viel weiter fortgebildet. Auch ähnliche Probleme und Sätze, welche Fermat anregte, haben zu ihrer Zeit keinen Anklang gefunden, eben weil ihr Einfluß auf die Wiſſenſchaft zu gering iſt im Verhältniß zu der Schwierigkeit, mit welcher ihre Behandlung verbunden iſt.

So weit nun erſtreckt ſich die rationale Arithmetik Euklid's, die Manches enthält, deſſen Wichtigkeit die ſpäteren Griechiſchen Arithmetiker nicht erkannt und das ſie daher in ihre Abhandlungen nicht aufgenommen haben, und was erſt in neueren Zeiten als elementare Grundlage einer wiſſenſchaftlichen Zahlentheorie wieder geltend gemacht iſt. Ganz gewiß rühren die hier von Euklides vorgetragenen Sätze ebenſo wenig alle von ihm ſelbſt her, als ſeine geometriſchen Bücher; nur ſind die Nachrichten über ſeine Vorarbeiten in der Arithmetik noch ſpärlicher, als die Winke über geometriſche Arbeiten und Erfindungen, die er benutzt hat. Von den bis hieher vorgetragenen Sachen in Form und Weſen verſchieden iſt der Gegenſtand, welchem Euklides ſein

Zehntes Buch

gewidmet hat. Dieſes Buch, an Umfang das größte, an Inhalt das ſchwierigſte der Euklidiſchen Elemente, handelt in eigenthümlicher Weiſe von den Irrationalgrößen, indem alle uns als algebraiſche Formeln bekannte irrationale Zahlenausdrücke hier in ganz geometriſcher Vorſtellungsweiſe als Irrationallinien betrachtet werden. Das Buch beginnt mit folgenden Definitionen:

Commenſurable und incommenſurable Größen, (σύμμετρα, ἀσύμμετρα); Größen ſind commenſurabel, wenn ſie von

---

peine. Je les puis appeller les fondements de l'invention des nombres parfaits.

einem und demſelben Maaße gemeſſen werden, oder wie hieraus im S. 5 gefolgert wird, wenn ſie ſich zu einander verhalten wie eine Zahl zu einer Zahl. Im entgegengeſetzten Falle ſind ſie incommenſurabel. Z. B. a und $\sqrt{b}$ ſind, wenn b kein Quadrat iſt, incommenſurable Größen.

In Potenz commenſurabel (δυνάμει σύμμετροι) ſind zwei Linien, wenn ihre Quadrate von demſelben Flächenraum gemeſſen werden, im entgegengeſetzten Falle ſind ſie in Potenz incommenſurabel. Z. B. a und $\sqrt{b}$ ſind immer in Potenz commenſurabel, dagegen a und $\sqrt[n]{b}$, wenn $n > 2$, oder a und $b + \sqrt{c}$ in Potenz incommenſurabel.

Dieſes vorausgeſetzt, wird gezeigt, daß einer angenommenen geraden Linie unzählige andere gerade Linien commenſurabel und incommenſurabel ſind, theils in Länge und Potenz, theils in Potenz allein. Dieſe angenommene gerade Linie heiße rational (ῥητή).

Rational heißen ferner alle Linien, die dieſer entweder in Länge und Potenz, oder bloß in Potenz commenſurabel ſind.

Irrational (ἄλογοι) aber, die ihr incommenſurabel ſind.

Es iſt zu bemerken, daß Euklides den Begriff der rationalen und irrationalen Größe anders nimmt, als wir und Diophant, indem wir das irrational nennen, was Euklides incommenſurabel nennt. Der Unterſchied rührt daher, daß Euklides die Rationalität auch auf die bloß in Potenz commenſurablen Größen ausdehnt. Daher iſt ihm das Verhältniß $a : \sqrt{b}$ rational, weil die Quadrate beider Ausdrücke commenſurabel werden.

Auch das Quadrat der angenommenen geraden Linie heiße rational, und was demſelben commenſurabel iſt, heiße ebenfalls rational.

Was aber jenem Quadrate incommenſurabel iſt, heiße irrational, und ebenſo heißen die Linien, welche irrationale Räume potenziren, irrational; wenn der Raum ein Quadrat iſt, ſo ſind es die Seiten ſelbſt, wenn er aber eine andere geradlinige Figur iſt, ſo ſind es die Seiten der dieſen gleichen Quadrate (αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι).

Ich habe den Ausdruck, eine Linie potenzirt einen Raum, aus Lorenz's Überſetzung beibehalten, welcher dadurch recht glücklich den Griechiſchen Ausdruck, εὐθεῖα δυνάμει τὸ χωρίον wiedergiebt;

ἡ δυναμένη τὸ χωρίον iſt nämlich die Seite des Quadrats, welches dem Raume gleich iſt.

Eine Menge ſpecieller Definitionen finden ſich nun noch im Laufe des Vortrages zerſtreut, weil ſie ſich nicht füglich vor der Kenntniß der Sache geben laſſen.

Der Inhalt dieſes Buchs nun läßt ſich ganz ungezwungen in folgende vier Abſchnitte theilen:

I. Allgemeine Sätze über Commenſurabilität, S. 1 — 21.

II. Über die Mediallinie, S. 22 — 35[24]).

III. Irrationallinien, die durch Zuſammenſetzung entſtehen, und zwar S. 36 — 72 durch Addition, S. 73 — 111 durch Subtraction.

IV. Fünf Ergänzungsſätze, S. 112 bis zum Ende.

Nach dieſer Überſicht will ich nun, ſo kurz es ſich thun läßt, ohne etwas Weſentliches zu übergehen, den Inhalt dieſes merkwürdigen Buches darſtellen, und der modernen Vorſtellungsweiſe dadurch zu Hilfe kommen, daß ich die Reſultate und Formeln mit den uns geläufigen Zeichen ausdrücke.

Erſter Abſchnitt.

S. 1. Der berühmte Satz, auf dem die Methode der Exhauſtion beruht: Wenn zwei ungleiche Größen gegeben ſind, und man nimmt von der größeren mehr als die Hälfte, von dem Reſte wieder mehr als die Hälfte, und ſo fort, ſo bleibt endlich eine Größe übrig, welche kleiner iſt, als die kleinere der beiden gegebenen Größen. Ebenſo, wenn immer nur die Hälfte weggenommen wird.

S. 2. Wenn zwei ungleiche Größen gegeben ſind, und man nimmt immer die kleinere von der größeren weg, ſo ſind, wenn nie ein Reſt den nächſt vorhergehenden genau mißt, die beiden Größen incommenſurabel. Vergl. VII, 1.

S. 3. 4. Für commenſurable Größen das größte gemeinſchaftliche Maaß zu finden.

S. 5 — 9. Commenſurable Größen verhalten ſich wie Zahlen zu einander, incommenſurable nicht; Quadrate commenſurabler

24) Von S. 31 an ſtimmen die Ausgaben in den Zahlen nicht überein, indem Einige, ſo auch Lorenz in ſeiner Überſetzung, den S. 30 der Baſeler Ausgabe, nach der ich citire, in zwei zerlegen.

Größen verhalten ſich wie Quadratzahlen. Umkehrung aller dieſer Sätze.

S. 10. Aufgabe [25]). Zu einer gegebenen geraden Linie zwei andere zu finden, deren eine ihr bloß in Länge, die andere aber in Länge und Potenz incommenſurabel iſt.

S. 11. Satz des Theätetus. Wenn vier Größen in Proportion ſtehen, und die erſte der zweiten commenſurabel iſt, ſo iſt auch die dritte der vierten commenſurabel; iſt aber die erſte der zweiten incommenſurabel, ſo iſt auch die dritte der vierten incommenſurabel.

S. 12 — 14. Folgen, wenn zwei Größen ſich in Bezug auf Commenſurabilität zu einer dritten gleich oder ungleich verhalten.

S. 15. Wenn vier Linien in Proportion ſtehen, und es potenzirt die erſte über die zweite um das Quadrat einer der erſten in Länge commenſurablen oder incommenſurablen Linie, ſo potenzirt die dritte über die vierte in derſelben Weiſe.

Δύναται ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει heißt: das Quadrat der erſten übertrifft das Quadrat der zweiten um ein Quadrat, deſſen Seite der erſten in Länge commenſurabel iſt; oder anders ausgedrückt, die größere der beiden Linien iſt Hypotenuſe, die kleinere eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, deſſen zweite Kathete der Hypotenuſe in Länge commenſurabel iſt.

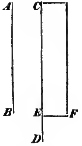
S. 16. 17. Werden zwei commenſurable Größen zuſammengeſetzt, ſo iſt das Ganze jeder von ihnen commenſurabel, und umgekehrt daſſelbe von incommenſurablen Größen.

S. 18. 19. Wenn zwei gerade Linien ungleich ſind, und ein dem vierten Theile des Quadrats der kleineren gleiches Rechteck an der größeren entworfen wird, deſſen Ergänzung ein Quadrat iſt, und welches die größere Linie in zwei in Länge commenſurable Abſchnitte theilt, ſo potenzirt die größere über die kleinere um das Quadrat einer ihr in Länge commenſurablen Linie; und umgekehrt. Sind dagegen die Abſchnitte der größeren in Länge incommenſurabel, ſo potenzirt auch die größere über die kleinere um das Quadrat einer ihr in Länge incommenſurablen Linie.

Zur Erklärung dieſes Satzes muß ich folgendes hinzufügen.

---

25) In mehren Ausgaben vertauſchen die Sätze 10 u. 11 ihre Stellen.



An eine Linie CD ein Rechteck CF anlegen, deſſen Ergänzung ein Quadrat iſt, heißt, das Rechteck CF ſo anlegen, daß $EF = ED$, alſo das vollendete Rechteck DF ein Quadrat wird. Nun ſagt der Satz folgendes: Wenn zwei Linien AB, CD gegeben ſind und man legt ein Rechteck, welches gleich $\frac{1}{4} AB^2$ iſt, an CD ſo an, daß $EF = ED$ wird, (was immer möglich iſt), ſo ſind, wenn CE und ED nach dieſer Operation einander commenſurabel ausfallen, die beiden Linien AB und CD ſo beſchaffen, daß $\sqrt{CD^2 - AB^2}$ der Linie CD commenſurabel iſt. Fallen dagegen die Abſchnitte CE, ED einander incommenſurabel aus, ſo iſt auch $\sqrt{CD^2 - AB^2}$ der CD incommenſurabel. Der Satz leuchtet ein, wenn wir bedenken, daß commenſurable Größen ſich wie Zahlen verhalten. Setzen wir alſo $CE : ED = m : n$; da nun $CE \cdot EF = CE \cdot ED = \frac{1}{4}AB^2$ iſt, ſo iſt $CE = \frac{1}{2}AB\sqrt{\frac{n}{m}}$, $ED = \frac{1}{2}AB\sqrt{\frac{m}{n}}$, alſo $CD = \frac{1}{2}AB\left(\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{m}{n}}\right) = \frac{1}{2}AB\frac{m+n}{\sqrt{mn}}$. Demnach $CD^2 - AB^2 = \frac{1}{4}AB^2 \left[\frac{(m+n)^2}{mn} - 4\right] = \frac{1}{4}AB^2\frac{(m-n)^2}{mn}$, alſo $\sqrt{CD^2 - AB^2} = \frac{1}{2}AB\frac{m-n}{\sqrt{mn}}$, demnach verhält ſich $\sqrt{CD^2 - AB^2} : CD = m - n : m + n$ d. h. wie zwei Zahlen, demnach ſind beide Ausdrücke einander in Länge commenſurabel.

S. 20. Jedes unter rationalen in Länge commenſurablen Linien enthaltene Rechteck iſt rational.

S. 21. Wenn an einer Rationallinie ein rationales Rechteck angelegt wird, ſo giebt daſſelbe eine rationale der angenommenen in Länge commenſurable Linie zur Breite. D. h. Eine Rationalzahl durch eine Rationalzahl dividirt giebt einen rationalen Quotienten.

Lemma. Die Linie, welche einen irrationalen Raum potenzirt (ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον), iſt irrational. D. h. Eine Linie oder Zahl, deren Quadrat irrational iſt, iſt ſelbſt irrational.

Dieſes Lemma, welches auf den Ausdruck $\sqrt{\sqrt{ab}}$ führt, macht den Übergang zur Betrachtung der Mediallinie.

Zweiter Abſchnitt.

Die erſte Irrationallinie, welche Euklides betrachtet, iſt die **Mediallinie**, μέση, die er ſo definirt: Die μέση iſt eine Irrationallinie, welche ein unter rationalen bloß in Potenz commenſurablen Linien enthaltenes Rechteck potenzirt; oder, wie es im

S. 22. heißt: Das unter rationalen bloß in Potenz commenſurablen Linien enthaltene Rechteck iſt irrational, und die dieſen Raum potenzirende Linie (die Seite des ihm gleichen Quadrats) iſt auch irrational, und heiße die **Mediale**.

Nun ſind rationale bloß in Potenz commenſurable Linien entweder a und $\sqrt{b}$, oder $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$; demnach die unter ihnen enthaltenen Rechtecke $a\sqrt{b}$ und $\sqrt{ab}$. Dieſe ſind, obgleich mit einfachem Quadratwurzelzeichen behaftet, irrational, dahingegen die dieſen Formen entſprechenden Linienausdrücke für rational gelten. Die Rationalität der letztern beruht aber darauf, daß ihre Quadrate rational werden, eine Betrachtung, welche auf unſere Ausdrücke, weil ſie ſchon Räume bedeuten, nicht mehr angewandt werden kann. Die Mediale wird alſo die beiden weſentlich nicht verſchiedenen Formen haben können $\sqrt{a\sqrt{b}} = \sqrt[4]{a^2b}$ und $\sqrt[4]{ab}$, vorausgeſetzt daß, wenn wir Zahlen betrachten, weder a noch b Quadratzahl iſt; dieſe Bedingung iſt, wenn wir $\sqrt[4]{ab}$ als den allgemeinen Ausdruck betrachten, dahin zu beſchränken, daß eine von den beiden Zahlen a, b keine Quadratzahl ſei.

S. 23. Das Quadrat der Mediale, einer rationalen Linie angepaßt, giebt eine rationale, dieſer Linie in Länge incommenſurable Breite. $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $\frac{\sqrt{ab}}{c}$.

Einen Raum einer Linie anpaſſen (παρεμβάλλειν oder παραβάλλειν παρὰ εὐθεῖαν) heißt, ein dieſem Raume gleiches Rechteck bilden, deſſen eine Seite die beſagte Linie iſt, oder arithmetiſch gedacht, das Maaß des Raumes durch das Maaß der Linie dividiren.

S. 24. Die der Mediale commenſurable Linie iſt eine Me-

diale. Wie Rationallinien, ſo können auch Mediale entweder in Länge und Potenz zugleich, oder bloß in Potenz commenſurabel ſein.

S. 25. Das unter medialen bloß in Länge commenſurablen Linien enthaltene Rechteck iſt medial.

Wenn m und n rationale Zahlen bedeuten, ſo ſind zwei in Länge commenſurable Medialen $m\sqrt[4]{ab}$ und $n\sqrt[4]{ab}$; ihr Rechteck alſo $mn\sqrt{ab}$ der Ausdruck des medialen Rechtecks.

S. 26. Das unter medialen bloß in Potenz commenſurablen Linien enthaltene Rechteck iſt entweder rational oder medial.

Bloß in Potenz commenſurable Mediale ſind $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\sqrt{c\sqrt{b}}$, ihr Rechteck $\sqrt{acb}$ wird rational ſein, wenn acb ein Quadrat (eine Quadratzahl) iſt, ſonſt medial.

S. 27. Ein Mediales übertrifft ein Mediales nicht um ein Rationales.

S. 28. Zwei bloß in Potenz commenſurable Mediale zu finden, deren Rechteck rational iſt.

Die beiden Linien ſind $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\sqrt{\frac{b\sqrt{b}}{a}}$; oder $\sqrt[4]{ab}$ und $\sqrt{b\sqrt{\frac{b}{a}}}$. Die Quadrate der beiden erſteren ſind $a\sqrt{b}$ und $\frac{b}{a}\sqrt{b}$, die der beiden letztern $\sqrt{ab}$ und $b\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{b}{a}\sqrt{ab}$, alſo in beiden Fällen commenſurabel. Das Rechteck jedes der beiden Paare iſt b, alſo rational.

S. 29. Zwei mediale bloß in Potenz commenſurable Linien zu finden, deren Rechteck medial iſt.

1) $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\sqrt{\frac{ac}{b}\sqrt{b}}$ 2) $\sqrt[4]{ab}$ und $\sqrt{\frac{c\sqrt{ab}}{b}}$

Lemma 1. Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe auch eine Quadratzahl iſt.

Euklides löſt dieſe Aufgabe ſo: $A \quad D \quad C \ B$

Nimm zwei Zahlen AB, BC ſo an, daß beide zugleich gerade oder beide ungerade ſind; in jedem Falle wird der Reſt AC gerade ſein und ſich in D halbiren laſſen. AB, BC ſeien ferner ähnliche Flächenzahlen, oder auch Quadratzahlen, ſo iſt ihr Product eine Quadratzahl. Nun iſt nach II, 6. $AB \cdot BC$

$+ CD^2 = BD^2$, folglich ſind $AB \cdot BC$ und CD^2 die geſuchten Zahlen.

Dieſe Auflöſung führt zu dem bekannten Reſultate, wenn man $AB = 2m^2$, $BC = 2n^2$ ſetzt; es werden dann die Wurzeln der beiden Quadratzahlen $m^2 - n^2$ und $2mn$. Diophant hat dieſe Aufgabe, vielleicht weil die Euklidiſche Auflöſung ihm nicht gefiel, wieder aufgenommen und giebt II, 8. 9. zwei Auflöſungen derſelben.

Lemma 2. Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe keine Quadratzahl iſt. $(2mn)^2$ und $(m^2 - n^2 - 1)^2$

S. 30. Zwei rationale bloß in Potenz commenſurable Linien zu finden, deren größere über die kleinere um das Quadrat einer der erſteren in Länge commenſurablen Linie potenzirt.

Nach Euklid a und $\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 c^2}{b^2}}$, ſo daß $b^2 - c^2$ kein Quadrat iſt. Einfacher a und $\sqrt{a^2 - d^2}$.

S. 30ᵃ (bei Andern S. 31). Zwei rationale bloß in Potenz commenſurable Linien zu finden, ſo daß die größere über die kleinere um das Quadrat einer jener in Länge incommenſurablen Linie potenzirt.

$$a \text{ und } \sqrt{a^2 - d}$$

S. 31 (32). Zwei mediale bloß in Potenz commenſurable Linien zu finden, deren Rechteck rational iſt, und deren größere über die kleinere um das Quadrat einer der erſteren in Länge commenſurablen Linie potenzirt.

$$1)\quad \sqrt{a\sqrt{a^2 - b^2}} \text{ und } \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a\sqrt{a^2 - b^2}}};$$

$$2)\quad \sqrt[4]{a(a - b^2)} \text{ und } \frac{a - b^2}{\sqrt[4]{a(a - b^2)}}$$

Zuſatz. Ähnlich findet man dieſe Linien, wenn die potenzirende Linie der größeren incommenſurabel iſt.

Nämlich $1)\quad \sqrt{a\sqrt{a^2 - b}}$ und $\frac{a^2 - b}{\sqrt{a\sqrt{a^2 - b}}}$;

$$2)\quad \sqrt[4]{a(a - b)} \text{ und } \frac{a - b}{\sqrt[4]{a(a - b)}}$$

S. 32 (33). Zwei mediale bloß in Potenz commenſurable Linien zu finden, deren Rechteck medial iſt, und von denen die größere über die kleinere um das Quadrat einer jener (α) commenſurablen oder (β) incommenſurablen Linie potenzirt.

(α) 1) $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt{a\sqrt{b}}}$

2) $\sqrt[4]{ab}$ und $\frac{\sqrt{b(a^2-c^2)}}{\sqrt[4]{ab}}$

3) $\sqrt{b\sqrt{a}}$ und $\frac{b\sqrt{a-c^2}}{\sqrt{b\sqrt{a}}}$

(β) 1) $\sqrt{a\sqrt{b}}$ und $\frac{\sqrt{b(a^2-c)}}{\sqrt{a\sqrt{b}}}$

2) $\sqrt[4]{ab}$ und $\frac{\sqrt{b(a-c)}}{\sqrt[4]{ab}}$

3) $\sqrt{b\sqrt{a}}$ und $\frac{b\sqrt{a-c}}{\sqrt{b\sqrt{a}}}$

S. 33 (34). Zwei in Potenz incommenſurable Linien zu finden, ſo daß die Summe ihrer Quadrate rational, ihr Rechteck aber medial ſei.

1) $\sqrt{\frac{a^2+a\sqrt{b}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{a^2-a\sqrt{b}}{2}}$

2) $\sqrt{\frac{a+\sqrt{ab}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{a-\sqrt{ab}}{2}}$

S. 34 (35). Zwei in Potenz incommenſurable Linien zu finden, ſo daß die Summe ihrer Quadrate medial, ihr Rechteck aber rational ſei.

1) $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})\sqrt{a^2-b}}{2}}$

2) $\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}}$

S. 35 (36). Zwei in Potenz incommenſurable Linien zu finden, ſo daß ſowohl die Summe ihrer Quadrate als ihr Rechteck medial, beide Mediale aber einander incommenſurabel ſeien.

1) $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{(a-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}$

2) $\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}$ und $\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}$

3) $\sqrt{\frac{b(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{2}}$ und $\sqrt{\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{2}}$

Dritter Abſchnitt.

Ἀρχὴ τῶν κατὰ σύνθεσιν ἑξάδων, die ſechs Abſchnitte über die durch Addition gebildeten Linien (S. 36 — 72). Dieſem Abſchnitte Satz für Satz analog iſt der folgende unter der Überſchrift *Δευτέρα τάξις ἑτέρων λόγων, τῶν κατὰ ἀφαίρεσιν*, über die durch Subtraction gebildeten Linien (S. 73 — 110), und weil die Behandlung beider durchaus nicht verſchieden iſt, ſo habe ich aus beiden bei Euklides getrennten Abſchnitten einen gebildet, indem ich immer die correſpondirenden Sätze beider Abſchnitte zuſammenfaſſe. Die deutſchen Benennungen der einzelnen Irrationallinien habe ich nach Lorenz beibehalten. Beide correſpondirende Abſchnitte ſind bei Euklides in Unterabtheilungen getheilt, welche er, weil die meiſten derſelben aus ſechs Sätzen beſtehen, Hexaden nennt.

Erſte Hexade. Bildung der zuſammengeſetzten Irrationallinien.

S. 36. 73 (37. 74). Wenn zwei rationale bloß in Potenz commenſurable Linien zuſammengeſetzt werden, ſo iſt die ganze irrational, und heißt die Binomiale (ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων). Die Differenz zweier ſolcher Linien heißt die Apotome (ἀποτομή) $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $a \pm \sqrt{b}$, für die Apotome noch $\sqrt{a} - b$.

Der Ausdruck Binomium hat ſich bei uns in viel weiterer Bedeutung für jede algebraiſche Summe und Differenz erhalten, ſo daß wir alle von Euklides unterſchiedenen Irrationalformeln Binomien nennen würden. Der Ausdruck Apotome und der von den Italienern dafür ſubſtituirte recisum, reciso, iſt gegenwärtig ganz verſchwunden.

S. 37. 74 (38. 75). Wenn zwei bloß in Potenz commenſurable Mediallinien, deren Rechteck rational iſt (vergl. S. 28. 31.), verbunden werden, ſo iſt ſowohl ihre Summe als ihre Differenz irrational, und die erſtere heißt die erſte Bimediale (ἡ ἐκ δύο

μέσων πρώτη), die andere heißt die erſte Medialapotome (ἡ μέσης ἀποτομὴ πρώτη).

Ich will hier und bei den folgenden Linien die im vorigen Abſchnitte gegebenen Formeln nicht wiederholen, ſondern verweiſe nur auf die Nummer des Satzes, welcher zwei ſolche Linien finden lehrt, wie ſie hier verlangt und verbunden werden. Aus S. 31. laſſen ſich zwei Fälle unterſcheiden, je nachdem der größere Theil über den kleineren um das Quadrat einer dem größeren Theil commenſurablen oder incommenſurablen Linie potenzirt. Da aber Euklides dieſen Unterſchied bei der Definition der zuſammengeſetzten Irrationallinien nicht macht, ſo will ich auch bloß darauf hinweiſen.

S. 38. 75 (39. 76). Wenn zwei bloß in Potenz commenſurable Mediallinien, deren Rechteck medial iſt (S. 29. 32.), verbunden werden, ſo iſt ſowohl die Summe als die Differenz dieſer Linien irrational, und die erſtere heißt die zweite Bimediale (ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα), die andere die zweite Medialapotome (ἡ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα).

S. 39. 76 (40. 77). Wenn zwei in Potenz incommenſurable Linien, deren Summe der Quadrate rational, deren Rechteck aber medial iſt (S. 33.), verbunden werden, ſo iſt ſowohl die Summe als die Differenz dieſer Linien irrational, und jene heißt die größere Irrationale (ἡ μείζων), dieſe die kleinere Irrationale (ἡ ἐλάσσων).

S. 40. 77 (41. 78). Wenn zwei in Potenz incommenſurable Linien, deren Quadratſumme medial, deren Rechteck aber rational iſt (S. 34.), verbunden werden, ſo iſt ſowohl die Summe als die Differenz dieſer Linien irrational, und jene heißt die ein Rationales und Mediales Potenzirende (ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη), dieſe die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende (ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα).

S. 41. 78 (42. 79). Wenn zwei in Potenz incommenſurable Linien, deren Quadratſumme und Rechteck medial, aber einander incommenſurabel ſind (S. 35.), verbunden werden, ſo iſt ſowohl die Summe als die Differenz dieſer Linien irrational, und jene heißt die zwei Mediale Potenzirende (ἡ δύο μέσα δυναμένη) dieſe die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende (ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα).

Hier nun noch Einiges über die von Euklides gewählten oder

vielleicht ſchon vor ihm gebrauchten Namen der verſchiedenen Irrationallinien. Die Namen der erſten ſechs Linien ſind klar, weil ſie von der äußeren Form des Ausdrucks hergenommen ſind; bei den ſechs folgenden aber beruht die Benennung auf abgeleiteten Eigenſchaften des Ausdrucks. Der Name der größern und kleinern Irrationale ſcheint willkührlich gewählt zu ſein, indem Namen, welche mit demſelben Rechte, dem reinen Wortverſtande gemäß, auf alle anderen Arten von Irrationalgrößen hätten angewandt werden können, durch den mathematiſchen Sprachgebrauch einer ſpeciellen Art derſelben zugetheilt wurden, ebenſo wie jede dieſer Irrationallinien mit demſelben Rechte wie die erſte ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων genannt werden könnte, zumal da Euklides in den Sätzen der zweiten Hexade wirklich die beiden Beſtandtheile ſämmtlicher Irrationallinien ὀνόματα nennt. Jedenfalls iſt die von Lorenz (nach S. 40.) gegebene Erklärung des Namens unpaſſend. Lorenz ſagt, dieſe Linie habe ihren Namen daher erhalten, weil die rationale Summe der Quadrate der beiden Theile größer iſt als das irrationale oder mediale Rechteck derſelben. Daraus iſt erſtens der Name der größern Irrationale noch ganz und gar nicht motivirt, indem man nach wie vor fragt, warum heißt die Linie denn nun die größere Irrationale? zweitens aber gilt ganz daſſelbe von der kleinern Irrationale. Die noch übrigen vier Namen aber haben ihren guten Grund. Die ein Rationales und ein Mediales Potenzirende, welche nach S. 34. gebildet wird, hat die Form

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}}+\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a-b}}{2}}.$$

Das Quadrat dieſes Ausdrucks iſt $\sqrt{a^2-ab}+(a-b)$, es beſteht alſo aus einem rationalen und einem medialen Rechteck (ſ. S. 25.), wodurch nach der bekannten Bedeutung des Verbums δύνασθαι der Name völlig motivirt iſt. Die zwei Mediale Potenzirende, die aus S. 35. abgeleitet wird, hat die Form

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}}+\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})\sqrt{b}}{2}},$$

und ihr Quadrat iſt $\sqrt{ab}+\sqrt{(a-c)\,b}$, alſo die Summe zweier medialen Rechtecke. Die Namen der dieſen beiden entſprechenden Differenzenlinien ſind ebenfalls nicht von der Form der Linien ſelbſt, ſondern von der Form ihrer Quadrate hergenommen. Das Quadrat der

der erſtern von ihnen iſt $\sqrt{a^2 - ab} - (a - b)$; wenn man zu dieſem Quadrate das rationale Rechteck $(a - b)$ addirt, ſo wird die Summe ein mediales Rechteck, $\sqrt{a^2 - ab}$, daher der Name die mit einem Rationalen ein Mediales Ganze Gebende. Das Quadrat der letztern dagegen wird $\sqrt{ab} - \sqrt{(a-c)\,b}$, welches, wenn man das mediale Rechteck $\sqrt{(a - c)\,b}$ hinzu addirt, die mediale Summe $\sqrt{ab}$ giebt; daher heißt die Linie die mit einem Medialen ein Mediales Ganze Gebende.

Zweite Hexade. S. 42 — 47 (43 — 48) und S. 79 — 84 (80 — 85). Jede durch Addition oder Subtraction zuſammengeſetzte Irrationallinie kann nur in einem Puncte in ihre beiden Beſtandtheile (ὀνόματα) aufgelöſt werden.

Dieſer Satz wird für jede der zwölf zuſammengeſetzten Linien beſonders bewieſen. Drücken wir den Satz arithmetiſch aus, ſo ſagt er z. B. für den Fall der Binomiale, daß $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ nicht gleich $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ſein könne, wenn a, b und x, y von einander verſchiedene rationale Zahlen ſind; es kann alſo z. B. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ nicht anders $= \sqrt{2} + \sqrt{3}$ werden, als wenn $x = 2$ und $y = 3$ iſt.

Dritte Hexade. Unterſcheidung der ſechs Arten von Binomialen und Apotomen, und Regeln, jede derſelben zu conſtruiren. S. 48 — 53 (49 — 54) und S. 85 — 90 (86 — 91).

Der allgemeine Ausdruck der Binomiale und Apotome iſt $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. Je nachdem nun a oder b oder keines von beiden (in unſerm Sinne des Worts) rational iſt, und in jedem der drei Fälle die größere über die kleinere um das Quadrat einer der erſteren commenſurablen oder incommenſurablen Linie potenzirt, unterſcheidet Euklides ſechs Arten beider Linien, die ſich nach dem letztgenannten Eintheilungsgrunde in zwei Klaſſen theilen laſſen.

I. Der größere Theil potenzirt über den kleinern um das Quadrat einer der größern in Länge commenſurablen Linie.

1) Der größere Theil iſt einer angenommenen Rationallinie commenſurabel, oder kürzer ausgedrückt, iſt rational. Erſte Binomiale und Apotome.

$$a \pm \sqrt{a^2 - d^2} \text{ oder } a \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - c^2}$$

2) Der kleinere Theil iſt rational. Zweite Binomiale und Apotome.

$$\frac{ab}{\sqrt{b^2 - c^2}} \pm a$$

3) Keiner beider Theile iſt rational. Dritte Binomiale und Apotome.

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{a\,(b^2 - c^2)}{b^2}} \text{ oder } \sqrt{a} \pm \sqrt{a - ad^2}$$

II. Der größere Theil potenzirt über den kleineren um das Quadrat einer dem größeren in Länge incommenſurablen Linie.

1) Der größere Theil iſt rational. Vierte Binomiale und Apotome.

$$a \pm \sqrt{a^2 - d}$$

2) Der kleinere Theil iſt rational. Fünfte Binomiale und Apotome.

$$\sqrt{a^2 + d} \pm a$$

3) Beide Theile ſind irrational. Sechſte Binomiale und Apotome.

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{a - d}$$

Dieſe ſcheinbar willkührliche Eintheilung wird motivirt durch die Reſultate der beiden folgenden Hexaden, in denen der auffallende Zuſammenhang, in welchem die ſechs Binomialen und Apotomen mit den in der erſten Hexade erklärten ſechs additiven und ſechs ſubtractiven Irrationallinien ſtehen, nachgewieſen wird.

Vierte Hexade. Quadratwurzeln aus Binomien und Apotomen. S. 54 — 59 (55 — 60) und S. 91 — 96 (92 — 97).

Bei ſeiner geometriſchen Darſtellung kann Euklides nicht geradezu aus einer Binomiale oder Apotome die Wurzel ziehen, weil dieſe Ausdrücke ihm durchaus Linien vorſtellen. Darum bildet er erſt ein Rechteck aus der Binomiale in irgend eine Rationallinie. Ein rationaler Factor ändert aber offenbar die Natur des irrationalen Ausdrucks nicht, und da derſelbe überdies beliebig iſt, ſo können wir, wenn wir die irrationalen Größen als Zahlenausdrücke behandeln, denſelben gleich 1 ſetzen, wodurch wir die Euklidiſche Operation in eine wirkliche Quadratwurzelausziehung aus dem reinen vorgelegten Binomium verwandeln. Das intereſſante Reſultat dieſer beiden

correſpondirenden Hexaden iſt, daß die Quadratwurzeln der ſechs Binomialen der Reihe nach durch die ſechs in der erſten Hexade erklärten additiven, die Quadratwurzeln der ſechs Apotomen durch die ſechs ſubtractiven Irrationallinien repräſentirt werden. Demgemäß iſt die Wurzel aus der erſten Binomiale eine Binomiale, die Wurzel aus der zweiten Binomiale die erſte Bimediale u. ſ. w.

Fünfte Hexade. Quadrate der zuſammengeſetzten Irrationallinien. S. 60 — 65 (61 — 66) und S. 97 — 102 (98 — 103).

Dieſe Sätze enthalten die Umkehrung der in der vorigen Hexade bewieſenen, und die Reſultate ſind die, daß die Quadrate der ſechs additiven Irrationalgrößen der Reihe nach die ſechs Binomialen, die Quadrate der ſechs ſubtractiven Irrationalgrößen der Reihe nach die ſechs Apotomen hergeben. Demgemäß iſt z. B. das Quadrat jeder der ſechs Binomialen ohne Unterſchied eine erſte Binomiale, das Quadrat der erſten Bimediale eine zweite Binomiale u. ſ. w. Weil aber wiederum geometriſch betrachtet das Quadrat einer Linie nicht eine Linie ſein kann, ſo ſtellt Euklides die Sache ſo dar, daß er an eine Rationallinie ein Rechteck anlegt, welches dem Quadrate irgend einer der Irrationallinien gleich iſt, und nun die Breite, d. h. die andere Seite dieſes Rechtecks beſtimmt. Wir erhalten hier wiederum das einfache Zahlenreſultat, wenn wir die angenommene Rationallinie 1 ſetzen.

Sechſte Hexade. Jede einer zuſammengeſetzten Irrationallinie in Länge commenſurable Linie iſt eine Irrationallinie derſelben Art. S. 66 — 70 (67 — 71) und S. 103 — 107 (104 — 108).

Dieſer Satz wird in S. 66 und S. 103 von allen Binomialen und Apotomen und in S. 67 und in S. 104 von beiden Bimedialen und Medialapotomen bewieſen. Daher enthält dieſe der Analogie wegen ſogenannte Hexade nur fünf Sätze in jedem der beiden correſpondirenden Abſchnitte.

Es folgen nun in dem erſten Abſchnitte zwei, in dem zweiten drei einzelne Sätze, welche auf eine gefällige Weiſe Mittel an die Hand geben, die zwölf zuſammengeſetzten Irrationallinien zu bilden. Wir wollen ſie einzeln durchgehen.

S. 71 (72). Wenn man einen rationalen und einen medialen

Raum zuſammenſtellt, ſo entſtehen (als den Summenraum potenzirend) vier Irrationallinien, und zwar entweder die Binomiale, oder die erſte Bimediale, oder die größere Irrationale, oder endlich die ein Rationales und Mediales Potenzirende.

Beweis. Die beiden Räume ſeien AB, der rationale und CD, der mediale.

Erſter Fall. $AB > CD$.

Lege an eine beliebige Rationallinie EF die beiden Rechtecke $EG = AB$, $HI = CD$, ſo wird EH rational und in Länge commenſurabel der EF, (S. 21), dagegen HK rational aber nur in Potenz der EF commenſurabel (S. 23); daher iſt auch HK der EH bloß in Potenz commenſurabel, alſo EK eine Binomiale, und zwar, da $EH > HK$, entweder eine erſte oder eine vierte Binomiale, je nachdem EH über HK um das Quadrat einer der EH in Länge commenſurablen oder incommenſurablen Linie potenzirt. Iſt nun EK eine erſte Binomiale, ſo iſt nach S. 54. die den Raum EI potenzirende Linie eine Binomiale. Iſt dagegen EK eine vierte Binomiale, ſo iſt nach S. 57. die den Raum EI potenzirende Linie die größere Irrationale.

Zweiter Fall. $AB < CD$.

Hier wird ganz ähnlich gezeigt, daß EK entweder die zweite oder fünfte Binomiale, die den Raum EI potenzirende Linie alſo im erſten Falle die erſte Bimediale, im zweiten Falle die ein Rationales und Mediales Potenzirende ſei.

Ganz gleichförmig ſind die Beweiſe der folgenden Sätze, die ich daher nicht ausführen will.

S. 72 (73). Wenn man zwei einander incommenſurable mediale Räume zuſammenſtellt, ſo entſtehen (in dem Sinne wie vorher) die beiden übrigen Irrationallinien, nämlich entweder die zweite Bimediale oder die zwei Mediale Potenzirende.

In dem Abſchnitte über die ſubtractiven Irrationallinien entſprechen dem erſtern dieſer beiden Sätze zwei andere, indem entweder das Mediale von dem Rationalen, oder das Rationale von dem Medialen ſubtrahirt wird. Demnach haben wir hier folgende Sätze:

S. 108 (109). Wenn man von einem rationalen einen me-

dialen Raum wegnimmt, ſo iſt die Linie, welche den Reſt potenzirt, entweder eine Apotome oder die kleinere Irrationale.

S. 109 (110). Wenn man von einem medialen einen rationalen Raum wegnimmt, ſo entſtehen zwei andere Irrationallinien, und zwar entweder die erſte Medialapotome oder die mit einem Rationalen ein Mediales Ganze Gebende.

S. 110 (111). Wenn man von einem medialen Raume einen andern medialen jenem incommenſurablen Raum wegnimmt, ſo entſtehen die beiden übrigen Irrationallinien, entweder die zweite Medialapotome oder die mit einem Medialen ein Mediales Ganze Gebende.

Endlich correſpondiren noch in beiden Abſchnitten ein Lemma zu S. 72 (73) mit dem S. 111 (112), welche die eſſentielle Verſchiedenheit ſämmtlicher bisher betrachteten Irrationallinien behaupten.

S. 72. Lemma. Die Binomiale und die auf ſie folgenden Irrationallinien ſind weder mit der Mediale, noch unter einander einerlei.

S. 111 (112). Die Apotome iſt mit der Binomiale nicht einerlei. Das heißt $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ kann nie $= \sqrt{x} + \sqrt{y}$ werden.

Lemma. Die Apotome und die auf ſie folgenden Irrationallinien ſind weder mit der Mediale, noch unter einander einerlei.

Vierter Abſchnitt.

Es folgen nun noch als Beſchluß dieſes Buchs fünf einzelne Sätze, welche wir noch kürzlich betrachten wollen.

S. 112 (113). Das dem Quadrate einer Rationallinie gleiche an einer Binomiale entworfene Rechteck giebt zur Breite eine Apotome, deren Beſtandtheile den Theilen der Binomiale commenſurabel und proportionirt ſind, und die von derſelben Ordnung wie die Binomiale iſt.

Das heißt, eine Quadratzahl c^2, dividirt durch eine Binomiale $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, giebt zum Quotienten eine Apotome, die der Binomiale ähnlich iſt; es iſt nämlich

$$\frac{c^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c^2 (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b},$$

oder wenn wir für c^2 gleich von vorne herein 1 ſubſtituiren

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b},\ a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})\ (\sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

S. 113 (114). Das dem Quadrate einer Rationallinie gleiche an einer Apotome entworfene Rechteck giebt zur Breite eine Binomiale, deren Theile den Theilen der Apotome commenſurabel und proportionirt ſind, und die mit der Apotome von derſelben Ordnung iſt.

Das heißt $$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

S. 114 (115). Wenn ein Raum enthalten iſt unter einer Apotome und einer Binomiale, deren Theile den Theilen jener commenſurabel und proportionirt ſind, ſo wird der Raum von einer Rationallinie potenzirt.

$\sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})\ (m\sqrt{a} - m\sqrt{b})} = \sqrt{m\,(a - b)}$, und der Raum ſelbſt iſt $m\,(a - b)$.

Porisma. Daraus leuchtet ein, daß es möglich iſt, daß ein rationaler Raum unter irrationalen Linien enthalten ſei.

S. 115 (116). Aus einer Mediallinie entſtehen unzählige Irrationallinien, und keine derſelben iſt mit irgend einer der vorher behandelten einerlei.

Euklides ſucht die mittlere Proportionale zwiſchen einer Rationallinie a und einer Mediale $\sqrt[4]{b}$, welche $\sqrt{a\sqrt[4]{b}}$ iſt, und die ſich von allen bisher betrachteten Irrationallinien dadurch unterſcheidet, daß ein ihrem Quadrate gleiches an einer Rationallinie entworfenes Rechteck eine mediale Breite giebt, oder, wie Lorenz dem Sinne nach richtig, aber ganz ungeometriſch ſagt, daß ihr Quadrat eine Mediallinie giebt. Ferner nimmt er die mittlere Proportionale zwiſchen a und $\sqrt{a\sqrt[4]{b}}$ und ſo weiter fort.

S. 118[26]) (117). In jedem Quadrate iſt die Diagonale der Seite in Länge incommenſurabel.

Die Einführung dieſes Satzes, wie er im Original ausgeſprochen iſt, iſt ganz von Euklid's Manier abweichend, indem der Text ſich der Einleitungsformel bedient: προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι ὅτι u. ſ. w. Es iſt auch auffallend, daß dem natürlichen und ganz kurzen Be-

26) Als S. 116. 117 hat die Baſeler Ausgabe zwei Sätze, die ſchon oben als S. 105. 106 da geweſen ſind. Am Rande ſteht: Non habet alterum graecum exemplar. Sie gehören auch gar nicht hieher.

weiſe dieſes Satzes, dem nämlich, daß das Quadrat der Diagonale ſich zum Quadrat der Seite wie 2 zu 1, alſo nicht wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl (S. 9) verhält, ein anderer ziemlich langer Beweis vorausgeſchickt wird, der zwar richtig iſt, aber eben wegen ſeiner entbehrlichen Weitläuftigkeit gar nicht Euklidiſch ausſieht. Vielleicht gehört dieſer Satz, der hier als ein bloßer Anhang zu der Lehre von den Irrationallinien erſcheint, ſo wie gewiß die hinter ihm folgende Anmerkung, welche lehrt, daß die Irrationalität nicht auf Linien beſchränkt iſt, ſondern auch auf Flächen und Körper ausgedehnt werden kann, zu den Zuſätzen eines ſpäteren Bearbeiters der Elemente, vielleicht Theon's.

Aber es ſei hierüber genug. Ich bin gerade bei dieſem Euklidiſchen Buche etwas ausführlich geweſen, weil wir dem hier behandelten Gegenſtande nicht ſobald wieder begegnen. Oft und vielfach iſt die rationale Arithmetik der Griechen behandelt worden und die Erweiterungen, welche die Euklidiſche Lehre des ſiebenten, achten und neunten Buchs erfahren hat, ſind ſehr weſentlich. Aber ſein zehntes Buch iſt das einzige Überbleibſel aus dem Alterthume, welches von der irrationalen Arithmetik der Griechen uns einen Begriff giebt, und wir haben auch keine Nachricht, daß irgend ein ſpäterer Mathematiker dieſer Nation die Euklidiſche Lehre weiter fortgebildet oder ſich auch nur damit beſchäftigt hätte [27]). Der Grund dieſer Erſcheinung mag allerdings darin ſeine Erklärung finden, daß Euklides die irrationale Arithmetik bedeutend vollſtändiger behandelt hat, als die rationale, welche, wie ſie in ſeinen drei genannten Büchern uns vorliegt, in der That noch vieles zu wünſchen übrig läßt. Der Erſte meines Wiſſens, der ſich der Fortbildung der Theorie der Irrationalgrößen wieder angenommen hat, iſt Lucas Pacioli de Burgo gegen das Ende des funfzehnten Jahrhunderts, nachdem die Lehre beinahe achtzehn Jahrhunderte brach gelegen.

Kaum habe ich nöthig, den Leſer auf den hohen Grad der Abſtraction, welchen die Behandlung dieſes Gegenſtandes als einer geometriſchen Theorie bei den der algebraiſchen Formelſprache entbehrenden Griechen vorausſetzt und verräth, aufmerkſam zu machen.

---

27) Dagegen berichtet Diogenes Laertius l. IX. sg. 47. daß vor Euklides Demokritus ein Werk περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν verfaßt habe. Was das letzte Wort hier bedeuten ſoll, weiß ich nicht.

Mehr als irgend eine von den Griechen bearbeitete Methode zeugt eben die Theorie der Irrationalgrößen für das ungeheure Übergewicht, welches in ihrer Vorſtellungsweiſe die Geometrie über die Arithmetik behauptete. Dieſe Formeln, welche wir meiſtens aus ſehr complicirten und in einander geſchobenen Quadratwurzeln gebildet in der eben gegebenen Darſtellung vor Augen geſtellt haben, behandelt Euklid, auf den einfachen und einzigen Begriff der Commenſurabilität geſtützt, ohne auch nur einer Quadratwurzel zu erwähnen. Er ſieht nur gerade Linien vor ſich, die mit unſern Formeln nicht den unſchätzbaren Vorzug gemein haben, daß ihre mannigfachen Eigenſchaften und Eigenthümlichkeiten ſich gleich in ihrer äußeren Form verrathen; die algebraiſche Formel trägt für das geübte Auge alle, auch die verborgenſten Eigenſchaften, die ihr anhaften, ſogleich zur Schau; aber eine gerade Linie ſieht auf ein Haar der andern ähnlich, und ihr einziges unterſcheidendes Merkmal, das aber eben auf ihre ſonſtige Beſchaffenheit keinen directen Einfluß hat, iſt ihre Länge. Es iſt allein der abſtracte Gedanke, der dieſen Linien ihre tiefen Geheimniſſe entlockt, welche unſre Formeln uns faſt unaufgefordert ausplaudern. Und ſomit glaube ich nicht zu viel zu ſagen, wenn ich behaupte, daß dieſes in ſeiner geometriſchen Geſtalt jetzt freilich wenig brauchbare und darum wenig beachtete Buch gerade dasjenige iſt, welches uns den alten Mathematiker in ſeiner höchſten Glorie erkennen lehrt.

Das Säculum, welches Euklides eröffnet, war das goldene Zeitalter der Griechiſchen Mathematik. Die von den erſten Ptolemäern in Alexandrien geſtiftete Schule, verbunden mit der weltberühmten Bibliothek, trug ſehr bald herrliche Früchte, und die Wiſſenſchaften fanden hier gleichſam in einem großen gemeinſchaftlichen Centrum Vertreter, welche nicht nur ſelbſt ihrer Zeit und ihrer Schule alle Ehre machten, ſondern auch anderwärts ſchlummernde Talente weckten und zur Nacheiferung anregten. Euklides ſelbſt gehörte zu den Erſten, welche Ptolemäus Lagi zu einem Lehramte an der neu gegründeten Schule berief. Dieſer Umſtand iſt aber auch faſt das Einzige, was wir von den äußern Lebensverhältniſſen des berühmten Mannes wiſſen [28]). Seine Collegen waren die von Ptolemäus, dem

---

28) S. Proklus Comment. zum Euklid. Ed. Bas. p. 20. Bar. I. c. 4. Ausführlichere Nachrichten theilen uns Arabiſche Hiſtoriker über ihn mit, die aber,

Verfaſſer der Μεγάλη Σύνταξις, oft citirten Aſtronomen Timocharis und Ariſtillus. Es folgt nun eine Reihe von Mathematikern und Aſtronomen, welche entweder in Alexandrien ſelbſt lebten, oder doch der dortigen Schule ihre Ausbildung verdankten, und deren Werke die Bewunderung, welche die Nachwelt ihnen gezollt hat und noch bis auf den heutigen Tag zollt, in vollem Maaße verdienen. Es iſt hinreichend, in einem Zeitraume von wenig mehr als einem Jahrhundert die Namen Ariſtarchus, Archimedes, Eratoſthenes, Apollonius, Kteſibius, Heron, Hipparchus zu nennen, durch welche die Geometrie und Aſtronomie der Griechen auf den hohen Gipfel erhoben wurde, auf dem dieſe Disciplinen allen ſpäteren Nationen als Muſter vorleuchteten. Auch der praktiſche Calcul blieb nicht vernachläſſigt, und wir haben oben von den dahin

ſobald ſie ſich ins Ausland wagen, wenig zuverläſſig ſind. Der anonyme Verfaſſer der gegen das Ende des zwölften Jahrhunderts geſchriebenen Gelehrten-Chronik, (تارخ الحكماء), aus welcher Caſiri in ſeiner Bibl. Arab. Hisp. Escur. ſo ſchätzenswerthe Auszüge über Mathematiker mittheilt, ſagt T. I. p. 341 des angeführten Werkes: „Euklides, der Sohn des Naukrates, des Sohns des Zenarchus (ſo corrigirt Caſiri den Arabiſchen Text, in welchem die beiden Namen نوقطرس Nauſtares und زنيقس Zenikus lauten), bekannt unter dem Namen des Geometers (wörtlich des Beſitzers der Geometrie, صاحب جومطريا), ein Gelehrter der alten Zeit, ſeinem Stamme nach ein Grieche, ſeinem Aufenthalte nach ein Syrer, ſelnem Geburtsorte nach ein Tyrier, beſaß eine große Geſchicklichkeit in der Geometrie u. ſ. w." Zu einem Tyrier macht ihn auch Abulfaraj Hist. dyn. ed. Pococke p. 64. Merkwürdig iſt, daß beide Autoren, erſterer auf Jakob ben Iſaak Alkindi ſich berufend, unſern Euklides jünger als Apollonius machen. Alkindi nämlich ſagt, Euklides habe zwei Bücher des Apollonius über die Kegelſchnitte vervollſtändigt, ſodann eine Einleitung zum Verſtändniß der fünf Körper geſchrieben, und daraus ſeien die ihm zugeſchriebenen dreizehn Bücher entſtanden. Abulfaraj a. a. O. ſagt, Apollonius Werk über die Kegelſchnitte nebſt einem andern Buch, das Apollonius verfaßt habe, ſeien die Veranlaſſung geweſen, daß Euklides lange Zeit nachher ſein Werk geſchrieben habe. Bauer in ſeiner Überſetzung des Abulfaraj (S. 58) hat es nicht für gut befunden, dieſer Stelle eine berichtigende Anmerkung beizufügen. Daß die älteren Occidentalen, ſelbſt noch bis ins ſiebzehnte Jahrhundert hinein, den Mathematiker Euklides mit dem gleichnamigen Philoſophen von Megara, dem Zeitgenoſſen Platon's verwechſelten, habe ich oben S. 13 bereits erwähnt. Den doppelten Fehler, den ich dort bei Dechales gerügt habe, begeht auch Blanzanus, daß er nämlich den Megarenſiſchen Philoſophen, welcher c. 424 ſtarb, unter Ptolemäus dem Erſten, welcher ſeit 323 das im Jahre 332 erbaute Alexandria in Beſitz nahm, in dieſe Stadt ziehen läßt. S. Chronol. math. p. 45.

gehörigen Arbeiten Archimed's und Apollonius geſprochen. Weniger Nahrung fand in dieſer geometriſchen Periode die theoretiſche Arithmetik, und es iſt unter den genannten Männern nur ein einziger, dem wir eine überdies nicht ſehr erhebliche Erweiterung dieſes Zweiges der Wiſſenſchaft verdanken. Es iſt Eratoſthenes. Er hat eine Methode zur Auffindung der Primzahlen erfunden, welche unter dem Namen des Siebes des Eratoſthenes (κόσκινον) bekannt iſt [29]). Den Namen hat dieſe Methode daher, daß Eratoſthenes nicht die Primzahlen geradezu finden lehrte, ſondern vielmehr aus der fortlaufenden Zahlenreihe allmählig alle diejenigen ausſchied, welche nicht Primzahlen ſind, ſo daß zuletzt nur die Primzahlen übrig blieben. Er ſiebte alſo gewiſſermaßen die Zahlen durch, ſo daß die unbrauchbaren durchfallen mußten und nur die verlangten zurückblieben. Geradezu als unbrauchbar ſchied Eratoſthenes zur Vereinfachung der Arbeit alle geraden Zahlen aus, und ſchrieb nur die ungeraden von 3 ab in einer möglichſt langen Reihe hin (ὡς δυνατὸν μάλιστα ἐπὶ μήκιστον στίχον, ſagt Nikomachus). Er unterſuchte nun zunächſt, welche Zahlen durch 3 theilbar wären, und fand, daß von 3 an jede dritte als zuſammengeſetzte Zahl wegzuſtreichen ſei. Ebenſo konnte er von 5 an jede fünfte, von 7 an jede ſiebente u. ſ. w. wegſtreichen. Wenn er nun dieſe Operation durch die ganze Reihe durchgeführt hatte (wobei noch der Vortheil zu berückſichtigen war, daß er, wenn er die Reihe bis zur $n$ten ungeraden Zahl, alſo bis zur Zahl $2n - 1$ hingeſchrieben hatte, den Verſuch nur mit den Zahlen von 3 bis zur $\sqrt{2n - 1}$ anſtellen durfte), ſo ſtanden zuletzt als undurchſtrichen nur noch die Primzahlen da. So hatte er von den vorher durch einander gemengten Zahlen die unbrauchbaren ausgeſiebt und nur die brauchbaren behalten. Übrigens fällt in die Augen, daß dieſe Methode unüberwindliche Hinderniſſe in der Ausführung darbietet, ſobald man der Tabelle der Primzahlen eine auch nur einigermaßen bedeutende Ausdehnung geben will, und Boſſut hätte dieſe Methode ſchwerlich un moyen *facile et commode* de trouver les nombres premiers [30]) genannt, wenn er der Probe halber verſucht hätte, mit Hilfe dieſes leichten und

29) Die Nachricht davon findet ſich in der Arithmetik des Nikomachus, l. 1. c. 13. p. 84. 85. Ast. — p. 17. 18. Paris.

30) Hist. des math. T. 1. p. 6.

Digitized by Google

bequemen Mittels die Primzahlen etwa bis zu einer Million auszuſieben.

Dieſen kleinen Zuwachs abgerechnet, ſcheint die Arithmetik, wie ſie in den Elementen Euklid's enthalten iſt, faſt vierhundert Jahre hindurch einzige Norm geblieben zu ſein. Wenigſtens wird uns in dieſem langen Zeitraume von etwa 300 v. Chr. bis ungefähr 100 n. Chr. kein einziger Mathematiker genannt, der eine wiſſenſchaftliche Zahlentheorie, d. i. 'Αριθμητική, geſchrieben hätte. Die Geometrie und Aſtronomie ſcheint alle Kräfte der Mathematiker in Anſpruch genommen, und das Beiſpiel der großen Geometer Archimedes und Apollonius alle mathematiſchen Talente nach dieſer einſeitigen Richtung mit ſich fortgeriſſen zu haben. Dieſe Erſcheinung darf uns aber nicht Wunder nehmen; ſie liegt vielmehr ganz in der Natur des menſchlichen Geiſtes begründet, und die Geſchichte der Wiſſenſchaft bietet uns ähnliche Erſcheinungen mehr als einmal dar. Als am Ende des erſten oder am Anfange des zweiten chriſtlichen Jahrhunderts Nikomachus ſeine Arithmetik geſchrieben hatte, da nahm die ganze mathematiſche Literatur der Griechen bis auf die ſpäteſten Zeiten des Griechenthums hin eine ganz arithmetiſche Richtung, und das Publicum wurde vom zweiten bis zum vierzehnten Jahrhundert mit arithmetiſchen Werken überſchwemmt. Als Leonardo Bonacci die Algebra aus Arabien nach Europa gepflanzt hatte, arbeiteten die Mathematiker faſt vierhundert Jahre hindurch nur in der Algebra, und während dieſe Disciplin reißende Fortſchritte machte, blieben die übrigen auf ihrem alten Standpuncte ſtehen. Da erſchien die erſte Uberſetzung und bald darauf die Originalausgabe von Diophant. Alsbald ward die Algebra der beſtimmten Gleichungen verlaſſen, und die größten Genies, Bachet, Fermat, Pell, Frenicle, löſten Diophantiſche Aufgaben und führten deſſen Theorien fort. Dieſes Streben ward unterbrochen durch die Erfindung der Differentialrechnung, und kam ſo ganz und gar in Vergeſſenheit, daß nun wieder über hundert Jahre lang nichts für Diophant und deſſen Analyſis gethan ward, bis Euler den Gegenſtand wieder aufnahm; ſeitdem iſt nun die unbeſtimmte Analytik Diophant's und ſeine Zahlentheorie wieder Lieblingsſtudium der größten Mathematiker geworden, unter denen beſonders Lagrange, Legendre, Gauß und Jacobi genannt zu werden verdienen. Und analoge Erſcheinungen bietet die Geſchichte faſt jeder Wiſſenſchaft dar. So war z. B. gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts, ſeit der großartigen Arbeit Kenni-

cott's, in alle Theologen eine wahre Manie gefahren, Variantenſammlungen zum Bibeltext anzulegen, eine Richtung, deren Hemmung nicht das kleinſte Verdienſt iſt, welches Eichhorn um die Theologie ſich erworben hat. Aber wir kehren zur Sache zurück.

Es ſcheint, als habe Aſien ſeine Anſprüche an die Arithmetik, auch im Griechiſchen Sinne des Worts, frühzeitig geltend machen wollen. Die drei berühmteſten Griechiſchen Arithmetiker, Nikomachus, Theon und Jamblichus waren Aſiaten von Geburt. Von den beiden erſtgenannten mag es zweifelhaft ſcheinen, wem vor dem andern der Vorzug der Priorität gebühre, da das Alter des Nikomachus nicht ganz beſtimmt angegeben werden kann. Indeß hat die Annahme, daß er am Ende des erſten bis in den Anfang des zweiten Jahrhunderts hinein, alſo vor Theon gelebt habe, manches für ſich. Jedenfalls will ich mit ihm als dem bei weitem wichtigeren hier beginnen. Obgleich Nikomachus bei den Griechen ſich in bleibendem Anſehen erhalten hat und von faſt unzähligen Schriftſtellern genannt und citirt wird, ſo wiſſen wir doch ſehr wenig, faſt gar nichts, über ſeine äußern Lebensverhältniſſe. Die Annahme, daß er etwa um das Jahr 100 n. Chr. gelebt habe, gründet ſich auf die beiden Data, daß er auf einer Seite in ſeiner Schrift über die Muſik den unter Tiberius Regierung lebenden Thraſyllus nennt [31]),

---

31) Enchir. harmon. I. p. 24: καὶ προσεκτησάμεϑα τὴν Πυϑαγορικοῦ κανόνος κατατομὴν ἀκριβῶς κατὰ τὸ βούλημα τοῦ διδασκάλου συντετελεσμένην, οὐχ ὡς Ἐρατοσϑένης παρήκουσεν ἢ Θράσυλλος, ἀλλ' ὡς ὁ Λοκρὸς Τίμαιος etc. — Vergl. *Fabricii bibl. graeca ed. Harles.* T. V. p. 630. not. c. Equidem Thrasylli cujusdam musici ac poetae antiqui patria Phliasii mentio apud Plutarchum de musica p. 1137. atque hunc a Nicomacho laudari putabat doctissimus Jonsius p. 224. Sed scripsisse illum minus constat; itaque verisimilius est, intelligi Thrasyllum Mendesium, multarum artium scientiam professum et Platonicae sectae addictum, quem Tiberius in contubernium adscivit, astrologicis ejus divinationibus usus etc. . . . . Ἐν τῷ περὶ τῶν ἑπτὰ τόνων citatur Thrasyllus a Porphyrio in Ptolemaei music. p. 266. — Jedenfalls untergeſchoben iſt das Citat des Ptolemäus in Nikomachus Enchir. harm. II. p. 36, weil Nikomachus unmöglich Ptolemäus citiren und zugleich von Apulejus überſetzt ſein kann, und es iſt jedenfalls der Conjectur Meibom's, des Herausgebers des mir bisher nicht zugänglichen Enchiridion harmonices, welche Fabricius l. l. p. 630 anführt, beizuſtimmen: quin libro altero memorat Claudium Ptolemaeum, clarum Antonini Pii temporibus, nisi cum Marco Meibomio adfirmare velis, verba illa de Ptolemaeo esse a recentiore manu, praesertim cum enchiridion

und daß auf der andern Seite **Apulejus** von Madaura, unter der Regierung der Antoninen, ſeine Arithmetik ins Lateiniſche überſetzt hat. Er gehörte der Pythagoräiſchen Schule an [32], und war aus der Stadt Geraſa, wahrſcheinlich in Arabien [33], gebürtig, woher er den Beinamen Γερασηνός oder Γερασινός führt. Nicht leicht ſind über einen alten Auctor ſo viele Irrthümer verbreitet worden, wie über Nikomachus. Einige ſogenannte Hiſtoriographen der Mathematik erweiſen ihm die Ehre, ihn ins ſechſte Jahrhundert vor Chriſto zu verſetzen [34]. Solche Anachronismen beweiſen nur, daß die Erzähler das Werk des Auctors nicht geleſen haben und nicht wiſſen, daß, um anderer Data nicht zu erwähnen, gerade die Nachricht über das Sieb des Eratoſthenes, die ich ſo eben mitgetheilt habe, ſich bei Nikomachus findet, ſo daß er wenigſtens nicht Jahrhunderte vor Eratoſthenes gelebt haben kann. Dieſe Irrthümer haben wahrſcheinlich darin ihren Grund, daß man irgendwo einen Nikomachus (und deren gab es unter den Griechen unzählige) fand, der um die er-

---

harmonicum integrum libro primo absolvatur, et quae libri secundi vice subjunguntur, tantum excerpta sint ex majore, ut videtur, opere musico, quod pluribus libris Nicomachus post enchiridion concinnarat. Ceterum Claudio Ptolemaeo suppar fuit Apulejus Madaurensis, qui Nicomachi Arithmeticen latine converterat, teste Cassiodoro de Arithmet. p. 555, ex quo idem tradunt Isidorus Hisp. l. III. originum cap. 2. et Beda libro de computo, aliique. Vergl. außerdem *Tennulii* notae in Jamblichi arithm. p. 64. 65. *Brucker* hist. philos. T. II. p. 160. 161.

32) Pappus III. prop. 16. (p. 19. der Ausg. v. 1660). Mehre Citate ſ. in Brucker hist. phil. T. II. p. 160. not. y.

33) Fabr. bibl. graeca T. V. p. 629. *Nicomachus e Gerasa Arabiae urbe.* Dazu die Note a): Sed fuit et altera Gerasa Syriae coeles, cujus meminere Stephanus Byz. et Ptolemaeus, quamque Nicomachi nostri fuisse patriam omnes unanimiter adseverare adfirmat Abr. Berkelius ad Stephanum p. 296. Sed neminem certe veterum hoc adfirmare video. Itaque malo adsentire antiquo scriptori, (non Jamblicho, in cujus commentario per Tennulium edito nihil tale legitur, sed Johanni Philopono vel Asclepio Tralliano), qui patriam Nicomachi scribit Gerasam finitimam Bostrae in Arabia. Γερασηνὸς δὲ λέγεται ἀπὸ τῆς πόλεως, ᾗ ὄνομα Γέρασα. Ἔστι δὲ περὶ Βόστραν καὶ Ἀραβίαν. [Γυψαρίαν legit Berkelius, forte scribendum Βόστραν τὴν Ἀραβίας].

34) Blancanus p. 42. in ſeinem Quartum Seculum incipiens ab urbe cond. ann. 201, ante Christum ann. 552. Dechales p. 29: Tertio Urbis conditae saeculo floruit Nicomachus Arithmeticus.

wähnte Zeit gelebt haben mochte, und der wurde dann ſchnell mit unſerm Arithmetiker identificirt, ähnlich wie Tennulius ohne Bedenken hinſchreibt: Vixit post Philostratum, teste Sidonio lib. VIII. ep. 3. *Apollonii Pythagorici vitam, non ut Nicomachus senior e Philostrati, sed ut Thascius Victorianus e Nicomachi schedio exscripsit, quia jusseras, misi,* etc. [35]), womit er den Arithmetiker ins dritte Jahrhundert nach Chriſto, alſo hinter einige ſeiner Commentatoren zurückſchiebt, ohne zu bedenken, ob in der angeführten Stelle nicht vielleicht ein anderer Nikomachus gemeint ſein könne. Von mehr Bedeutung aber, als dieſe vagen Anachronismen, ſind die verkehrten Urtheile über den Inhalt der Arithmetik des Nikomachus. Faſt einſtimmig heißt es, Nikomachus habe ſich in ſeinem Werke mit den Pythagoräiſchen Zahlengeheimniſſen beſchäftigt [36]). Man verwechſelte ſeine ſehr werthvolle Arithmetik

35) Notae in Jambl. arithm. p. 65. Das hindert dieſen infelix editor aber nicht, auf der folgenden Seite die Arithmetik ſchon im zweiten Jahrhundert von Apulejus, qui vixit tempore Marci Antonini, ins Lateiniſche überſetzen zu laſſen.

36) Was Montucla T. 1. p. 318. 19. über Nikomachus ſagt, beweiſt nur, daß er weder deſſen Arithmetik, noch die fälſchlich ihm beigelegten Theologumena geleſen hat. — Daſſelbe gilt von Käſtner (Geſch. d. Math. Th. I. S. 43. 44.); nachdem er von der Euklidiſchen Arithmetik als einziger Quelle, aus der wir die Griechiſche Arithmetik kennen, geſprochen, fährt er ſo fort: „Von dem Sichern in dieſen Kenntniſſen machte man Anwendungen, die auf Geheimniſſe führen ſollten, und jetzo höchſtens für Spielwerke erkannt werden, viele gar für Unſinn, und wer ſtrenge von ihnen urtheilt, ſtrafbaren Aberglauben. Dergleichen finden ſich in Nicomachi Arithmetica Par. 1538. *Τὰ ϑεολογούμενα τῆς ἀριϑμητικῆς* .... Par. 1543. Jamblichus in Nicomachi Arithmeticam introductionem" u. ſ. w. Ich möchte wohl wiſſen, ob Käſtner aus Nikomachus oder Jamblichus auch nur eine Stelle als Belag für ſeine Ausſage hätte beibringen können. Ich habe keine der Art gefunden. — Mönnich (Lehrbuch d. Mathem. 1. Thl. 2. Abth. S. 460) ſchreibt ſehr beſtimmt: „Unter Tiber's Regierung (!) ſchrieb Nikomachus, ein Pythagoräer, *εισαγωγην αριϑμητικην*; ſie iſt zuerſt (bis auf Mönnich's Zeit aber auch nicht wieder) in Paris 1538 gedruckt. Außer vielen, theils wenig brauchbaren Eintheilungen der Zahlen enthält dies Buch viel von Zahlengeheimniſſen oder eigentlich Spielwerken mit Zahlen, worüber unter den Alten Jamblichus einen Griechiſchen Commentar, ed. 1668 u. ſ. w. geſchrieben." — Die Herren wiſſen alle ſehr gut und richtig anzugeben, wann und wo die Arithmetik des Nikomachus gedruckt worden iſt; hätten ſie ſie dann nicht auch leſen können? — Boſſut macht es, wie oft, am beſten; er nennt Nikomachus gar nicht, ſondern läßt gleich auf Eratoſthenes Diophant folgen.

mit einem Werke, welches mit Unrecht Nikomachus Namen führt; es ſind dieſes die ϑεολογούμενα τῆς ἀριϑμητικῆς. Allerdings ſoll Nikomachus, einer Nachricht bei Photius gemäß [37]), ein ähnliches Werk verfaßt haben, aber die auf uns gekommenen Theologumena ſind ſicher nicht von ihm, weil er ſelbſt, ja ſogar der Commentator ſeiner Arithmetik, Anatolius, aus dem vierten Jahrhundert, darin citirt wird. Der Grund der vielen ſchiefen und unbeſtimmten Urtheile über dieſen Autor iſt wahrſcheinlich darin zu ſuchen, daß ſeine Arithmetik noch nicht das Glück gehabt hat, in irgend eine occidentaliſche Sprache überſetzt worden zu ſein, ein Umſtand, der die Mathematiker von dem Studium des Werkes abgeſchreckt zu haben ſcheint. Freilich haben wir in Nikomachus keinen Diophant, aber wir haben in ſeinem Werke eine ziemlich vollſtändige elementare Arithmetik, und eine Vorarbeit Diophant's, welche keinesweges die gänzliche Vernachläſſigung verdient, welche ſie in neuerer Zeit erfahren hat [38]). Es ſei mir daher erlaubt, hier gut zu machen, was man ſo lange gegen den verdienſtvollen Verfaſſer vergangen hat, und ſo ausführlich, wie es ſich, ohne weitſchweifig zu ſein, thun läßt, den Inhalt ſeiner Arithmetik Schritt für Schritt meinen Leſern vor Augen zu führen.

Erſtes Buch.

Nach einer gelehrten philoſophirenden Einleitung (Kap. 1—6) beginnt die eigentliche Arithmetik mit der Definition der Zahl (Kap. 7): Ἀριϑμός ἐστι πλῆϑος ὡρισμένον ἢ μονάδων σύστημα ἢ ποσότητος χῦμα ἐκ μονάδων συγκείμενον. Es folgt ſodann die Eintheilung der Zahlen in gerade und ungerade.

---

37) S. Fabricii bibl. graeca T. V. p. 638. ed. Harles.

38) Ich muß hier Reimer, den Überſetzer der Boſſut'ſchen Geſchichte der Mathematik, ausnehmen, der im erſten Theil ſeiner Überſetzung S. 42. Nikomachus wenigſtens inſoweit Gerechtigkeit widerfahren läßt, daß er ihn nennt und über die übrigen Griechiſchen Arithmetiker erhebt, wenngleich er ihn darin wieder zu tief herabſetzt, daß er ſagt, ſein Werk enthalte keinen beſonders merkwürdigen Satz, der dem Verfaſſer eigen zu ſein ſcheint. Wir können zwar aus Mangel an Quellenkenntniß nicht unterſcheiden, was Nikomachus ſelbſt und was von Alters her der Schule angehörte; indeß berechtigt uns das doch nicht anzunehmen, daß Nikomachus bloß compilirt habe.

Kap. 8. Jede Zahl iſt die halbe Summe der zu beiden Seiten gleich weit von ihr abſtehenden. Einzig in ihrer Art ſteht hier die Einheit da, weil ſie nicht zu beiden Seiten Zahlen hat; ſie iſt die Hälfte der einzigen, die neben ihr ſteht. (Wenn wir es ſonſt nicht ſchon wüßten, ſo würde hieraus deutlich erhellen, wie ganz fremd den Griechen die Vorſtellung war, die Zahlenreihe nach der andern Seite über 1 hinaus fortzuſetzen. Auch die Null galt ihnen nicht als Zahl, ſonſt hätte Nikomachus nicht nöthig gehabt, die Zahl 1 von ſeiner Regel auszunehmen). Die gerade Zahl zerfällt in drei Klaſſen, in die gerademal-gerade (ἀρτιάκις ἄρτιος), die ungerad-gerade (περισσάρτιος) und die gerad-ungerade (ἀρτιοπέρισσος). Dieſer Gegenſtand macht den Inhalt des achten bis zehnten Kapitels aus, und Nikomachus weicht hier von Euklides ab, deſſen Definitionen inſofern nicht genau ſind, als ſie ſich nicht gegenſeitig ausſchließen. Bei Euklides, unter den Definitionen des ſiebenten Buchs, heißt es nämlich: „Eine gerademal gerade Zahl iſt eine ſolche, welche durch eine gerade Zahl dividirt eine gerade Zahl zum Quotienten giebt, eine gerademal ungerade, welche durch eine gerade Zahl dividirt eine ungerade Zahl zum Quotienten giebt.“ Er ſelbſt ſagt aber **IX**, 34: „Wenn eine gerade Zahl weder durch fortgeſetzte Verdoppelung der 2 entſtanden iſt, noch durch 2 dividirt einen ungeraden Quotienten giebt, ſo iſt ſie ſowohl gerademal gerade als auch gerademal ungerade.“ Dieſe Inconvenienz wird von Jamblichus in ſeinem Commentar über Nikomachus mehrmals heftig getadel [39]), nur ſcheint Jamblichus manchmal zu verlangen, daß Euklides ſich hätte nach des Nikomachus Definitionen richten ſollen. Nach Nikomachus ſind gerademal gerade nur die Potenzen von 2, d. h. diejenigen Zahlen, bei denen man durch fortgeſetztes Halbiren nicht eher als bei der Einheit auf einen ungeraden Quotienten kommt; dieſelben Zahlen nennt Euklides **IX**, 32. ἀρτιάκις ἄρτιοι μόνοι. Dieſen entgegengeſetzt ſind die gerad-ungeraden (ἀρτιοπέριττοι), deren Hälften bereits ungerade ſind. In der Mitte ſtehen die ungerad-geraden (περισσάρτιοι), deren Hälften zwar gerade ſind, bei denen man aber durch fortgeſetztes Halbiren einmal auf einen andern ungeraden Quotienten als auf 1 kommt. Demnach ſind die drei Klaſſen, in Zeichen ausgedrückt, folgende

ἀρ-

---

39) Ed. Tennulii p. 26. 27. 31. 34.

ἀρτιάκις ἄρτιοι . . . . 2^n
ἀρτιοπέριττοι . . . . . . $2\ (2m+1) = 4m+2$
περισσάρτιοι . . . . . . $2^{n+1}\ (2m+1)$.

Die letzteren eben ſind es, von denen Euklides ſagt, daß ſie, nach ſeiner Definition, ſowohl geradeſmal gerade als geradeſmal ungerade ſind. — Die erſte Klaſſe bildet eine geometriſche, die zweite eine arithmetiſche Reihe, die dritte aber mehre parallel laufende arithmetiſche Reihen. Die letzten findet man nämlich, wenn man die Reihe der ungeraden Zahlen erſt mit 4, dann mit 8 und ſo fort mit den höhern Potenzen von zwei, oder was daſſelbe iſt, wenn man die Glieder der zweiten Klaſſe, der ἀρτιοπέρισσοι, der Reihe nach mit jedem Gliede der erſten Klaſſe, der ἀρτιάκις ἄρτιοι, multiplicirt. Schreibt man ſich nun die aus den ſucceſſiven Multiplicationen hervorgehenden Gliederreihen eine unter die andere, ſo wird, nach Nikomachus, folgende wunderbare Erſcheinung ſich zeigen: Die Horizontalreihen haben die Eigenſchaft der gerad-ungeraden Zahlen, daß nämlich die Summe der äußern Glieder gleich iſt dem doppelten mittlern, wenn die Anzahl ungerade, oder gleich der Summe der beiden mittlern, wenn die Anzahl gerade iſt; die Verticalreihen dagegen theilen mit den geradeſmal geraden Zahlen die Eigenthümlichkeit, daß das Product der beiden äußern Glieder unter denſelben Bedingungen entweder gleich dem Quadrat des mittlern oder gleich dem Product der beiden mittleren Glieder iſt; daher kommen dieſer Zahlenklaſſe die Eigenſchaften jener beiden Klaſſen zugleich zu, aus denen ſie gemiſcht iſt [40]).

---

40) Kap. 10. am Ende: Ὅταν δὴ τοὺς ἐξ ἑκάστου πολλαπλασιασμοῦ ἐν ἰδίῳ στίχῳ ἐντάξῃς, παραλλήλους ποιούμενος τοὺς στίχους, φανήσεταί σοι θαυμαστῶς· κατὰ μὲν τὸ πλάτος συμβαῖνον τὸ τῶν ἀρτιοπερισσῶν (leg. ἀρτιοπερίσσων) ἰδίωμα, ὅτι ἀεὶ τῶν ἄκρων ὁ μέσος ὑποδιπλάσιος, εἰ εἷς εἴη, εἰ δὲ δύο μέσοι, ἴσοι κατὰ σύνθεσιν· κατὰ δὲ τὸ μῆκος τὸ τῶν ἀρτιάκις ἀρτίων· τὸ γὰρ ὑπὸ ἴσον τῷ ἀπὸ, εἰ μία εἴη μεσότης, ἢ τῷ ὑπὸ, εἰ δύο εἴησαν· ὥστε τὰ ἀμφοτέρων ἰδιώματα τούτῳ μόνῳ συμβέβηκεν, ὡς ὄντι φυσικῷ μίγματι αὐτῶν. Ich habe dieſe Stelle beſonders aus philologiſchen Rückſichten hier abgeſchrieben. Zuerſt habe ich πολλαπλασιασμοῦ, welches Aſt auf Autorität eines Codex in πολλαπλασιασμοὺς verwandelt hat, als ganz gewiß allein richtig wiederhergeſtellt. Eine ganz unglückliche Conjectur aber hat Aſt gemacht, indem er die elliptiſchen, aber ganz klaren Worte τὸ γὰρ ὑπὸ ἴσον τῷ ἀπὸ . . . ἢ τῷ ὑπὸ ergänzt und reſpective corrumpirt in τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ (!) μέσου . . . ἢ τῷ

Kap. 11 — 13. Wie die geraden, ſo laſſen ſich auch die ungeraden Zahlen in drei Klaſſen theilen. Dieſe drei Klaſſen (εἴδη) ſind die Primzahl (bei Nikomachus und Theon von Smyrna immer πρῶτος καὶ ἀσύνθετος, bei Euklides bloß πρῶτος), die zuſammengeſetzte Zahl (δεύτερος καὶ σύνθετος, bei Euklides bloß σύνθετος), und in der Mitte zwiſchen beiden diejenige Klaſſe, deren Zahlen an und für ſich zuſammengeſetzte, in Bezug auf eine andere Zahl aber Primzahlen ſind. Dieſe Eintheilung leidet an weſentlichen Mängeln, weil erſtens die dritte Klaſſe ſämmtliche Zahlen der zweiten Klaſſe mit in ſich begreift, zweitens, weil nicht abzuſehen iſt, warum die Zahlen der zweiten und dritten Klaſſe durchaus un-

---

ὑπὸ τῶν μέσων. Der Ausdruck ὁ ὑπὸ τῶν — iſt das Product zweier Zahlen, ὁ ἀπὸ τοῦ — iſt das Quadrat einer Zahl, aber ὁ ὑπὸ μέσου hat gar keinen Sinn. Für dieſen ſtrenge geſchiedenen Gebrauch des ὑπὸ und ἀπὸ Beiſpiele anzuführen, iſt unnütz; Euklides und Diophantus liefern deren auf jeder Seite. Aber auch dafür giebt es Beiſpiele, daß beide Präpoſitionen mit dem Artikel abſolut für Product und Quadrat geſetzt werden, wenn die bezüglichen Zahlen ſich von ſelbſt verſtehen. So heißt es bei Diophant III, 17. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. πάντων δὲ δύο τετραγώνων κατὰ τὸ ἑξῆς ὁ ὑπὸ προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον d. h. Man ſoll drei Zahlen der Art finden, daß das Product von je zweien zur Summe derſelben beiden addirt, ein Quadrat wird; und ferner von je zweien dieſer Quadrate das Product ſammt der Summe ein Quadrat werde. Eben ſo IV, 6: ἐπιτίθεμαι δύο ἀριθμούς, ὧν ὁ ὑπὸ ἐστι μ̄ο ϛ. Desgleichen IV, 14. 17. Und ganz in derſelben Verbindung, wie an unſerer Stelle haben wir die Formel noch einmal bei Nikomachus II, 19, wo es ebenfalls von der continuirlichen Proportion heißt τὸ ὑπὸ ἴσον τῷ ἀπὸ, und wo Aſt eben ſo ungeſchickt, wie an dieſer Stelle, corrigirt τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ (!!) τοῦ μέσου. Jedenfalls hätte Aſt der Umſtand, daß an beiden Stellen ſämmtliche Handſchriften übereinſtimmten, vorſichtig machen ſollen. Camerarius in ſeiner Explicatio in Nicom. (bei Tennulius Ausg. des Jamblichus p. 35) hat dieſe zweite Stelle gar nicht verſtanden. Er ſagt: Quod autem ait autor: καὶ ἐπὶ πασῶν (δὲ) τῶν συζυγιῶν τὸ ὑπό ἴσον τῷ ἀπὸ etc., quae latine interpretari etsi perquam difficile fuit, sumus tamen conati hoc modo: Atque in omnibus illis copulationibus, aequale reperitur ab aliquibus, et id quod ex aliquo existit. Die Worte heißen ganz einfach: Das Product (nämlich der äußeren Glieder, was ſich von ſelbſt verſteht) iſt gleich dem Quadrat (des mittleren Gliedes). — Dagegen muß bei Nikomachus II, 24 (p. 142) in den Worten κἂν μὴ συνημμένοι, ἀρτιοταγεῖς δὲ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῶν μέσων für ἀπὸ jedenfalls ὑπὸ geleſen werden, obgleich Aſt in den Anmerkungen keiner andern Leſeart erwähnt.

gerade Zahlen ſein ſollen, was die der erſten Klaſſe allerdings, mit Ausnahme der Zahl 2, immer ſind, drittens und hauptſächlich aber, weil die dritte (Klaſſe kann man eigentlich nicht ſagen) Bezeichnung gar nicht hieher gehört. Nikomachus ſagt nämlich am Anfange des Kap. 17: Προτετεχνολογημένου δὲ ἡμῖν ἐν τοῖς ἄνω περὶ τοῦ καθ' αὑτὸ ποσοῦ, νῦν μετερχώμεθα καὶ ἐπὶ τὸ πρός τι. „Nachdem ich in den vorigen Abſchnitten die Vorkenntniſſe in Betreff der Größe an und für ſich gegeben habe, gehe ich jetzt zu der relativen Größe über.“ Nun iſt aber die Eigenſchaft einer Zahl, vermöge deren ſie nach unſerm Kunſtausdruck relative Primzahl iſt, doch ſicher keine an ihr abſolut haftende, ſondern eine erſt in der Vergleichung mit andern Zahlen ſich herausſtellende Eigenſchaft; es gehört alſo dieſes Merkmal durchaus nicht als Eintheilungsgrund in eine auf ihre ſubjectiven Eigenſchaften gegründete Klaſſification der Zahlen. Dergleichen Inconvenienzen führt das unſelige Streben nach Conſequenz herbei; Nikomachus hätte ſicherlich dieſen Fehler nicht begangen, wenn er nicht, der Analogie wegen, durchaus drei Theile hätte herausbringen wollen. Da läßt ſich ſchon eher die wenngleich ebenfalls unnöthige Eintheilung von Pſellus hören (Ed. Xylander p. 3): Τῶν δὲ περιττῶν οἱ μέν εἰσι πρῶτοι, οἱ δὲ σύνθετοι . . . μέσοι δὲ οἱ μεταξὺ τούτων, οἱ μήτε μόνῃ μονάδι, μήτε δυσὶν ἢ πλείοσι καταμετρούμενοι ἀριθμοῖς, ἀλλ' ἑνὶ μόνῳ ἀριθμῷ μετρούμενοι, ὡς ὁ ἐννέα τριάδι, ὁ εἰκοσιπέντε πεντάδι, ὁ τεσσαρακονταεννέα ἑπτάδι, καὶ ὅσοι τούτοις παρόμοιοι, das heißt, die ungeraden Quadratzahlen. Übrigens giebt Nikomachus im Kap. 13. die oben mitgetheilte Methode des Eratoſthenes zur Aufſuchung der Primzahlen, und die Methode, die ſchon Euklides lehrt, zu unterſuchen, ob zwei gegebene Zahlen zu einander Primzahlen ſeien oder nicht, und im letztern Falle, welches das größte gemeinſchaftliche Maaß beider ſei.

Kap. 14 — 16. Unter den geraden Zahlen ſind einige übervollſtändig (ὑπερτελεῖς), andere unvollſtändig oder mangelhaft (ἐλλιπεῖς), und mitten inne ſtehen die vollſtändigen Zahlen (τέλειοι, Theol. III. p. 15. auch ἴσοι genannt). Auch hier leuchtet nicht ein, warum gerade nur unter den geraden Zahlen übervollſtändige und unvollſtändige ſein ſollen. Übrigens ſetzt Nikomachus zu der Euklidiſchen Theorie nichts Neues hinzu, außer dem Namen der ὑπερτελεῖς und ἐλλιπεῖς.

Kap. 17. „Nachdem ich bisher die Vorkenntniſſe in Betreff

der Größe an und für ſich gegeben habe, gehe ich jetzt zu der Größe in ihrer Beziehung zu andern über. Die Beziehung einer Größe auf eine andere iſt im Allgemeinen urſprünglich zwiefach, Gleichheit und Ungleichheit. Über die Gleichheit läßt ſich weiter nichts ſagen, weil von zwei gleichen Größen nicht die eine ſo, die andere anders beſchaffen ſein kann. Das Ungleiche aber iſt zwiefach, es hat ein Größeres und ein Kleineres. Nach der verſchiedenen Art der Abhängigkeit von einander hat nun ſowohl die größere als die kleinere zweier Größen andere Namen. Und zwar werden bei jeder von beiden fünf Arten von Beziehungen unterſchieden.“ Dieſe fünf Beziehungen oder Verhältniſſe (Nikomachus braucht nicht das Wort λόγος, ſondern εἶδος) ſind der Gegenſtand der folgenden ſechs Kapitel.

Kap. 18. Von zwei Zahlen, deren eine die andere mehr als einmal genau ganz in ſich enthält, heißt die größere πολλαπλάσιος (multiplex, das Vielfache), die kleinere ὑποπολλαπλάσιος (submultiplex, Theil). Davon werden nun für beſtimmte Zahlen die Adjectiva gebildet διπλάσιος, τριπλάσιος u. ſ. w. und die Gegenſätze davon ὑποδιπλάσιος u. ſ. w.

Kap. 19. Von zwei Zahlen, deren eine die andere einmal ganz, und außerdem noch einen Theil derſelben in ſich enthält, heißt die größere ἐπιμόριος (superparticularis), die kleinere ὑπεπιμόριος (subsuperparticularis), das heißt, die größere Zahl verhält ſich zu der kleineren, wie $p + 1$ zu p. Die für beſtimmte Zahlenwerthe gebildeten Namen ſind nun

$\frac{3}{2}$ ἡμιόλιος (sexquialter)	$\frac{2}{3}$ ὑφημιόλιος
$\frac{4}{3}$ ἐπίτριτος (sexquitertius)	$\frac{3}{4}$ ὑπεπίτριτος
$\frac{5}{4}$ ἐπιτέταρτος u. ſ. w.	$\frac{4}{5}$ ὑπεπιτέταρτος u. ſ. w.

Nikomachus erläutert die Sache durch folgenden Apparat. Er giebt eine Tabelle, deren erſte Horizontalreihe die Reihe der natürlichen Zahlen, die zweite die doppelten, die dritte die dreifachen der erſten Zahlenreihe enthält, u. ſ. w., welches alſo die einfache Multiplicationstafel iſt. Hier iſt jede Zahl einer unteren Reihe ein πολλαπλάσιον (Vielfaches) der entſprechenden Zahl in der erſten Reihe. Dagegen ſtehen je zwei auf einander folgende Reihen, mit Ausnahme der erſten beiden, zu einander in dem Verhältniſſe, daß die Zahlen der untern die ἐπιμόριοι der obern, dagegen die Zahlen der obern die ὑπεπιμόριοι der nächſtfolgenden ſind. Auch die folgenden Ver-

hältniſſe finden in dieſer Tafel, bei der wir uns nicht länger aufhalten wollen, ihre Anwendung.

Kap. 20. 21. Wenn eine Zahl eine andere einmal ganz und außerdem noch mehre Theile derſelben in ſich enthält, ſo heißt das Verhältniß der größern zur kleinern ἐπιμερής (superpartiens), das umgekehrte ὑπεπιμερής (subsuperpartiens). Nach dieſer Definition begreift das Verhältniß der ἐπιμερεῖς die allgemeine Form $2m + n : m + n$ in ſich. Es iſt aber zu bemerken, daß die für beſtimmte Zahlen gebildeten Namen bei den Griechen wie bei den Römern immer vorausſetzen, daß in der gegebenen Formel $n = 1$ iſt, ſo daß, wenn die kleinere Zahl 1 iſt, die größere $1 + \frac{m}{m + 1}$ wird. Die einzelnen Namen ſind dann

$1 + \frac{2}{3}$ ἐπιδιμερής, superbipartiens
$1 + \frac{3}{4}$ ἐπιτριμερής, supertripartiens
$1 + \frac{4}{5}$ ἐπιτετραμερής, superquadripartiens

u. ſ. w., wo alſo nur der Zähler m ausgedrückt wird. Die umgekehrten Verhältniſſe heißen dann ὑπεπιδιμερής u. ſ. w. Aber Nikomachus theilt Kap. 21. und 23. eine andere Bildungsmethode dieſer Namen mit, derzufolge das allgemeine Verhältniß $1 + \frac{m}{m + n}$ ausgedrückt werden kann. Demzufolge heißen die bereits angeführten Verhältniſſe ἐπιδίτριτος, ἐπιτριτέταρτος, ἐπιτετράπεμπτος, und eben ſo kann man auch ſagen ἐπιτρίπεμπτος für $1 + \frac{3}{5}$, ἐπιτετραέβδομος für $1 + \frac{4}{7}$ u. ſ. w.

Die beiden folgenden Verhältniſſe ſind durch die Verbindung des erſten mit jedem der beiden andern entſtanden.

Kap. 22. Wenn eine Zahl eine andere mehr als einmal ganz, und außerdem noch einen Theil derſelben in ſich enthält, ſo heißt das Verhältniß der größern zur kleinern πολλαπλασιεπιμόριος, das umgekehrte ὑποπολλαπλασιεπιμόριος (lateiniſch multiplex superparticularis und multiplex subsuperparticularis). Das in dieſen Worten definirte Verhältniß iſt als $mn + 1 : n$. Bei den Namen für beſtimmte Zahlenwerthe geht der Werth des m in das πολλαπλάσιος, der Werth für n in das ἐπιμόριος ein, ſo daß die Namen ſich ſo geſtalten

$2 + \frac{1}{2}$ διπλασιεφήμισυς, duplex sexquialter
$2 + \frac{1}{3}$ διπλασιεπίτριτος, duplex sexquitertius
$2 + \frac{1}{4}$ διπλασιεπιτέταρτος, duplex sexquiquartus

$3 + \frac{1}{2}$ *τριπλασιεφήμισυς*, **triplex sexquialter**
$3 + \frac{1}{3}$ *τριπλασιεπίτριτος*, **triplex sexquitertius**
$3 + \frac{1}{4}$ *τριπλασιεπιτέταρτος*, **triplex sexquiquartus** u. ſ. w.

Kap. 23. Wenn eine Zahl eine andere mehr als einmal ganz und außerdem noch mehre Theile derſelben in ſich enthält, ſo heißt das Verhältniß der größern zur kleinern *πολλαπλασιεπιμερής*, das umgekehrte *ὑποπολλαπλασιεπιμερής* (lateiniſch **multiplex superpartiens** und **multiplex subsuperpartiens**). Die Namen der einzelnen Verhältniſſe für beſtimmte Zahlenwerthe, welche Nikomachus mittheilt, ſetzen immer voraus, daß in der allgemeinen Formel dieſes Verhältniſſes $p + \frac{m}{m+n} : 1$ $n = 1$ ſei. Die Namen ſind dann folgende

$2 + \frac{2}{3}$ *διπλασιεπιδιμερής*, **duplex sexquibipartiens**
$2 + \frac{3}{4}$ *διπλασιεπιτριμερής*, **duplex supertripartiens**
$3 + \frac{2}{3}$ *τριπλασιεπιδιμερής*, **triplex superbipartiens** u. ſ. w.

Es ließen ſich jedoch ebenſo, wie bei den Verhältniſſen der einfachen *ἐπιμερεῖς*, Namen bilden, welche Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{m}{m+n}$ ausdrückten.

Den Schluß dieſes Kapitels bildet die an allen dieſen verſchiedenen Verhältniſſen erprobte Nachweiſung des Satzes, daß aus der Gleichheit als einziger und urſprünglicher Quelle alle mannigfachen Geſtaltungen der Ungleichheit und deren Verſchiedenheiten hervorgehen. Denn wenn uns, ſagt Nikomachus, drei gleiche Zahlen z. B. drei Einheiten vorliegen, ſo entſtehen daraus zunächſt die *πολλαπλάσιοι*, ſodann die *ἐπιμόριοι*, drittens die *ἐπιμερεῖς*, u. ſ. w., indem man nach ganz feſten und unveränderlichen Geſetzen fortſchreitet. Dieſe Geſetze ſind folgende; den erſten Ausdruck (der neuen Reihe) macht man dem erſten (der drei vorliegenden), den zweiten der Summe des erſten und zweiten, den dritten der Summe des erſten, des doppelten zweiten und des dritten gleich. Denken wir uns alſo die urſprünglichen drei Einheiten

	1	1	1

und verfahren damit auf die vorgeſchriebene Weiſe, ſo wird die zweite Reihe

	1	2	4
die dritte	1	3	9
die vierte	1	4	16

und ſo fort; man erhält alſo durch Anwendung des vorgeſchriebenen Satzes aus dem Verhältniß der Gleichheit ſucceſſive alle Verhältniſſe der verſchiedenen Vielfachen. Schreiben wir uns nun irgend eine Reihe der Vielfachen umgekehrt hin, und bringen das allgemeine Geſetz in Anwendung, ſo erhalten wir das entſprechende Verhältniß aus der Reihe der ἐπιμόριοι.

Z. B. 4 2 1, die Reihe der Doppelten,
giebt 4 6 9, die Reihe der ἡμιόλιοι,
in welcher jedes Glied $1\frac{1}{2}$ des vorigen iſt, aus der Reihe der Dreifachen 9 3 1
erhalten wir 9 12 16, die ἐπίτριτοι, in denen jedes Glied $1\frac{1}{3}$ des vorigen iſt u. ſ. w. Gehen wir ferner von irgend einer Reihe der ἐπιμόριοι, umgekehrt hingeſchrieben, aus, ſo erhalten wir die entſprechenden ἐπιμερεῖς. Z. B.

9 6 4
9 15 25, wo jedes Glied $1\frac{2}{3}$ des vorigen iſt, und ebenſo, wenn man irgend eine andere Reihe der ἐπιμόριοι zu Grunde legt. Gehen wir dagegen von irgend einer Reihe der ἐπιμόριοι in gerader Ordnung aus, ſo erhalten wir die πολλαπλασιεπιμόριοι. So wird aus

4 6 9
4 10 25 nach dem Verhältniſſe $2\frac{1}{2}$,
aus 9 12 16
wird 9 21 49 nach dem Verhältniſſe $2\frac{1}{3}$.

Und endlich aus den ἐπιμερεῖς in gerader Ordnung erhalten wir die πολλαπλασιεπιμερεῖς, z. B.

aus 9 15 25
wird 9 24 64 nach dem Verhältniß von $2\frac{2}{3}$, und ebenſo die übrigen. So ſind denn alle dieſe verſchiedenen Verhältniſſe aus dem urſprünglichen Verhältniſſe der Gleichheit entwickelt worden. Nikomachus macht über dieſe Schemata noch die Bemerkung, daß immer die beiden äußern Glieder Quadratzahlen ſind und daß das mittlere das Product ihrer Wurzeln iſt; ferner daß in den beiden aus derſelben Reihe in gerader und umgekehrter Ordnung abgeleiteten Reihen das letzte größte Glied daſſelbe iſt. Dieſes iſt der Inhalt des erſten Buchs dieſer Arithmetik, welches im Ganzen wenig wiſſenſchaftlich Intereſſantes darbietet.

Zweites Buch.

Wie Nikomachus am Ende des erſten Buchs gezeigt hatte, daß alle fünf von ihm aufgeſtellten Verhältniſſe aus drei gleichen Terminis ſich herleiten laſſen, ſo lehrt er in den erſten fünf Kapiteln dieſes Buchs, daß umgekehrt alle gegebenen Verhältniſſe ſich auf das Verhältniß der Gleichheit als urſprüngliches Element zurückführen laſſen. „Da ein Element (στοιχεῖον) dasjenige iſt, aus welchem als Erſtem etwas zuſammengeſetzt und in welches als Letztes ein Ding aufgelöſt wird, ſo will ich zeigen, daß auch die Gleichheit ein Element der relativen Größe iſt (τοῦ πρός τι ποσοῦ). Nun haben wir gezeigt, wie alle Verhältniſſe aus der Gleichheit zuſammengeſetzt werden; es iſt alſo nur noch übrig darzuthun, daß auch die Auflöſung derſelben zuletzt immer auf die Gleichheit zurückführt.“

Kap. 3. lehrt uns aus jeder Reihe der Vielfachen alle Zahlen zu finden, die in dem gleichnamigen Verhältniſſe der ἐπιμόριοι ſtehen. Die Sache iſt einfach die. Man ſchreibt in eine Reihe irgend eine von 1 beginnende geometriſche Progreſſion, darunter ſchreibt man die Reihe der Summen von je zwei auf einander folgenden Gliedern, unter dieſe die zweite Summenreihe und ſo fort, ſo erhält man eine Tabelle, welche alle Zahlen enthält, die zu einander in demjenigen epimoriſchen Verhältniſſe ſtehen, welches dem Exponenten der urſprünglichen geometriſchen Progreſſion gleichnamig iſt. Gehen wir z. B. von den Potenzen von 2 aus, ſo erhalten wir ſämmtliche Zahlen, die gegen einander ἡμιόλιοι ($1\frac{1}{2}$) ſind. Das Schema geſtaltet ſich ſo

1	2	4	8	16	32
	3	6	12	24	48
		9	18	36	72
			27	54	108
				81	162
					243

Hier iſt jede Zahl gleich drei Halben der zunächſt über ihr ſtehenden; und ganz analog iſt es bei den übrigen Verhältniſſen.

Kap. 4. Wenn man ſo das Schema nach den fortlaufenden Potenzen irgend einer Zahl bildet, ſo bilden die Anfangsglieder der Summenreihen allemal die ſucceſſive Potenzenreihe der um 1 größeren Zahl.

Digitized by Google

1	n	n^2	n^3	n^4
	$n+1$	n^2+n	n^3+n^2	n^4+n^3
		n^2+2n+1	n^3+2n^2+n	$n^4+2n^3+n^2$
			n^3+3n^2+3n+1	$n^4+3n^3+3n^2+n$
				$n^4+4n^3+6n^2+4n+1$

Wir wollen uns aber bei dieſem Gegenſtande nicht länger aufhalten, ſondern zu dem folgenden viel intereſſanteren Sujet übergehen, nämlich zu der Theorie der **Polygonalzahlen**, welche ſich in der Arithmetik des Nikomachus (Kap. 6—20) zuerſt behandelt findet, und zwar in einer überraſchenden Vollſtändigkeit. Da die Pythagoräer Alles an Zahlen zu erläutern und zu veranſchaulichen pflegten [41]), ſo ſind die Anhänger dieſer Schule gewiß lange vor Nikomachus auf die Idee gekommen, die in ihre Einheiten zerlegten Zahlen in der Form verſchiedener geometriſcher Figuren anzuordnen, und ganz gewiß tritt bei Nikomachus die ſchon ſo weit ausgebildete Lehre der Polygonalzahlen nicht als eine neue Wiſſenſchaft auf. Aber wir haben Gründe zu glauben, daß Nikomachus wirklich zuerſt über dieſen Gegenſtand, ſo wie überhaupt über die Pythagoräiſche Zahlenlehre, geſchrieben hat. Tennulius und Fabricius bringen mehre Stellen aus alten Autoren bei, in welchen Nikomachus als derjenige bezeichnet wird, der die arithmetiſchen Lehren des Pythagoras zuerſt ſyſtematiſch geordnet und zu Papier gebracht hat [42]). Dieſe Abhandlung über die Polygonalzahlen iſt aber nicht bloß deshalb wichtig, weil ſie hier zum erſtenmal erſcheint, ſondern vornehmlich auch darum, weil wir dieſelbe als eine, ſei es nun mittelbare, ſei es unmittelbare, Vorarbeit und Quelle Diophant's anzuſehen haben, der nicht bloß in ſeiner Schrift über die Polygonalzahlen dieſen Gegenſtand berührt, ſondern denſelben durch ſein ganzes größeres Werk wie einen Goldfaden durchwebt. Ich will daher den Inhalt dieſer Kapitel ſo vollſtändig wie möglich angeben.

---

41) Vergl. darüber Tennulius, Notae in Jambl. p. 74.

42) Ebendaſ. Auctor Altercationis Synagogae et Ecclesiae cap. 1. *Arithmeticam Samius Pythagoras invenit, Nicomachus scripsit.* Isidorus orig. lib. 3. cap. 2. *Numeri disciplinam primum apud Graecos Pythagoram autumant conscripsisse (?); ac deinde a Nicomacho diffusius esse compositam.* — Vergl. Fabricii Bibl. Graeca T. V. p. 635. 636. (Ed. Harles.).

Kap. 6. Einleitung: „Zunächſt muß man anerkennen, daß jeder Buchſtabe, mit dem wir eine Zahl bezeichnen, z. B. ι für zehn, κ für zwanzig, λ für dreißig, durch menſchliche Einrichtung und Übereinkunft, nicht von Natur ein Zeichen dieſer Zahl iſt; die natürliche und ungekünſtelte und eben deswegen einfachſte Bezeichnung der Zahlen würde die Nebeneinanderſtellung der in jeder enthaltenen Einheiten ſein. So würde die Bezeichnung einer Einheit durch ein α das Zeichen für eins, die Hinſtellung zweier Monaden, das iſt zweier Alpha, neben einander, das Zeichen für zwei ſein, und ſo fort [43]). Denn nur durch eine ſolche Schrift und Bezeichnung könnte die Darſtellung der ſogenannten ebenen und körperlichen Zahlen erläutert und deutlich gemacht werden. Demnach wird die Einheit in das Verhältniß und in die Stelle des Puncts eintreten, indem ſie der Anfang der Dimenſionen und Zahlen, aber weder Dimenſion noch Zahl ſelbſt iſt, gleichwie der Punct der Anfang der Linie und Entfernung, nicht aber Linie und Entfernung.“

Es folgen nun noch einige Analogien und Vergleichungen zwiſchen Arithmetik und Geometrie, und darauf fährt der Verfaſſer im

Kap. 7. alſo fort: „Jede Zahl von 2 ab kann als lineäre Zahl (ἀριθμὸς γραμμικός) betrachtet werden; die erſte ebene Zahl (ἐπίπεδος) dagegen iſt die drei und darauf alle folgenden.

Kap. 8. Eine dreieckige Zahl (τρίγωνος) iſt eine ſolche, welche in Einheiten aufgelöſt ſich in der Geſtalt eines gleichſeitigen Dreiecks darſtellen läßt. Die Einheit iſt eine dreieckige Zahl *δυνάμει*, nicht aber *ἐνεργείᾳ*, das heißt, ihrem Weſen nach, inſofern die allgemeinen Regeln auch auf ſie anwendbar ſind, nicht aber in der Wirklichkeit, weil ſie ſich nicht als Dreieck darſtellen läßt. Dieſen Unterſchied macht Nikomachus bei allen folgenden Polygonalzahlen.

Die dreieckigen Zahlen entſtehen durch die ſucceſſive Summirung der natürlichen Zahlenreihe (Γεννᾶται δὲ ἀπὸ τοῦ φυσικοῦ

---

43) Nikomachus ſagt nicht, daß die Griechen ſich jemals dieſer Methode wirklich bedient haben. Das thut aber Jamblichus p. 80: Ἰστέον γὰρ ὅτι (fehlt bei T.), ὡς τὸ παλαιὸν φυσικώτερον, οἱ πρόσθεν ἐσημαίνοντο τὰς τοῦ ἀριθμοῦ ποσότητας ἀναλύοντες εἰς μονάδας, ἀλλ᾽ οὐχ, ὥσπερ οἱ νῦν, συμβολικῶς. Beruht dieſe Nachricht auf bloßer Conjectur, oder auf Mißverſtändniß der Stelle bei Nikomachus, oder auf Kenntniß von Thatſachen? Das Letzte iſt bei einem ſo ſpät lebenden Autor, wie Jamblichus, kaum denkbar.

ἀριϑμοῦ στοιχηδὸν ἐκτεϑέντος, καὶ ἀεὶ ἀπ' ἀρχῆς τῶν συνεχῶν κατὰ ἕνα συντιϑεμένων). Die Seite des Dreiecks iſt gleich der Anzahl der addirten Zahlen.

Kap. 9. Hierauf folgt zunächſt die viereckige (Quadrat-) Zahl (τετράγωνος), die ſich in Geſtalt eines Quadrats darſtellen läßt. Auch dieſe Zahlen entſtehen durch Addition, aber nicht der natürlichen um 1 fortſchreitenden, wie die dreieckigen, ſondern der eine um die andere geſetzten, das heißt der ungeraden Zahlen (Γεννᾶται δὲ καὶ οὗτος ἀπὸ τοῦ στοιχηδὸν ἐκτεϑέντος φυσικοῦ ἀριϑμοῦ, τῇ μονάδι ἐπισωρευϑέντων οὐκέτι τῶν ἐφεξῆς τοῖς ἐφεξῆς, ὡς δέδεικται ἐπὶ τῶν τριγώνων, ἀλλὰ τῶν παρ' ἕνα κειμένων πάντων, τουτέστι, τῶν περισσῶν).

Kap. 10. Die fünfeckige Zahl (πεντάγωνος). Sie entſteht durch Addition der von 1 anfangenden und dann immer zwei überſpringenden Zahlenreihe (ἐπισωρεύονται ἀλλήλοις εἰς πενταγώνου γένεσιν οἱ ἀπὸ μονάδος δύο διαλείποντες ἐφ' ὁσονοῦν, τουτέστιν, οἱ τριάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντες).

Kap. 11. Die ſechseckigen, ſiebeneckigen und folgenden Zahlen gehen auf ähnliche Weiſe hervor aus der Reihe der natürlichen Zahlen, indem man zu dem Abſtande derſelben immer 1 hinzufügt. — Die arithmetiſche Reihe, deren Summenglieder irgend eine Klaſſe der Polygonalzahlen hergeben, heißt die Reihe der γνώμονες dieſer Polygone, ein Ausdruck, der, wie dieſe ganze Theorie, bildlich von der Geometrie hergenommen iſt, indem Nikomachus und ebenſo alle folgenden Arithmetiker die Euklidiſche Definition (II, 2) vermöge einer einfach ſich darbietenden Analogie von dem Parallelogramm auf alle geradlinigen Figuren ausdehnen [44]). Demnach giebt unſer Autor folgende allgemeine Regel zur Bildung der Polygonal-

---

44) Nikomachus braucht das Wort γνώμων, γνώμονες in dem angedeuteten Sinne, ohne es zu definiren. Jamblichus p. 82. erklärt es ſo: εἴρηται δὲ γνώμων, ὁ αὐξητικὸς ἑκάστου εἴδους τῶν πολυγώνων, κατὰ πρόσϑεσιν τὸ αὐτὸ εἶδος διαφυλάττων. — Theon von Smyrna Kap. 23: πάντες δὲ οἱ ἐφεξῆς ἀριϑμοὶ ἀπογεννῶντες τριγώνους ἢ τετραγώνους ἢ πολυγώνους γνώμονες καλοῦνται. Undeutlicher iſt Asklepius (bei Bullialdus ad Theonem Smyrn. p. 239): γνώμονας καλοῦμεν τοὺς μετροῦντας ἀριϑμοὺς, ἀμέλει ἕως τῆς νῦν κἂν τὸ μετροῦν γνώμονα προσαγορεύομεν.

zahlen jeder Ordnung: ἑκάστου πολυγώνου τοὺς γνώμονας διαφέρειν ἀλλήλων δυάδι ἐλαττόνως ἢ κατὰ τὴν ἐν τῷ ὀνόματι ποσότητα τῶν γωνιῶν, „die Gnomones eines jeden Polygons ſtehen von einander um 2 weniger ab, als die Anzahl der im Namen ausgedrückten Winkel beträgt," d. h. die conſtante Differenz der Gnomonreihe der $n$eckigen Zahlen beträgt $n - 2$. Merkwürdig iſt, daß Diophant[45]) dieſen Satz dem Hypſikles zuſchreibt, da doch Hypſikles nach der ſeit Fabricius allgemein angenommenen Meinung (worüber im folgenden Kapitel ein Mehreres) erſt gegen das Ende des zweiten Jahrhunderts gelebt hat. Indeß iſt dieſe ſcheinbar von der Wahrheit abweichende Angabe daraus zu erklären, daß Diophant den Satz des Nikomachus etwas erweitert ausſpricht, und daß vielleicht dieſe Erweiterung deſſelben von Hypſikles herrührt.

Kap. 12. Nach dieſen allgemeinen Regeln, die Bildung der Polygonalzahlen betreffend, folgen nun einige beſondere Eigenthümlichkeiten derſelben. Wie jede viereckige Figur durch die Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt wird, ſo läßt ſich jede viereckige Zahl in zwei, aber auf einander folgende dreieckige auflöſen, und umgekehrt, je zwei auf einander folgende dreieckige Zahlen geben zur Summe eine Quadratzahl, z. B. $1 + 3 = 4$, $3 + 6 = 9$, $6 + 10 = 16$ u. ſ. w.

Aus einer viereckigen Figur wird, wenn man ihr eine dreieckige anſetzt, eine fünfeckige; ebenſo in Zahlen, nur mit der Beſchränkung, daß die Seite der dreieckigen Zahl um 1 kleiner ſein muß, als die Seite der viereckigen, zu der ſie addirt wird, z. B. $4 + 1 = 5$, $9 + 3 = 12$, $16 + 6 = 22$ u. ſ. w.

Ebenſo werden ſechseckige Zahlen als Summen einer fünfeckigen und einer dreieckigen Zahl dargeſtellt, und ſo fort. Der Überſicht wegen ſchreibe man ſich die Polygonalzahlen jeder Ordnung in Parallelreihen unter einander,

45) **De Numeris Polyg. prop. 8. pag. 18. Ed. Bachet.** — S. 329. der Schulzſchen Überſetzung.

dreieckige	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
viereckige	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
fünfeckige	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
ſechseckige	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
ſiebeneckige	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235

u. ſ. w., ſo finden hier folgende Beziehungen Statt:

1) Jedes Polygon iſt gleich der Summe des zunächſt über ihm ſtehenden und des Dreiecks der um 1 kleineren Seite, z. B. das Siebeneck 148 iſt gleich dem Sechseck 120 plus dem Dreieck 28. (Ἵνα ἕκαστος πολύγωνος σύστημα ᾖ τοῦ τε ὑπὲρ αὐτὸν ὁμοταγοῦς πολυγώνου καὶ τοῦ ἀνωτάτου τριγώνου τοῦ μονάδι ἐλάττονος ὁμοταγοῦς).

2) Die Verticalreihen ſind arithmetiſche Progreſſionen, deren conſtante Differenz das vorhergehende Dreieck iſt.

Kap. 13. „Hierauf nun iſt leicht einzuſehen, was eine körperliche Zahl (στερεὸς ἀριθμός) iſt und wie eine ſolche gleichſeitig wird.“ Nach einer kleinen Digreſſion über Dimenſionen und über die Natur der Pyramide, als des einfachſten unter den Körpern, fährt er ſo fort: „Wie nun die Polygonalzahlen durch Summation der einfachen arithmetiſchen Reihen entſtanden, auf dieſelbe Weiſe entſtehen, wenn man die ebenen Polygonalzahlen zu einander addirt und ſie gleichſam über einander ſchichtet, die einer jeden Klaſſe gleichnamigen Pyramiden, die mit dreieckiger Baſis von den dreieckigen Zahlen, die mit viereckiger Baſis von den viereckigen u. ſ. w. Es iſt natürlich, daß man die größere Zahl ſich zu unterſt denkt; denn ſie ſtellt die Baſis vor; die zunächſt kleinere über ihr und ſo fort, bis die Einheit auf der Spitze erſcheint und gleichſam in einem Punct die Vollendung der Pyramide abſchwänzt. (Ἕως ἂν ἡ μονὰς ἐπὶ τῇ κορυφῇ φανῇ καὶ ὡσανεὶ εἰς σημεῖον ἀπομειουρίσῃ τὴν τελείωσιν τῆς πυραμίδος).“

Kap. 14. Wenn man den Bau einer arithmetiſchen Pyramide von unten, das heißt, von dem größten Polygon beginnt, aber nicht bis zur Einheit fortſetzt, ſondern eher abbricht, ſo entſteht eine abgeſtumpfte Pyramide, welche Nikomachus, wenn bloß die Einheit fehlt, κόλουρος, wenn die Einheit und die nächſtfolgende Polygonalzahl fehlt, δικόλουρος, ähnlich τρικόλουρος u. ſ. w. nennt.

Kap. 15. Es giebt noch andere Körperzahlen als Pyramiden,

nämlich Kubi, balkenförmige (δοκίδες), ziegelförmige (πλινθίδες), keilförmige (σφηνίσκοι), kugelförmige (σφαιρικοί), Parallelepipeda. Die Quadratzahlen haben in der Ebene zwei gleiche Dimenſionen; giebt man ihnen noch eine dritte den vorigen gleiche Dimenſion, das heißt, multiplicirt man jede der Quadratzahlen noch einmal in ihre Seite, ſo erhält man die Kubikzahlen.

Kap. 16. Dem Kubus, als aus drei gleichen Dimenſionen gebildet, ſtehen entgegen die aus drei ungleichen Dimenſionen gebildeten Zahlen, wie 2 mal 3 mal 4. Solche Körper nennt man einfach ſchiefe (σκαληνά); Einige nennen ſie Keile (σφηνίσκους), Andere Pfähle (σφηκίσκους), noch Andere Stufen- oder Altarzahlen (βωμίσκους [46])). In der Mitte zwiſchen beiden Extremen ſtehen die Zahlen, welche Parallelepipeda genannt werden, deren entſprechende ebene Zahlen die ἑτερομήκεις (ſ. das folg. Kap.) ſind, gleichwie die den Kubikzahlen entſprechenden die Quadratzahlen.

Kap. 17. Eine Zahl wird ἑτερομήκης (in den lateiniſchen Überſetzungen **altera parte longior**) genannt, wenn ihre Länge und ihre Breite um die Einheit verſchieden ſind, (οὐδὲ τὸ μῆκος τῷ πλάτει ἴσον, ἀλλὰ παρὰ μονάδα), das heißt, die Heteromekes ſind die Producte aus je zwei auf einander folgenden Zahlen, $n(n+1)$ [47]).

---

46) Ἕτεροι δὲ τοὺς αὐτοὺς βωμίσκους προσαγορεύουσιν ἀπὸ οἰκείας εἰκόνος· οἱ γὰρ παλαιότροποι βωμοί, μάλιστα δὲ οἱ ἰωνικοί, οὔτε τὸ πλάτος τῷ βάθει οὔτε συναμφότερα τῷ μήκει ἴσα ἔχουσιν οὔτε τὴν βάσιν τῇ κορυφῇ, ἀλλὰ πάντη εἰσὶν ἐξηλλαγμένοι ταῖς διαστάσεσιν.

47) *Theon Smyrn.* **cap. 13. p. 40. (Ed. Bullialdi):** ἑτερομήκεις δὲ οἱ τοιοῦτοι κέκληνται, ἐπεὶ πρώτην ἑτερότητα τῶν πλευρῶν ἡ προσθήκη τῇ ἑτέρᾳ πλευρᾷ τῆς μονάδος ποιεῖ. — Jamblichus nimmt hier wieder Gelegenheit zu einem Ausfall gegen Euklides, welcher ſeiner Meinung nach dieſe Unterſchiede nicht ſcharf genug auffaßt; es heißt bei ihm p. 105. 106. ſo: Ὡς οὖν ἀπὸ πάντων τῶν τέσσαρας πλευράς τε καὶ γωνίας ἐχόντων σχημάτων συστείλαντες τὸ ὄνομα τετράγωνον ἐκαλέσαμεν, τὸν πάσας πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἔχοντα, οὕτω καὶ ἑτερομήκη καλέσομεν ἀπὸ πάντων τῶν τῆς ἑτερότητος εἰδῶν κατὰ τὰς πλευρὰς τὸν ἐγγυτάτω τῆς ἑτερότητος τὴν παρατροπὴν ἐμφήναντα, τουτέστι, τὸν παρὰ μονάδα τὸ ἕτερον ἐν τοῖς μήκεσιν ἐσχηκότα, ἀντιδιεσταλμένως λεγόμενον τῷ αὐτομήκει. Ὅπερ πάλιν οὐ συνιδὼν ὁ Εὐκλείδης συνέχει κἀπὶ τούτῳ τὴν τῆς θεωρίας ἐξαλλαγὴν καὶ ποικιλίαν, οἰηθεὶς ἑτερομήκη εἶναι τὸν ἁπλῶς ὑπὸ διαφόρων δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιασθέντων γινόμενον, καὶ μὴ διακρινόμενος αὐτοῦ προμήκη, ὅπερ εἰ συγχωρήσειέ τις αὐτῷ, συμ-

Wenn aber die Seiten um mehr als eins von einander verſchieden ſind, ſo wird eine ſolche Zahl nicht eigentlich mehr ἑτερομήκης, ſondern προμήκης (numerus oblongus) genannt. Nach dieſer eingeſchobenen Definition des oben gebrauchten Ausdrucks fährt der Verfaſſer in der nähern Beſtimmung der verſchiedenen Körperzahlen fort, welche er in ſehr deutlichen und kurzen Definitionen folgendermaßen angiebt: Die drei Dimenſionen einer Körperzahl ſind entweder

1) alle drei gleich, dann ſind die Zahlen ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις; dieſe Klaſſe begreift die Kubikzahlen, die auch ſchon Euklides (VII. def. 19.) ebenſo definirt, und dem analog die Quadratzahlen ἰσάκις ἴσοι.
2) alle drei ungleich, ἀνισάκις ἄνισοι ἀνισάκις; hieher gehören die oben erwähnten σφηνίσκοι.
3) zwei einander gleich, und die dritte
   a) kleiner, $m^2 (m - n)$, ἰσάκις ἴσοι ἐλαττονάκις; hieher gehören die ziegelförmigen Zahlen, πλινθίδες.
   b) größer, $m^2 (m + n)$, ἰσάκις ἴσοι μειζονάκις; dieſe Klaſſe wird gebildet von den balkenförmigen Zahlen (δοκίδες), nach Jamblichus (p. 134) auch στηλίδες, Pfeiler, genannt.

Die Zahlen, deren letzte Ziffern 1, 5, 6 ſind, haben die Eigenſchaft, daß alle ihre Potenzen immer mit eben dieſen Ziffern endigen, daher heißen ſie bildlich kreisförmige, oder auch kugelförmige Zahlen. Oder um die Vorſtellung räumlicher Dimenſionen beizubehalten, nennt man auch die Quadrate ſolcher Zahlen kreisförmige, die Kubi derſelben kugelförmige Zahlen. Indeß beruhen dieſe Benennungen auf einem ganz andern Princip, als die der bisher behandelten figurirten Zahlen. Bei den Kreis- und Kugelzahlen iſt von bildlicher Darſtellung und Anordnung der Einheiten nicht mehr die Rede.

Kap. 18 — 20. Vergleichung der ἑτερομήκεις, der προμήκεις und der Quadratzahlen, welche jenen analog ἰδιομήκεις oder

---

βήσεται τὰ ἐναντία ἀσυνύπαρκτα φύσει ὄντα, ἅμα καὶ περὶ τὸ αὐτὸ εὑρίσκεσθαι. Τὸν αὐτὸν γὰρ ἀριθμὸν τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ ἑτερομήκη ἀποφαίνει ὁ ἐκείνου λόγος, οἷον τὸν λϛ καὶ τὸν ιϛ καὶ ἑτέρους πολλούς· ὅπερ ἴσον ἂν εἴη τῷ τὸν περισσὸν ἀριθμὸν ταὐτὸν εἶναι τῷ ἀρτίῳ.

ταυτομήκεις genannt werden könnten, unter einander. Beſonders freut Nikomachus ſich im Kap. 19. viele Analogien und Beziehungen zwiſchen den Heteromekes und den Quadratzahlen entdeckt zu haben. Man ſchreibe, ſagt er, in zwei Parallelreihen unter einander die Quadratzahlen und die Heteromekes,

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
2	6	12	20	30	42	56	72	90	110

ſo finden zwiſchen beiden folgende Beziehungen Statt:

1) Die Zahlen der zweiten Zeile ſind von der zweiten an der Reihe nach die verſchiedenen ἐπιμόριοι der über ihnen ſtehenden Zahlen der erſten Zeile; 6 : 4 ἡμιόλιος, 12 : 9 ἐπίτριτος, 20 : 16 ἐπιτέταρτος u. ſ. w. Die Sache iſt daher klar, weil immer unter dem Gliede n^2 der erſten Zeile $n\ (n + 1)$ in der zweiten ſteht; alſo $n\ (n + 1) : n^2 = n + 1 = n$.
2) Die Differenzen der correſpondirenden Zahlen beider Zeilen bilden der Reihe nach die natürlichen Zahlen, $2 - 1 = 1$, $6 - 4 = 2$, $12 - 9 = 3$, $20 - 16 = 4$; im Allgemeinen $n\ (n + 1) - n^2 = n$.
3) Vergleicht man dagegen jedes Glied der erſten Reihe mit dem vorhergehenden Gliede der zweiten Reihe, ſo ſind die Verhältniſſe dieſelben wie unter No. 1, nämlich 4 : 2 iſt ein Vielfaches, wie 2 : 1, 9 : 6 ein ἡμιόλιος, wie 6 : 4, 16 : 12 ein ἐπίτριτος u. ſ. w. Daraus folgt, daß jedes Glied der zweiten Reihe die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen dem darüber ſtehenden, und dem folgenden Gliede der erſten Reihe iſt, $n^2 : n\ (n + 1) = n\ (n + 1) : (n + 1)^2$ [48]).
4) Zwiſchen je zwei Quadratzahlen liegt allemal ein, aber auch nur ein Heteromekes.
5) Die Differenzen der Quadrate geben die Reihe der ungeraden, die der Heteromekes die Reihe der geraden Zahlen.
6) Die Summe zweier auf einander folgenden Glieder der erſten Reihe nebſt dem Doppelten des unter dem erſten derſelben liegenden Gliedes der zweiten Reihe iſt allemal eine Quadratzahl. Desgleichen iſt die Summe zweier an einander liegenden Glie-

48) Über die an dieſer Stelle befindlichen Worte τὸ ὑπὸ ἴσον τῷ ἀπὸ ſ. die Note 40 dieſes Kapitels.

Glieder der zweiten Reihe nebſt dem Doppelten des über dem zweiten derſelben liegenden Gliedes der erſten Reihe eine Quadratzahl. Zwei ſolche Gliederpaare, in allgemeinen Zeichen ausgedrückt, ſind
in der Reihe der Quadrate $n^2 \quad (n + 1)^2$
in der Reihe der Heteromekes $n\,(n + 1) \quad (n + 1)\,(n + 2)$,
demnach iſt $n^2 + (n + 1)^2 + 2n\,(n + 1) = (2n + 1)^2$,
dagegen $n\,(n + 1) + (n + 1)\,(n + 2) + 2\,(n + 1)^2$
$= (n + 1)\,[n + (n + 2) + 2\,(n + 1)]$
$= 4\,(n + 1)^2$.

7) Die ſucceſſive Addition von je zwei Gliedern beider Reihen, wenn man von dem erſten Gliede der erſten Reihe zum erſten Gliede der zweiten Reihe, von dieſem zum zweiten der erſten Reihe, von da wieder zum zweiten der zweiten Reihe u. ſ. w. fortgeht, giebt nach der Reihe ſämmtliche dreieckige Zahlen; z. B. $1 + 2 = 3$, $2 + 4 = 6$, $4 + 6 = 10$, $6 + 9 = 15$, $9 + 12 = 21$ u. ſ. w. Es müſſen demnach, nach den unter 6) aufgeſtellten Ausdrücken $n^2 + n\,(n + 1)$, $n\,(n + 1) + (n + 1)^2$ und $(n + 1)^2 + (n + 1)\,(n + 2)$ drei auf einander folgende dreieckige Zahlen ſein, was ſich ſogleich als wahr erweiſt, wenn wir die Formeln ſo umwandeln

$$n^2 + n\,(n + 1) = \frac{2n\,(2n + 1)}{2}$$

$$n\,(n + 1) + (n + 1)^2 = \frac{(2n + 1)\,(2n + 2)}{2}$$

$$(n + 1)^2 + (n + 1)\,(n + 2) = \frac{(2n + 2)\,(2n + 3)}{2}.$$

8) Jede Quadratzahl ſowohl plus als minus ihrer Wurzel wird ein Heteromekes $n^2 \pm n = n\,(n \pm 1)$. [Umgekehrt iſt auch jedes Heteromekes ſowohl die Summe als die Differenz eines Quadrats und ſeiner Wurzel; denn $n\,(n + 1) = n^2 + n = (n + 1)^2 - (n + 1)$].

Den Beſchluß dieſes Abſchnitts macht folgende Betrachtung: „Die ταυτότης hat ihren Urſprung in dem Ungeraden, die ἑτερότης in dem Geraden; die Quadrate entſtehen aus den ungeraden Zahlen (durch Addition), die Heteromekes aus den geraden; in jeder von der Einheit anfangenden geometriſchen Progreſſion ſind die Glieder an den ungeraden Stellen Quadrate (ταυτομήκεις), aber kein Glied an

einer geraden Stelle (wenn nicht ſchon das erſte ſelbſt ein Quadrat iſt). Selbſt die ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις, das iſt die Kubikzahlen, die drei Dimenſionen und dadurch noch mehr Antheil an der ταυτότης haben als die Quadratzahlen, ſind ein Erzeugniß der ungeraden Zahlen, nicht der geraden. Denn ſchreibt man ſich von der Einheit an alle ungeraden Zahlen nach der Reihe hin, ſo iſt die erſte ein Kubus δυνάμει (ſ. oben), die beiden folgenden zuſammen bilden den zweiten Kubus, die drei nächſtfolgenden den dritten, die folgenden vier den vierten und ſo fort.“

Dieſer hübſche Satz ſcheint Nikomachus eigenthümlich anzugehören. Um die allgemeine Formel zu entwickeln, ſetzen wir n^3 gleich der Summe von n ungeraden Zahlen; die erſte ſei $2x + 1$, ſo iſt die $n$te $2x + 2n - 1$, alſo die Summe derſelben $n^3 = (2x + n)\,n$, $x = \frac{n^2 - n}{2}$; demnach hat man, um n^3 zu produciren, die ungeraden Zahlen von $n^2 - n + 1$ bis $n^2 + n - 1$ zu addiren, deren arithmetiſches Mittel n^2 iſt.

Hier wäre nun nach den Begriffen der Späteren die Arithmetik des Nikomachus abgeſchloſſen; er zieht aber noch in ihren Bereich eine Theorie, welche, obgleich ihrer Natur nach ganz zur Arithmetik gehörig, von den Späteren, ſelbſt ſchon von Theon von Smyrna, gewöhnlich in der Theorie der Muſik abgehandelt wird, wo ſie freilich eine vielfältige Anwendung findet. Es iſt dieſes die Lehre von den Analogien und Medietäten (μεσότητες), oder, was daſſelbe ſagen will, die Lehre von den verſchiedenen Proportionen [49]. Sie

49) Es iſt bei den Neuern Sitte, die Worte ἀναλογία und μεσότης ſo zu unterſcheiden, daß ἀναλογία die Proportion im Allgemeinen, μεσότης dagegen die ſtetige Proportion bedeute. Ich muß geſtehen, daß ich dieſen den Worten untergelegten Sinn bei den Alten nicht habe beſtätigt gefunden. Nikomachus definirt II. 21. die ἀναλογία, aber nicht die μεσότης. Theon von Smyrna giebt Mus. cap. 32. (p. 132. 133. Bull.) mit gewohnter Geſchwätzigkeit den Unterſchied an, aber man erſieht aus ſeinen Worten weiter nichts, als daß der eben erwähnte Sinn in beiden Terminis nicht liegt: Διαφέρει δὲ, heißt es, ἀναλογίας μεσότης ἐπειδὴ εἰ μέν τι ἀναλογία, τοῦτο καὶ μεσότης· εἰ δέ τι μεσότης, οὐκ εὐθὺς ἀναλογία· ἐγχωρεῖ γάρ τι κατὰ τάξιν μέσον ὂν μὴ ἔχειν ἀναλόγως πρὸς τὰ ἄκρα, ὡς τὰ δύο μέσα ἐστὶ τῇ τάξει τῶν τριῶν καὶ τοῦ ἑνὸς καὶ τῶν ι̅· τὰ γ̅ καὶ τὰ δ̅ καὶ τὰ ε̅· (dieſe Stelle iſt offenbar corrumpirt) ἀπὸ γὰρ τοῦ ἑνὸς οὐχ οἷόν τε ἐλθεῖν ἐπὶ τὰ ι̅,

bildet den Inhalt der Kapitel 21. bis 29. und den Schlußſtein der Arithmetik des Nikomachus, und zwar nicht ohne Abſicht, wie er ſelbſt ſagt, nämlich

Kap. 21. „Hierauf dürfte es am rechten Orte ſein, mit der Lehre von den Proportionen (ἀναλογίαι), die ſehr nothwendig iſt für die Naturkunde und für die Lehren der Muſik, der ſphäriſchen Trigonometrie und der Planimetrie, am meiſten aber zu dem Verſtändniß der Alten (ἀναγκαιότατον ὄντα εἰς τὰς φυσιολογίας καὶ εἰς τὰ μουσικά τε καὶ σφαιρικὰ καὶ γραμμικὰ θεωρήματα, οὐχ ἥκιστα δὲ καὶ εἰς τὰς τῶν παλαιῶν συναναγνώσεις), die arithmetiſche Einleitung auf eine paſſende und die angemeſſenſte Weiſe zu beſchließen.“

Hier nur wenige Worte über dieſen Gegenſtand.

μὴ πρότερον ἐλθόντα ἐπὶ τὰ β̅ καὶ τὰ γ̅ καὶ τὰ δ̅· ἀλλ' οὐδὲν τούτων ἀναλόγως ἔχει πρὸς τὰ ἄκρα· τὸ γὰρ ἓν οὐκ ἐν τούτῳ ἐστὶ τῷ λόγῳ πρὸς τὰ δύο, ἐν ᾧ τὰ δύο πρὸς τὰ γ̅· ὁμοίως καὶ δ̅ (καὶ) ἐπὶ τῶν δύο καὶ τῶν τριῶν· τὰ δὲ ἐν αὐτῷ τῷ λόγῳ ὄντα, καὶ μέσα ἂν εἴη· οἷον ἕν, β̅, δ̅· ἀναλογία τε γάρ ἐστιν ἡ τοῦ διπλασίου, καὶ τὰ β̅ μετὰ τοῦ ἑνὸς καὶ τῶν τεσσάρων. Es ſcheint, als wenn Theon den Ausdruck μεσότης ganz allgemein von dem Dazwiſchenliegen gebraucht wiſſen will. — Pappus III, 5. (p. 12) ſagt ganz kurz: Differt autem medietas (μεσότης) ab analogia, nam si quid est analogia, hoc et medietas est; sed non contra. Medietates enim tres sunt, arithmetica, geometrica et harmonica. etc. Demnach iſt μεσότης der allgemeinere, ἀναλογία der ſpeciellere Begriff, wie es auch aus den erſten Worten Theon's einleuchtet; und aus dem Zuſatz des Pappus: medietates enim tres sunt, kommt man in Verſuchung des Gegenſatzes halber zu ergänzen: aber es giebt nur eine Analogie. Und das ſcheint wirklich das Richtige zu ſein. Denn hören wir, was Jamblichus (ed. Tennul. p. 141) ſagt: Προληπτέον δὲ, ὅτι κυρίως ἀναλογίαν ἐκάλουν οἱ παλαιοὶ τὴν γεωμετρικὴν, κοινότερον δὲ ἤδη καὶ τὰς λοιπὰς πάσας μὴν γενικῶς μεσότητας. Alſo Analogie heißt eigentlich nur die geometriſche Proportion, alle insgeſammt aber, auch die geometriſche nicht ausgeſchloſſen, heißen Medietäten. Jedoch ſcheint der Sprachgebrauch darin nicht ganz feſt geweſen zu ſein; Nikomachus beginnt ſein Kap. 22. mit den Worten: Εἰσὶν οὖν ἀναλογίαι αἱ μὲν πρῶται καὶ πᾶσι τοῖς παλαιοῖς ὁμολογούμεναι .... τρεῖς πρώτισται ἀριθμητικὴ, γεωμετρικὴ, ἁρμονικὴ etc., wo alſo ἀναλογίαι auch in dem allgemeinen Sinne gebraucht wird; und noch in demſelben Kapitel braucht er ganz in demſelben Sinne von allen dreien den Ausdruck μεσότητες. Aber von Kap. 23. bis zum Ende kommt faſt ausſchließlich der Name μεσότης vor, und im Kap. 24. heißt es: γεωμετρικὴ μεσότης, κυρίως ἀναλογία μόνη καλουμένη διὰ τὸ ἀνὰ

„Ein Verhältniß iſt das gegenſeitige Befinden (die gegenſeitige Beziehung) zweier Ausdrücke zu einander, die Zuſammenſetzung derſelben iſt die Proportion (Λόγος μὲν οὖν ἐστὶ δύο ὅρων ἡ πρὸς ἀλλήλους σχέσις, σύνθεσις δὲ τῶν τοιούτων ἡ ἀναλογία)." Beide Definitionen ſind nicht ſo genau wie diejenige, welche Euklides am Anfange ſeines fünften Buches giebt: Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. Ἀναλογία δ' ἐστὶν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. Auch Jamblichus fügt den von Nikomachus vernachläſſigten, aber nothwendigen Begriff der homogenen Größen hinzu (p. 138), und ebenſo ſubſtituirt er für die bloße Zuſammenſtellung (σύνθεσις) bei Nikomachus den richtigeren Begriff der Gleichſtellung: ἡ τοίνυν ἀναλογία λόγων ἐστὶ πλειόνων ὁμοιότης καὶ ταυτότης. —

τὸν αὐτὸν λόγον θεωρεῖσθαι πρὸς ἀλλήλους τοὺς ἐν αὐτῇ ὅρους. Und faſt wörtlich ebenſo Jamblichus p. 147: Ἡ δὲ δευτέρα μεσότης ἡ γεωμετρικὴ μόνως ἀναλογία κέκληται, διότι λόγον τὸν αὐτὸν οἱ ὅμοιοι περιέχουσιν, ἀνὰ τὸν αὐτὸν λόγον διεστῶτες. Und ſo iſt auch bei Euklides ἀναλογία immer nur von der geometriſchen Proportion gebraucht. Aus allen dieſen angeführten Stellen geht nun wohl unzweifelhaft folgendes Reſultat hervor: Urſprünglich hieß die geometriſche Proportion ἀναλογία, die übrigen, die arithmetiſche, die harmoniſche u. ſ. w. μεσότητες; aber der ſpätere Sprachgebrauch hat dieſen Unterſchied beider Termini verwiſcht. Die am Anfang erwähnte unrichtige Angabe des Unterſchiedes beider Termini mag aus dem etymologiſchen Sinne des Wortes μεσότης, welches allerdings zunächſt die Mitte bedeutet, und aus einem zu ſtrieten Anklammern an ſolche Stellen hervorgegangen ſein, wie etwa Jambl. p. 147, wo es heißt, Platon habe das Mittelglied der continuirlichen arithmetiſchen Proportion μεσότης genannt: Ταύτην δ' εἶπεν ὁ Πλάτων μεσότητα, ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερεχομένην, ἴσῳ δὲ ὑπερέχουσαν. Aus Boethius, der allerdings lange einzige Quelle für das mathematiſche Studium geweſen iſt, können dieſe falſchen Begriffe nicht hergeleitet ſein, wie aus zwei Stellen erhellt, welche Tennulius p. 198. anführt; die erſte II, 43. lautet ſo: Si igitur in tribus terminis consideratio sit, *continua proportionalitas* (d. i. ἀναλογία) dicitur. Sin vero hic alius dux et alius comes, illic vero utrique sint alii, vocabitur *disjuncta medietas*. Und II, 44. heißt es: Geometrica medietas expediatur, quae sola vel maxime proportionalitas appellari potest, etc. Beide Stellen ſind faſt wörtlich aus Nikomachus überſetzt. Sichere Belege aber dafür, daß μεσότης nicht ausſchließlich die ſtetige Proportion bedeute, finden wir bei Nikomachus z. B. noch Kap. 21, worüber weiter unten im Text, und Kap. 29, wo die immer aus vier Gliedern beſtehende vollkommenſte Proportion dennoch, ebenſo wie bei Jamblichus ſtets μεσότης heißt.

Ferner heiſst es: Wenn derſelbe Terminus immer unverändert auf beide Seiten geſtellt wird, als Hinterglied (ὑπόλογος, bei Boethius comes) zu dem größern, als Vorderglied (πρόλογος, bei Boethius dux) zu dem kleinern, ſo heiſst eine ſolche Proportion eine ſtetige (συνημμένη). Wenn aber das zu dem kleinern geſtellte Hinterglied verſchieden iſt von dem zu dem größern geſtellten Vordergliede, ſo heiſst eine ſolche Medietät oder Analogie eine getrennte (οὐκέτι συνημμένη, ἀλλὰ διεζευγμένη λέγεται ἡ τοιαύτη μεσότης τε καὶ ἀναλογία) [50]. Hier ſpricht doch wohl der Gebrauch des Worts μεσότης in dieſer Verbindung ganz deutlich gegen die gewöhnliche Definition, derzufolge es ausſchließlich die ſtetige Proportion bezeichnen ſoll.

Kap. 22. Die urſprünglichen und allen Alten, Pythagoras, Platon und Ariſtoteles bekannten Analogien ſind die drei erſten, die arithmetiſche, die geometriſche, die harmoniſche, und die drei dieſen entgegengeſetzten, welche keine eigenen Namen haben, ſondern gewöhnlich die vierte, fünfte und ſechſte Medietät genannt werden. (Nach Jamblichus p. 141. 142. rühren nur die drei erſten von Pythagoras her, die drei letzteren dagegen von Eudorus). Zu dieſen haben die Neueren (nach Jamblichus p. 163. die Pythagoräer Temnonides und Euphranor) noch vier andere erfunden, um die Zahl zehn voll zu machen, weil dieſe den Pythagoräern für die vollkommenſte gilt.

Kap. 23. Arithmetiſche Proportion, $a - b = c - d$, oder $a - b = b - c$.

Unter den Eigenſchaften dieſer Proportion führt Nikomachus auch folgende ſehr ſchöne und von den Meiſten überſehene (γλαφυρώτατον καὶ τοὺς πολλοὺς λεληθός) an, daß in der ſteti-

50) Theon Mus. c. 31. pag. 129. und Pſellus p. 10. nennen die ſtetige Proportion ἀναλογία συνεχής, Theon dagegen die getrennte διῃρημένη, Pſellus διεχής. Euklides braucht von ſtetig proportionirten Zahlen immer den Ausdruck ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον. Jamblichus p. 140. macht den aber ganz gewiß im Sprachgebrauch nicht gegründeten Unterſchied zwiſchen ἀνάλογον und ἀναλογία, daß erſteres von der getrennten, letzteres von der ſtetigen Proportion gebraucht werde . . . δοκεῖ τὸ ἀνάλογον τῆς ἀναλογίας διαφέρειν· τὸ μὲν γὰρ ἀνάλογον καὶ ἐν διεζευγμένοις ὅροις γίνεται· ἡ δὲ ἀναλογία κυρίως ἐπὶ τῶν τὸν κοινὸν ἐχόντων ὅρον τάττεται.

gen Proportion das Quadrat des Mittelgliedes, wenn man das Product der äußern Glieder davon abzieht, gleich wird dem Quadrat der conſtanten Differenz, d. h. $b^2 - ac = (a - b)^2 = (b - c)^2$.

Kap. 24. **Geometriſche Proportion**, $a : b = c : d$ oder $a : b = b : c$.

Eigenthümlichkeiten der ſtetigen Proportion ſind folgende:

1) Die Differenzen der Glieder verhalten ſich wie die Glieder ſelbſt. Dieſer im Griechiſchen nicht ganz deutlich ausgedrückte Satz (Ἴδιον δὲ ἔχει ἡ γεωμετρικὴ μεσότης, ὃ μηδεμία τῶν λοιπῶν, τὸ τὰς τῶν ὅρων διαφορὰς πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ τῷ αὐτῷ εἶναι, ἐν ᾧ καὶ οἱ ὅροι πρὸς τοὺς συνεχεῖς, οἱ μείζονες πρὸς τοὺς ἐλάττονας, καὶ ἀνάπαλιν) ſoll ſo viel heißen: Wenn $a : b = b : c$, ſo verhält ſich $a - b : b - c = a : b = b : c$. Der Satz läßt ſich aber, ohne Rückſicht auf die Stetigkeit der Proportion, allgemeiner ſo ausdrücken: Wenn $a : b = c : d$, ſo verhält ſich $a - b : c - d = a : c = b : d$.
2) Wenn der Exponent der ſtetigen Proportion n iſt, ſo iſt die Differenz der größern Glieder das $(n - 1)$fache des Mittelgliedes, und der Überſchuß der Differenz der größern Glieder über die Differenz der kleinern das $(n - 1)$fache des kleinſten Gliedes.
3) Πλατωνικὸν θεώρημα. Zwiſchen zwei Quadratzahlen giebt es nur ein, zwiſchen zwei Kubikzahlen nur zwei geometriſche Mittel. (Eukl. VIII, 11. 12.)

Kap. 25. **Harmoniſche Proportion**[51]), $a : c = a - b : b - c$.

Wenn die drei Größen a, b, c in dieſer Reihenfolge von dem größern zum kleinern fortſchreiten, ſo iſt in der arithmetiſchen Proportion $a : b < b : c$, in der harmoniſchen $a : b > b : c$, in der Mitte zwiſchen beiden ſteht die geometriſche, in welcher $a : b =$

51) Nach **Jamblichus** p. 141. hieß dieſe Proportion früher ἡ ὑπεναντία, **die entgegengeſetzte**, und erhielt erſt von **Archytas** und **Hippaſus** ihren jetzigen Namen. (Μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητική τε καὶ γεωμετρικὴ, καὶ ἡ ποτε μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ τὸν Ἀρχύταν αὖθις καὶ Ἵππασον ἁρμονικὴ μετακληθεῖσα, ὅτι τοὺς

$b : c$ iſt. Außerdem wird als eine beſondere Eigenſchaft der harmoniſchen Proportion angeführt, daß $(a+c)\, b = 2ac$ iſt.

Kap. 26. Anwendung der harmoniſchen Proportion auf die Muſik. Es findet ſich hier die Bemerkung, daß an dem geometriſchen Kubus dieſe Medietät ſich zeigt; der Kubus hat zwölf Seiten, acht Ecken und ſechs Flächen, und die Zahlen 12, 8, 6 ſtehen in harmoniſcher Medietät.

Kap. 27. Zwiſchen zwei gegebenen Zahlen, die beide gerade oder beide ungerade ſind, laſſen ſich immer drei Mittelglieder finden, ſo daß jedes derſelben mit den beiden genannten eine der drei Proportionen bildet. Nikomachus ſetzt aber nicht die Bedingung hinzu, daß das Product der gegebenen Zahlen eine Quadratzahl ſein muß, damit das geometriſche Mittel rational werde; er giebt für beide Fälle, wenn die angenommenen Zahlen gerade und wenn ſie ungerade ſind, ein Beiſpiel:

	für gerade Zahlen				für ungerade Zahlen		
arithm.	40	25	10	....	45	25	5
geom.	40	20	10	....	45	15	5
harm.	40	16	10	....	45	9	5

Auch hat er nicht bemerkt, daß die drei Mittelglieder eine ſtetige geometriſche Proportion bilden, was ſogleich einleuchtet, wenn man dieſelben in allgemeinen Formeln darſtellt; dann wird für die äußern Glieder a, b das arithmetiſche Mittel $\frac{a+b}{2}$, das geometriſche $\sqrt{ab}$, das harmoniſche $\frac{2ab}{a+b}$.

Kap. 28. Die übrigen ſieben Analogien, deren Formeln ich hier nur kurz andeuten will:

die vierte $a : c = b - c : a - b$, z. B. 6, 5, 3
die fünfte $b : c = b - c : a - b$ „ 5, 4, 2
die ſechſte $a : b = b - c : a - b$ „ 6, 4, 1

κατὰ τὸ ἁρμοσμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίνετο λόγους περιέχουσα. Ὑπεναντία δὲ πρότερον ἐκαλεῖτο, διότι ὑπεναντίον τι ἔπασχε τῇ ἀριθμητικῇ, ὡς δειχθήσεται. Ἀλλαγέντες δὲ τοῦ ὀνόματος οἱ μετὰ ταῦτα οἱ περὶ Εὔδοξον μαθηματικοὶ ἄλλας τρεῖς προσανευρόντες μεσότητας, τὴν τετάρτην ἰδίως ὑπεναντίαν ἐκάλεσαν, διὰ τὸ καὶ αὐτὴν ὑπεναντίον τι πάσχειν τῇ ἁρμονικῇ, ὡς δειχθήσεται.

Digitized by Google

die ſiebente	$a : c = a - c : b - c$,	z. B.	9, 8, 6
die achte	$a : c = a - c : a - b$	„	9, 7, 6
die neunte	$b : c = a - c : b - c$	„	7, 6, 4
die zehnte	$b : c = a - c : a - b$	„	8, 5, 3

Kap. 29. „Es iſt noch übrig auch die vollkommenſte, drei Dimenſionen begreifende, und alle übrigen umfaſſende Medietät kurz zu erklären, da ſie ſehr viele Anwendung in der Muſik und Naturkunde findet.“

Dieſe Medietät, welche Nikomachus die vollkommenſte (τελειοτάτη), Jamblichus die muſikaliſche (μουσική) nennt, iſt nach der Erzählung des Letzteren von den Babyloniern erfunden und von Pythagoras zuerſt nach Griechenland gebracht worden [52]).

Die Sache iſt folgende: Wenn man zu zwei Terminis zwei mittlere ſucht, ſo daß der eine von ihnen mit den beiden äußeren eine arithmetiſche, der andere mit denſelben eine harmoniſche ſtetige Proportion bildet, ſo bilden alle vier Zahlen eine geometriſche Proportion. Z. B. zwiſchen 12 und 6 iſt das arithmetiſche Mittel 9, das harmoniſche 8, demnach bilden die vier Zahlen 12, 9, 8, 6 eine geometriſche Proportion. Noch allgemeiner läßt der Satz ſich ſo faſſen, daß, wenn zwei der genannten Bedingungen ſtattfinden, allemal auch die dritte ſtattfindet. Seien die gegebenen äußern Glieder a und b, ſo iſt ihr arithmetiſches Mittel $\frac{a+b}{2}$, ihr harmoniſches Mittel $\frac{2ab}{a+b}$, und es iſt offenbar, daß die Zahlen

$$a,\ \frac{a+b}{2},\ \frac{2ab}{a+b},\ b$$

eine geometriſche Proportion bilden. Wenn man aber zwiſchen a und b zwei Zahlen x, y ſo ſucht, daß a, x, y, b eine geometriſche, a, x, b eine ſtetige arithmetiſche Proportion bilden, ſo wird $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{2ab}{a+b}$, folglich bilden dann a, y, b eine harmoniſche Proportion. Und eben ſo leuchtet der dritte Fall ein.

Ich beſchließe dieſen Gegenſtand mit der Bemerkung, daß Pap-

52) Jambl. p. 168. Εὕρημα δ' αὐτήν φασιν εἶναι Βαβυλωνίων, καὶ διὰ Πυθαγόρου πρώτου εἰς Ἕλληνας ἐλθεῖν.

pus uns die in Euklidiſcher Manier wiſſenſchaftlich vorgetragene Lehre von den zehn Medietäten in ſeinem dritten Buche aufbehalten hat, wo ſie pag. 11 — 26 unter dem Generaltitel: In semicirculo tres medietates sumere als ſein zweites Problem erſcheint.

Der weſentlichſte Unterſchied nun zwiſchen dem Werke des Nikomachus und denen der alten Geometer beſteht darin, daß Nikomachus nicht, wie jene, aphoriſtiſch die einzelnen Sätze hinſtellt, ſondern ſeinen Gegenſtand in einem fließenden, fortlaufenden, zuweilen rhetoriſch ſchönen Vortrage abhandelt, und dabei meiſt analytiſch zu Werke geht, indem er ſeine Sätze zuerſt aus Induction herleitet und ſie dann allgemein ausſpricht. Dagegen vermißt man durchweg eigentliche Beweiſe; das darf uns aber nicht befremden, wenn wir bedenken, daß Nikomachus, wie er ſelbſt mehr als einmal ſagt, nicht die Abſicht hat, eine wiſſenſchaftliche Arithmetik vorzutragen; er will eine Einleitung in die Arithmetik geben [53]); er will dem Anfänger Geſchmack an Unterſuchungen über die Natur der Zahlen einflößen, darum giebt er in einem angenehmen Vortrage die intereſſanteſten Reſultate, welche dieſe Wiſſenſchaft bis dahin zu Tage gefördert hatte; er will den Unkundigen an arithmetiſche Vorſtellungen gewöhnen und ihn vorläufig mit einigen elementaren arithmetiſchen Wahr-

53) S. z. B. I, 17. 23. II, 6. 12. 29. Daß Nikomachus außer dieſer Einleitung noch ein ausführliches Lehrbuch der Arithmetik geſchrieben, ſchließt Fabricius wohl zu verwegen aus den Worten, deren ſich Boethius in der Einleitung zu ſeiner Arithmetik bedient. S. Bibl. Gracca T. IV. p. 4. 5. (Ed. Harles. T. V. p. 632.): Latine olim verterat *Apulejus,* cujus versio intercidit, et *Boethius,* quem laudat Cassiodorus lib. I. variar. epist. 45. Exstantque adhuc libri duo Arithmetices Boethii, quae pro liberiore versione Nicomachi haberi possunt, quem nominetenus laudat pag. 1323 et 1341, quamquam non hanc isagogen solum, sed et alterum majus Nicomachi opus Arithmeticam, quod temporum injuria amisimus, simul consuluisse et in compendium misisse videtur. *Ea,* inquit in praef., *quae de numeris a Nicomacho diffusius disputata sunt, moderata brevitate collegi, et quae transcursa velocius angustiorem intelligentiae praestabant aditum, mediocri adjectione reseravi, ut aliquando ad evidentiam rerum nostris etiam formulis ac descriptionibus uteremur.* Aus dieſen Worten folgt aber wohl weder, was Fabricius behauptet, die Exiſtenz eines ausführlicheren Werks von Nikomachus, noch auch die Verſchiedenheit der vorhandenen Arithmetik dieſes Kirchenvaters von ſeiner Bearbeitung des Werkes von Nikomachus, worauf Fabricius ebenfalls hinzudeuten ſcheint. — Daß Niko-

heiten bekannt machen, und zu dieſem Zwecke iſt es ihm hinreichend, an einem oder etlichen Zahlenbeiſpielen die Richtigkeit ſeiner Ausſagen darzuthun, ſo daß der Mangel derſelben in dieſer Einleitung uns nicht zu dem Schluſſe berechtigt, Nikomachus habe ſelbſt keine gründliche wiſſenſchaftliche Beweiſe gehabt; er hatte ja doch für eine große Anzahl ſeiner Lehren die Euklidiſchen Beweiſe und hätte, wenn Mittheilung derſelben in ſeinem Plane gelegen hätte, ja doch dieſe gewiß geben können. Und macht es Diophant, wie wir ſpäter ſehen werden, nicht ebenſo? Wenn er am Schluſſe ſeiner Auflöſung, nachdem er irgend welche Zahlen gefunden, die der Aufgabe ein Genüge leiſten, ſagt: *καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά*, heißt das etwas Anderes, als: verſuche, und du wirſt finden, daß dieſe Zahlen das leiſten, was verlangt wurde? Ebenſo zeigt Nikomachus an Zahlenbeiſpielen, daß ſeine Sätze wahr ſind.

Fragen wir endlich, welche Fortſchritte die Arithmetik von Euklides bis auf Nikomachus gemacht hat, ſo dürften ſich etwa folgende Reſultate ergeben:

1) Bei Nikomachus erſcheint die Arithmetik zum erſtenmal frei von den Feſſeln geometriſcher Vorſtellungen, mit denen ſie bei Euklides noch behaftet iſt. Nikomachus erläutert Zahlenlehren an Zahlen, nicht an Linien, ein Fortſchritt, der bei der weitern Ausbildung

---

machus auch eine praktiſche Arithmetik, d. h. eine Rechenkunſt, unter dem Titel *τέχνη ἀριθμητική*, wie Montucla I, 319, Reimer in Boſſut's Geſchichte d. Math. I, 43, Klügel math. Wörterb. I, 174 u. Andere behaupten, iſt ein bloßes Mißverſtändniß. Denn erſtens würde der Titel *τέχνη ἀριθμητική* das nicht bedeuten, was man hineinlegt, und zweitens beruht, wie es ſcheint, die Angabe bei Montucla, die Reimer und Klügel wahrſcheinlich bloß nachgeſprochen, wenn nicht vielmehr alle die genannten Auctoren aus Fabricius (ſ. unten) abgeſchrieben haben, auf einer Stelle bei Jamblichus p. 3., wo er ſagt: „Ich beabſichtige eine wiſſenſchaftliche Arithmetik zu ſchreiben; da finde ich aber, daß Nikomachus alles dieſes nach dem Syſtem des Pythagoras bereits in ſeiner *τέχνῃ ἀριθμητικῇ* abgehandelt hat. Weil nun dieſes Buch ſo vorzüglich iſt (dieſer Gedanke iſt etwas weit ausgeführt, dann heißt es am Ende der p. 4. weiter), ſo will ich, ohne etwas wegzunehmen oder hinzuzuſetzen, die Nikomachiſche Arbeit ſelbſt (*αὐτὴν τὴν Νικομάχειον τέχνην*) meiner Schrift zu Grunde legen." Demnach iſt dieſe *τέχνη* nichts Anderes, als eben die *εἰσαγωγὴ*, die Jamblichus commentirt hat und die uns zu Händen iſt. Danach iſt auch die Angabe bei Fabricius (Ed. Harles. V, 638) zu berichtigen; denn die in den Theologumenis p. 33. 43 (bei Aſt p. 32. 42) citirte *Ἀριθμητική* iſt ganz ſicher das dem Nikomachus zugeſchriebene Werk *θεολογούμενα τῆς ἀριθμητικῆς*.

der Arithmetik nicht ohne bedeutenden Einfluß geblieben iſt, der vielmehr, wie die ſpäteren Werke zeigen, der ganzen Griechiſchen Arithmetik eine andere Richtung gegeben hat.

2) Als neu iſt bei Nikomachus hinzugekommen die ganze Theorie der Polygonalzahlen, ſelbſt die allgemeine Regel ihrer Bildung, wonach ſie als die Summenreihen arithmetiſcher Progreſſionen erſcheinen.

3) Zum erſtenmal ſchriftlich behandelt, wenn auch eingeſtandener Maaßen nicht von ihm herrührend, iſt hier die Theorie der Medietäten, während Euklides nur die geometriſche Proportion kennt.

4) Nikomachus giebt zuweilen ſtrengere Definitionen und Unterſchiede, die Euklides überſehen hàt, z. B. die Eintheilung der geraden Zahlen in *ἀρτιοπέρισσοι*, *περισσάρτιοι*, und *ἀρτιάκις ἄρτιοι* **I**, 8. Die Eintheilung der Flächenzahlen in *προμήκεις* und *ἑτερομήκεις* **II**, 17, und die darauf gegründeten Sätze über die Beziehungen der letztgenannten zu den Quadratzahlen. Dagegen vernachläſſigt Nikomachus die mathematiſche Präciſion des Ausdrucks, wenn er Sachen anführt, die er aus Euklides als bekannt vorausſetzt und annimmt. Vergl. **II**, 21 die Definitionen von *λόγος* und *ἀναλογία*.

5) Hin und wieder, und nicht eben ſelten giebt Nikomachus einzelne intereſſante, treffende Bemerkungen, in welcher Beziehung ich auf die oben gegebene Analyſe verweiſe und die Kapitel 4. 12. 19. 20. 23. 24 des zweiten Buchs zu vergleichen bitte (z. B. die Zuſammenſetzung der Kubikzahlen durch die Summation einer Reihe ungerader Zahlen u. a.). Es iſt indeß nicht zu leugnen, daß Nikomachus in dem Beſtreben, Merkwürdigkeiten zu entdecken, nicht immer glücklich iſt, und daß er manchmal als ſehr wunderbar etwas hervorhebt, was ſich ganz von ſelbſt verſteht.

Obgleich, wie ich oben erwähnt habe, zwiſchen Euklides und Nikomachus uns kein arithmetiſcher Schriftſteller bekannt iſt, ſo rühren doch gewiß nicht alle Zuwüchſe, welche die Arithmetik in dieſem Zeitraume erfahren hat, von Nikomachus ſelbſt her. Er ſelbſt deutet zuweilen, aber freilich ohne Namen zu nennen, auf frühere Autoren hin, z. B. **II**, 14. *ἵνα δὲ μὴ ἀνήκοοι ὦμεν κολούρων καὶ δικολούρων καὶ τρικολούρων, ὧν τοῖς ὀνόμασιν ἐντευξόμεθα ἐν τοῖς συγγράμμασι μάλιστα θεωρηματικοῖς* etc. „Damit wir aber nicht die Koluren, Dikoluren und Trikoluren ungenannt laſſen, deren Namen wir beſonders in den theoretiſchen Schriften antreffen u. ſ. w.“ Ferner: Die Körperzahlen, welche er **II**, 16

σκαληνά nennt, nennen, ſagt er, **Einige** σφηνίσκοι, **Andere** σφηκίσκοι, **noch Andere** βωμίσκοι. Ferner heißt es II, 22. „Zu den drei bekannten Proportionen und deren Umkehrungen haben **die Neueren** noch vier andere erfunden.“ — Da wir aber über dieſe Mittelglieder, wahrſcheinlich außerhalb der Schule wenig bekannte Schriften der Pythagoräer, keine Nachrichten und noch weniger eigene Kenntniß von denſelben haben, ſo läßt ſich über den Antheil, den Nikomachus an dem Vorgetragenen ſelbſt hat, mit Gewißheit nichts beſtimmen, und es ſei hinreichend, dieſe von ihm gegebenen Andeutungen hier bloß erwähnt zu haben. So viel ſteht feſt, daß Nikomachus im Alterthum in ſehr hohem Anſehen ſtand und als bedeutende Autorität galt, und daß ſeine Einleitung in die Arithmetik als die wichtigſte und einzige Quelle dieſer Wiſſenſchaft betrachtet wurde. Ja ſein Name war ſogar ſprichwörtlich geworden; ἀριθμέεις ὡς Νικόμαχος ὁ Γερασηνός, heißt es bei Lucian [54]), und Jamblichus braucht zwei volle Seiten, um die ausgezeichneten Eigenſchaften ſeines Autors gebührend zu loben. Mehr aber als alle Citate beweiſen das hohe Anſehen, welches dieſer Mathematiker bei den Griechen, wie bei den Römern genoſſen hat, die vielen Commentare, Bearbeitungen und Überſetzungen, mit denen ſein Werk von beiden Nationen beehrt worden iſt, und welche ich, ſoweit ſie mir bekannt geworden ſind, hier der Reihe nach herzählen will.

Apulejus von Madaura hat in der zweiten Hälfte des zweiten Jahrhunderts das Werk ins Lateiniſche überſetzt, wovon aber bis jetzt noch keine Spur aufgefunden iſt. S. Fabricius l. l. p. 630. 632. Tennulius ad Jambl. p. 66. Cassiodor. de Mathem. discipl. p. 555.

Ob **Anatolius**, Biſchof von Laodicea, der um das Jahr 280 eine Arithmetik in zehn Büchern verfaßt haben ſoll, die Arithmetik des Nikomachus, oder nur in ſeinen Theologumenis das gleichnamige Werk dieſes Auctors bearbeitet hat, habe ich nicht ausmachen können. In den edirten Theologumenis wird er öfters neben Nikomachus genannt. Vergl. auch Heilbronner Hist. math. p. 358.

Jamblichus, aus Chalcis in Cöleſyrien, der berühmte Pythagoräer, hat im vierten Jahrhundert die Einleitung des Nikomachus bearbeitet; dieſe Bearbeitung bildet den vierten Theil ſeines umfang-

54) S. in Fabricii Bibl. graeca V, 635.

reichen Werkes über die Pythagoräiſche Philoſophie, und führt den Titel: Ἰαμβλίχου Χαλκιδέως τῆς κοιλῆς Συρίας, περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς, λόγος τέταρτος. Dieſer Commentar iſt nur einmal, und zwar Griechiſch und Lateiniſch herausgegeben von Sam. Tennulius. Arnheim 1667. 68. 2 Bde. in 4., iſt aber bei dieſer Gelegenheit nicht in die beſten Hände gerathen. Tennulius ſcheint weder als Philolog, noch als Mathematiker der Arbeit gewachſen geweſen zu ſein, und hat ſeinen Auctor ſehr häufig nicht verſtanden, was ſein Text, ſeine Überſetzung, und ſein Commentar mehr als hinlänglich beweiſen. Er geſteht ſelbſt p. 67. 68. offenherzig: ego illud (opus Jamblichi) illibatum profero, vix tres literas mutavi in codicibus, adeo periculosam ratus omnem mutationem nihil meo ingenio permisi. Wäre das nur wahr!

Nach Eutokius (ad Archim. de sphaera et cyl. l. II. p. 28. Ed. Bas.) hat ein gewiſſer Heronas, der nicht weiter bekannt iſt, ein ὑπόμνημα εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν geſchrieben, der alſo ſpäteſtens im vierten oder fünften Jahrhundert gelebt haben kann. Heilbronner p. 393 nennt ihn fälſchlich Hero und ſetzt ihn ſonderbarer Weiſe, obgleich er des Citats bei Eutokius erwähnt, hundert Jahre nach Eutokius.

Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius, 455 — 524, hat eine Lateiniſche Bearbeitung des Nikomachus gegeben, die ich aber bis jetzt ebenſo wenig, wie ſeine Geometrie zu Geſichte bekommen habe, obgleich beide mehrmals gedruckt ſind. Übrigens ſchließt er ſich dem Original zuweilen ſo treu an, daß er von Aſt mehrmals als kritiſche Quelle zur Correctur des Griechiſchen Textes benutzt wird. Vergl. die Note 53. dieſes Kap.

Asklepius Trallianus, ein Schüler des berühmten Ammonius Hermiä im ſechſten Jahrhundert, iſt der Verfaſſer eines Commentars über unſern Autor, der handſchriftlich in mehren Bibliotheken vorhanden iſt. S. Fabricii bibl. Graeca V, 635. Bullialdus ad Theon. Smyrn. p. 193. 212. 205. 239., welcher Letztere öfters Stellen aus dieſem Commentar beibringt.

Johannes Grammaticus, gewöhnlich Philoponus genannt, ein Schüler des Vorhergehenden und Augenzeuge der Einnahme Alexandriens durch die Araber (640), hat ebenfalls einen handſchriftlich noch vorhandenen Commentar über Nikomachus geſchrieben. Fabricius l. l.

Endlich hat nach Suidas Proklus (Πρόκλος, ὁ Προκλήϊος

χρηματίσας, Θεμιστίωνος, Λαοδικείας τῆς Συρίας ἱεροφάντης, über dieſe Arithmetik geſchrieben. Mir iſt aber weder das Zeitalter des Autors, noch ſonſt etwas außer der kurzen Anführung bei Suidas bekannt; auf jeden Fall aber iſt er wohl zu unterſcheiden von dem berühmten Proklus Lycius, Diadochus genannt, dem Scholiaſten Euklid's.

Auch den Arabern iſt Nikomachus nicht unbekannt geblieben. Einer ihrer berühmteſten Mathematiker aus der blühendſten Periode der Arabiſchen Gelehrſamkeit, Thâbet ben Korrah Abu 'l Haſſan, der von 836 bis 901 lebte, hat eine Bearbeitung der Arithmetik verfertigt, deren Titel ich wegen des in demſelben beibehaltenen Griechiſchen Worts ἀριθμητική oben S. 43 ſchon angeführt habe.

Nicht ſo reichhaltig iſt die neuere Literatur an Werken über Nikomachus. Wir haben von ſeiner Einleitung in die Arithmetik zwei Ausgaben

1) Νικομάχου Γερασινοῦ ἀριθμητικῆς βιβλία δύο. Nicomachi Gerasini arithmeticae libri duo. Nunc primum typis excusi in lucem eduntur. Parisiis. 1538. 4.
2) Theologumena Arithmeticae etc. Accedit Nicomachi Gerasini institutio arithmetica ad fidem codicum Monacensium emendata. Edidit F. Astius. Lipsiae. 1817. 8.

Beide Ausgaben enthalten nur den Griechiſchen Text, die letztere außerdem kritiſche und erklärende Anmerkungen.

Die erſten drei Kapitel ſind mit Scholien und Varianten von Robbe unter dem Titel Specimen Arithmeticae Nicomacheae. Lipsiae. 1828. 8. herausgegeben.

Als Schriften über Nikomachus ſind nur zu nennen:

1) Explicatiunculae Arithmetices doctrinae Nicomachi von Joachim Camerarius, in deſſen Schrift De Graecis latinisque numerorum notis et praeterea Saracenicis seu Indicis. (Ohne Jahr und Ort. Unter der erſten Vorrede ſteht Lips. 1569, unter der zweiten 1556). Die Explicatiunculae ſind wieder abgedruckt in Tennulins Ausgabe des Jamblichus, unter dem Titel Explicationes J. Camerarii Papeberg. in duos libros Nicomachi Geraseni Pythagorei deductionis (sic!) ad scientiam numerorum. Daventriae. 1667. 4.
2) *Th. Taylor* theoric arithmetic in three books, conti-

ning the substance of all that has been written on this subject by Theo of Smyrna, Nicomachus, Jamblichus and Boetius. London. 1816. 8. Ein ſehr ſeltenes Buch, von dem nur 250 Exemplare abgezogen ſind. Ich habe es nicht geſehen.

Nachdem ich alſo ausführlich über Nikomachus und ſeine Arithmetik gehandelt habe, werde ich mich bei den Folgenden deſto kürzer faſſen können. Der nächſte Mathematiker, mit dem wir hier zu thun haben, iſt Theon von Smyrna. Unter der großen Menge Griechiſcher Gelehrten, welche den Namen Theon führen, ſind uns nur zwei Mathematiker bekannt. Es iſt dieſer Theon von Smyrna, der ſich in ſeinem Werke nicht näher zu erkennen giebt [55]), und der ſchon oft erwähnte Theon von Alexandrien, der Bearbeiter des Euklides und Ptolemäus, in der zweiten Hälfte des vierten Jahrhunderts. Aber der Erſtere hat eine Eigenthümlichkeit, die uns die Beſtimmung ſeines Zeitalters mit ziemlicher Zuverläſſigkeit an die Hand giebt; er iſt nämlich ein leidenſchaftlicher Liebhaber von Citaten, was namentlich in dem zweiten Theile ſeines vorhandenen Werkes, der über die Muſik handelt, auf eine auffallende Weiſe hervortritt. Er citirt der Reihe nach alle bekannten Schriftſteller über Muſik von Pythagoras Zeiten ab bis auf Thraſyllus [56]), denſelben, den wir ſchon bei Beſtimmung des Zeitalters des Nikomachus zu Hilfe nahmen. Demnach hat Theon nach Tiberius gelebt. Dagegen nennt er eins der berühmteſten Griechiſchen Werke über dieſen Gegenſtand nicht, nämlich die Theorie der Muſik (ἁρμονική) von Ptolemäus. Wenn nun gleich ein ſolches argumentum a silentio immer ſein Mißliches hat, ſo läßt es ſich doch mit etwas mehr Wahrſcheinlichkeit, als im Allgemeinen zuläſſig iſt, bei einem Autor anwenden, der es ſich ſo gefliſſentlich wie Theon zum Geſchäfte macht auf jeder Seite und bei jeder Gelegenheit die Schriften ſeiner Vorgänger zu recenſiren, und es würde daher die auf dieſes Schweigen gegründete Conjectur von Bullialdus [57]), daß Theon vor Ptolemäus gelebt habe, ſchon an und für ſich Vieles für ſich haben, wenn ſie auch durch keine anderen Argumente unterſtützt würde. Aber das Letztere

55) Auch Suidas faßt ſich ſehr kurz: Θέων, Σμυρναῖος, Φιλόσοφος.

56) Ed. Bullialdi p. 74. 137. 145.

57) In ſeiner Ausgabe Theon's, Ad lectorem p. 8.

iſt der Fall, wir haben poſitive Argumente für Bullialdus Anſicht; es wird nämlich umgekehrt Theon von Ptolemäus citirt, zwar nicht mit ſeinem Beinamen ὁ Σμυρναῖος, wohl aber als Mathematiker, und wir haben keinen Grund, durch die Annahme, daß unſer Theon Smyrnäus und Theon der Mathematiker bei Ptolemäus verſchiedene Perſonen geweſen, die Anzahl der Mathematiker dieſes Namens unnütz zu vergrößern. Identificiren wir alſo beide Mathematiker, ſo geben uns die Citate bei Ptolemäus überdies Theon's Zeitalter ſo genau an, wie wir es von wenigen Mathematikern zu beſtimmen im Stande ſind. Ptolemäus citirt nämlich vier Beobachtungen des Merkur und der Venus, welche Theon vom zwölften bis zum ſechszehnten Regierungsjahre Hadrian's, das heißt alſo von 128 bis 132 n. Chr. vorgenommen hat [58]. Demnach können wir mit einem

58) Die vier Stellen bei Ptolemäus in ſeiner Μεγάλη Σύνταξις ſind folgende l. IX. c. 9. (p. 234. Ed. Bas.) über Merkur: τῷ μὲν γὰρ ιδ ἔτει Ἀδριανοῦ, κατ' Αἰγυπτίους μεσορὶ ιη ἑσπέρας, ὡς ἐν ταῖς παρὰ Θέωνος εἰλημμέναις τηρήσεσιν εὕρομεν, τὸ πλεῖστον, φησὶν, ἀπέστη τοῦ ἡλίου ὑπολειπόμενος τοῦ ἐπὶ τῆς καρδίας τοῦ λέοντος μοιρὰς γ ϛ' γ''. — Die drei übrigen Beobachtungen betreffen die Venus, und zwar X, 1. (p. 239): ἐν μὲν γὰρ ταῖς παρὰ Θέωνος τοῦ μαθηματικοῦ δοθείσαις ἡμῖν, εὕρομεν ἀναγεγραμμένην τήρησιν τῷ ιϛ ἔτει Ἀδριανοῦ etc. — Ebendaſ. weiter unten: ὁμοίως ἐν μὲν ταῖς παρὰ Θέωνος εὕρομεν, ὅτι τῷ ιβ ἔτει Ἀδριανοῦ etc. — Endlich X, 2. (p. 239): ἐν μὲν γὰρ ταῖς παρὰ Θέωνος ἡμῖν δοθείσαις εὑρίσκομεν, ὅτι τῷ ιγ ἔτει Ἀδριανοῦ etc. Wer Conjecturen liebt, dem bleibt es unbenommen, aus den Worten ἡμῖν δοθείσαις Schlüſſe auf das perſönliche Verhältniß zwiſchen Theon und Ptolemäus zu ziehen. — Theon von Alexandrien in ſeinem Commentar zu den angeführten Stellen nennt unſern Theon Θέων ὁ παλαιός, der Ältere; die entſprechenden Stellen ſind Ed. Bas. p. 390: παρατίθεται οὖν πρῶτον ἑσπερίαν μεγίστην ἀπόστασιν τετηρμένην ὑπὸ Θέωνος τοῦ παλαιοῦ etc.; p. 395. (παρατίθεται δύο τηρήσεις), μίαν μὲν ὑπὸ Θέωνος παλαιοῦ μαθηματικοῦ γεγενημένην, ὃς ἐπὶ Ἀδριανοῦ ἐποιεῖτο τὰς τηρήσεις, ἑτέραν δὲ δι' ἑαυτοῦ etc. und ebend. ὁμοίως δὲ ἐν ταῖς παρὰ Θέωνος εὗρεν, ὅτι τῷ δωδεκάτῳ ἔτει Ἀδριανοῦ etc.; endlich p. 396. ἐκτίθεται πάλιν δύο μεγίστας ἀποστάσεις . . . μίαν περὶ τοῦ παλαιοῦ Θέωνος ἀναγεγραμμένην ἐν ᾗ φησὶ τῷ τρισκαιδεκάτῳ ἔτει Ἀδριανοῦ etc. Aus dieſer Formel des Commentators, ὁ παλαιός, ſcheint denn doch deutlich hervorzugehen, daß derſelbe unter den älteren Mathematikern nur einen Namensvetter kannte, gleichwie der Zuſatz ὁ μαθηματικός bei Ptolemäus zu einem ähnlichen Schluſſe berechtigt.

einem hohen Grade von Wahrſcheinlichkeit ausſprechen, daß **Theon von Smyrna** in der erſten Hälfte des zweiten Jahrhunderts gelebt hat, und noch ein älterer Zeitgenoſſe von Ptolemäus [59]), gewiß aber ein Zeitgenoſſe und vielleicht gar ein Freund Plutarch's und auch mit dem von dieſem Autor angeführten Aſtronomen Theon [60]) dieſelbe Perſon geweſen iſt.

Theon iſt der Verfaſſer eines Werkes, welches den Titel führt: *Τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν* (expositio, ergänzen die Herausgeber), und den Zweck hatte, nicht etwa, wie die von Blancanus herausgegebenen loca mathematica Aristotelis, Platon's Werke von Anfang bis zu Ende zu durchblättern und jede mathematiſche Stelle zu notiren und zu erläutern, ſondern dem Leſer ſo viel Mathematik gleich von vorne herein und im Zuſammenhange zu lehren, als er nöthig hat, um die in Platon's Schriften vorkommenden Anſpielungen zu verſtehen. Das Werk iſt nicht vollſtändig erhalten; die beiden erſten Theile deſſelben, welche die Arithmetik und die Muſik abhandeln, hat Jsmael Bouillaud (Lateiniſch **Bullialdus**, derſelbe, der ſich die unſägliche Mühe gab, Wallis **Arithmetica Infinitorum** Euklidiſch zu beweiſen) 1644 zu Paris Griechiſch und Lateiniſch nebſt einem brauchbaren Commentare herausgegeben. Mehr hatte er nicht erhalten können; er hatte aber von Iſaak Voſſius gehört, daß der aſtronomiſche Theil des Werks auf der Ambroſiſchen Bibliothek zu Mailand handſchriftlich vorhanden ſei, und verſpricht daher in der Vorrede, denſelben künftig, wenn es ihm möglich werden ſollte, auch einmal herauszugeben. Die Sache iſt ſeitdem verſchollen, und bis jetzt für dieſen Autor weiter nichts geſchehen, als daß ein gewiſſer Gelder, ohne der Sache gewachſen zu ſein [61]), und daher mit kindiſchem Hochmuthe auf ſeinen

---

59) Ptolemäus hat nämlich bereits im 21ſten Jahre Hadrians, alſo fünf Jahre nach der ſpäteſten angeführten Beobachtung Theons, beobachtet. S. Μεγ. Σύντ. X, 1. 2. (p. 239. 240).

60) **Plutarchus de EI Delphico c. 5. De maculis in facie lunae c. 7. 19. 20. 26.** — Vergl. **Bullialdus** in der Vorr. **ad Lect. p. 8. Gelder Praemon. p. VII—XIII.**

61) Ich kann nicht umhln folgende Stelle aus ſeiner Vorrede pag. **XLVII. Cap. III. De doctrina Theonis Smyrnaei**, hier abzuſchreiben: **Nec alia fere ratio fuisse videtur disciplinarum Mathematicarum Platonis, quam Euclidis et Theonis Smyrnaei (?!) aetate. Haec autem ratio non prius mu-**

viel gelehrteren Vorgänger herabblickend, die Arithmetik (ohne die Muſik) noch einmal hat abdrucken laſſen, Lugduni Batav. 1827. 8.

Theon iſt in neuerer Zeit bekannter geworden und wird öfter citirt als Nikomachus, dem er doch in wiſſenſchaftlicher Hinſicht weit nachſteht. Namentlich vermißt man bei ihm durchaus die ſtrenge Ordnung und die ſyſtematiſche Behandlung des Gegenſtandes, die in dem Werke des Nikomachus durchgehend herrſcht, auch hat Theon den Stoff lange nicht ſo erſchöpft, wie der letztgenannte Mathematiker. Als Belag für meine Behauptung in Betreff der Ordnung habe ich nur nöthig, die Überſchriften der Kapitel in dem arithmetiſchen Theile anzuführen; es ſind folgende:

1. Daß die Mathematik nöthig ſei.
2. Über die Arithmetik.
3. Über Eins und die Einheit (περὶ ἑνὸς καὶ μονάδος).
4. Welches das Princip der Zahlen ſei (τίς ἀρχὴ ἀριθμῶν).
5. Über Gerade und Ungerade. Nun wird eingeſchoben
6. Über die Primzahl.
7. Über die zuſammengeſetzte Zahl. Und dann erſt wird fortgefahren
8. Über die verſchiedenen Arten von Geraden. Über gerademal Gerade.
9. Über gerademal Ungerade (ἀρτιοπέρισσοι).
10. Über ungerademal Gerade (περισσάκις ἄρτιοι).
11. Περὶ ἰσάκις ἴσων, d. h. über Quadratzahlen, vergl. 15. 21. 25. 28.
12. Περὶ ἀνισάκις ἀνίσων.
13. Über ἑτερομήκεις, ein ſpecieller Fall des folgenden.
14. Über Parallelogrammzahlen.

---

tata est quam saeculo p. Chr. decimo septimo (!!!), quo Albertus Girardus et Cartesius, invento Arithmetices universalis (Algebram vocant) auxilio, floruerunt, et hinc recentiores Mathematici aliam ratiocinandi viam ingressi sunt. Wenn die Gelehrten ſich ſtreiten, ob Rom im Jahre 752 oder 753 oder 754 erbaut ſei, ſo hat das ſeinen guten Grund. Wenn aber ein Gelehrter (?) in der Geſchichte der letzten Jahrhunderte einen Anachronismus von mehr als vierhundert Jahren macht, ſo iſt das eine Unwiſſenheit, für die ein Schüler, wenn er ſie an den Tag legte, offenbar wegen Faulheit beſtraft werden würde. Warum nicht lieber erſt lernen, und dann lehren? Auf dieſe Stelle iſt nicht einmal anwendbar, was Schiller von jenem kurzen Gedärm ſagt.

15. Über Quadratzahlen ſ. o.
16. Daß die Quadratzahlen die Heteromekes als geometriſche Mittel haben.
17. Über die προμήκεις, einerlei mit 14.
18. Über ebene Zahlen, der allgemeine Begriff, von welchem alle von 11 bis 28 genannten ſpecielle Fälle ſind.
19. Über dreieckige und die folgenden Polygonalzahlen; ihre Entſtehung.
20. Über die folgenden Polygonalzahlen.
21. Περὶ ἰσάκις ἴσων (ſ. 11. 15.) καὶ ἀνισάκις ἀνίσων (ſ. 12.).
22. Über ähnliche Zahlen.
23. Über dreieckige Zahlen, ſ. 19.
24. Über kreis- und kugelförmige, und wiederkehrende Zahlen.
25. Über Quadratzahlen (noch einmal).
26. Über fünfeckige Zahlen.
27. Über ſechseckige Zahlen.
28. Daß eine Quadratzahl aus zwei dreieckigen Zahlen beſteht.
29. Über Körperzahlen.
30. Über Pyramidalzahlen.
31. Über Seiten- und Diagonalzahlen.
32. Über vollſtändige, unvollſtändige und übervollſtändige Zahlen.

Das iſt ein wahres Labyrinth, und mit dem Inhalt ſteht es nicht beſſer. Der Satz z. B., daß die Quadratzahlen durch die Summation der ungeraden Zahlen entſtehen, kommt viermal vor, am Anfange des 15., in der Mitte des 19., am Anfange des 20. und in dem 25. Kapitel, welches letztere weiter nichts enthält, als dieſen zum viertenmal wiederholten Satz. Ich übergehe indeß alles Übrige und begnüge mich hier damit, zwei Stellen herauszuheben, welche Wahrheiten enthalten, die ich bei Nikomachus nicht gefunden habe.

Zunächſt Kap. 20 (p. 55) eine Bemerkung über die Quadratzahlen. Theon ſagt: Jede Quadratzahl iſt entweder durch 3 theilbar, oder ſie iſt, wenn man 1 ſubtrahirt, durch 3 theilbar (d. h. eine Quadratzahl kann nicht die Form $3n + 2$ haben); ferner iſt ſie entweder durch 4 theilbar, oder die um 1 verminderte Zahl iſt durch 4 theilbar (d. h. eine Quadratzahl kann weder die Form $4n + 2$ noch $4n + 3$ haben); und diejenige, welche nach Subtraction der Einheit durch 3 theilbar iſt, iſt immer auch durch 4 theilbar, oder wenn ſie nach Subtraction der Einheit durch 4 theil-

bar iſt, iſt ſie ſelbſt durch 3 theilbar, oder ſie iſt ſelbſt durch 3 und durch 4, oder weder durch 3 noch durch 4 theilbar; dann iſt ſie aber nach Subtraction der Einheit durch 3 und durch 4 theilbar. Die vier letzten Beſtimmungen ſind ſehr ſchlecht ausgedrückt, auch iſt der Text an dieſer Stelle fehlerhaft; dieſe Beſtimmungen, welche übrigens unmittelbar aus den beiden erſten folgen, ſagen ſo viel: es ſind immer zugleich

entweder 1) $\frac{m^2}{3}$ und $\frac{m^2 - 1}{4}$

oder 2) $\frac{m^2}{4}$ und $\frac{m^2 - 1}{3}$

oder 3) $\frac{m^2}{3}$ und $\frac{m^2}{4}$

oder 4) $\frac{m^2 - 1}{3}$ und $\frac{m^2 - 1}{4}$ ganze Zahlen. .

No. 1) begreift die Zahlen $bn + 3$, No. 2) die Zahlen $bn \pm 2$, No. 3) die Zahlen $b\,n$ und No. 4) die Zahlen $bn \pm 1$, wodurch allerdings alle Zahlen erſchöpft ſind. Beſſer finden wir die ganze Sache bei Jamblichus p. 126 ausgedrückt: *πᾶς τετράγωνος ἤτοι αὐτόθεν τρίτον ἔχει, ἢ εἰ μὴ ἔχει, πάντως γε τέταρτον, ἢ εἰ μὴ καὶ τοῦτο, μονάδος ἀφαιρεθείσης ἐκ μὲν τρίτον ἔχοντος τέταρτον ἔχοντα ἀποτελέσει, ἐκ δὲ τέταρτον ἔχοντος τρίτον ἔχοντα, ἐκ δὲ μηδ' ἕτερον, ἀμφότερα. Εἰ δὲ ἔχοι ἀμφότερα, ἔστιν ὅτε ἡ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος ἀμφοτέρων στερίσκει.* Die Ausdrücke *τρίτον, τέταρτον* ſind von Tennulius, der an dieſer Stelle gar nicht weiß, wovon die Rede iſt, ſonderbar falſch verſtanden, indem er ſie das dritte, das vierte Quadrat wiedergiebt [62]).

Eine zweite, aber auch die letzte Erweiterung der Lehre des Nikomachus enthält das Kap. 31. Es heißt Griechiſch *περὶ πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν*. Der Inhalt iſt folgender: „So wie die Zahlen die Eigenſchaften der Dreiecke, Quadrate, Fünfecke u. ſ. w. in ſich tragen, ſo finden wir auch das Verhältniß der Seite und Diagonale (des Quadrats) in ihnen ausgedrückt." Die folgende Darſtellung iſt nun bei Theon nicht ſehr lichtvoll, wenigſtens trägt ſie nicht dazu bei, das Bild zu motiviren. Der Sinn iſt der: in dem geometriſchen Quadrate iſt das Quadrat der Diagonale dop-

---

62) Notae in Jambl. p. 188.

pelt ſo groß, als das Quadrat der Seite. Das läßt ſich allerdings in Zahlen nicht darſtellen. Wohl aber kann man immer Paare von Zahlen finden, ſo daß das Quadrat der einen abwechſelnd um 1 größer und um 1 kleiner iſt als das doppelte Quadrat der andern. Solche Zahlen nun hat Theon im Sinne, indem er lehrt, man ſoll von zwei Einheiten ausgehen, eine als Seite, die andere als Diagonale betrachtend, und dann immer die Summe der Seite und Diagonale gleich einer neuen Seite, die Summe der doppelten Seite und der Diagonale gleich einer neuen Diagonale ſetzen. In der That erhält man auf dem Wege immer Zahlenpaare, welche die Eigenſchaft haben, daß das einfache Quadrat der einen von dem doppelten Quadrate der andern um 1 verſchieden iſt, und zwar ſtets abwechſelnd größer und kleiner. Von zwei Einheiten iſt das klar, alſo ſind ſie die Anfangspuncte der Operation; und zwar iſt das doppelte Quadrat der Seite um 1 größer als das Quadrat der Diagonale. Nun bilde man nach der vorgeſchriebenen Regel die neue Seite $= 1 + 1 = 2$, die neue Diagonale $= 2 \,.\, 1 + 1 = 3$, ſo iſt $2 \,.\, 2^2 = 8$ um 1 kleiner als $3^2 = 9$. Fährt man nun in der Anwendung der Regel fort, ſo wird die dritte Seite $= 2 + 3 = 5$, die dritte Diagonale $= 2 \,.\, 2 + 3 = 7$, ferner $5 + 7 = 12$, $2 \,.\, 5 + 7 = 17$ u. ſ. w. Fährt man ſo beliebig weit, aber in gerader Anzahl fort, ſo iſt die Summe der Quadrate ſämmtlicher Diagonalen genau doppelt ſo groß als die Summe der Quadrate ſämmtlicher Seiten, und die Analogie mit der geometriſchen Figur wird dadurch vollkommen hergeſtellt. Dieſe Spielerei mit Analogien wird aber wichtiger, wenn wir ſie von ihrer wiſſenſchaftlichen Seite ins Auge faſſen, und ſie wird dann eine Methode, alle Auflöſungen in ganzen rationalen Zahlen zu finden, deren die beiden Gleichungen $2t^2 + 1 = u^2$ und $2x^2 - 1 = y^2$ fähig ſind; und zwar ſagt der Satz: wenn m und n reſpective für t und u geſetzt der erſten Gleichung genügen, ſo genügen $m + n$ und $2m + n$ reſpective für x und y geſetzt der zweiten Gleichung; und umgekehrt, genügen p und q für x und y geſetzt der Gleichung $2x^2 - 1 = y^2$, ſo genügen $p + q$ und $2p + q$ für t und u geſetzt der Gleichung $2t^2 + 1 = u^2$. Geſetzt nun, man hätte für eine der beiden Gleichungen verſuchsweiſe die Wurzeln p und q gefunden, ſo hätte man daraus für die andere die Wurzeln $p + q$ und $2p + q$, und daraus wiederum für die erſte die Wurzeln $3p + 2q$ und $4p + 3q$, und nun abermals für die zweite

die Wurzeln $7p + 6q$ und $10p + 7q$ und ſo fort. Nun ergeben ſich aber für die Gleichung $2x^2 - 1 = y^2$ ſofort die Werthe $x = 1$ und $y = 1$, daher erhalten wir nach Theon's Regel folgende Auflöſungen beider Gleichungen

x	y	t	u
1	1	2	3
5	7	12	17
29	41	70	99
169	239	408	577
985	1393	2378	3363

u. ſ. w.

Die Wahrheit der Theonſchen Regel läßt ſich ſehr leicht beweiſen. Denn wenn der vorigen Annahme gemäß $p = t$ und $q = u$ die Gleichung $2t^2 + 1 = u^2$ löſen, d. h. wenn $2p^2 + 1 = q^2$ iſt, und man ſetzt in der zweiten Gleichung, $2x^2 - 1 = y^2$, $x = p + q$, ſo erhält man

$$y^2 = 2p^2 + 4pq + 2q^2 - 1$$
$$\text{aber } q^2 - 1 = 2p^2,$$
$$\text{daher } y^2 = 4p^2 + 4pq + q^2$$
$$y = 2p + q.$$

Hat man dagegen gefunden $2m^2 - 1 = n^2$, und man ſetzt in der Gleichung $2t^2 + 1 = u^2$, $t = m + n$, ſo wird

$$u^2 = 2m^2 + 4mn + 2n^2 + 1$$
$$\text{aber } n^2 + 1 = 2m^2$$
$$\text{alſo } u^2 = 4m^2 + 4mn + n^2$$
$$u = 2m + n.$$

Theon hat alſo, wenn anders dieſe Sache ſeine Erfindung iſt, ein nicht unbedeutendes Problem aus der unbeſtimmten Analytik des zweiten Grades gelöſt, ohne es zu wiſſen. Ich habe dieſe Theorie der Seiten- und Diagonalzahlen außerdem nur noch bei Jamblichus (p. 129) gefunden, und eine Hindeutung darauf liegt in folgenden Worten des Proklus [63]): *διττῶν δὲ ὄντων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν μὲν ἰσοσκελῶν, τῶν δὲ σκαληνῶν, ἐν μὲν τοῖς ἰσοσκελέσιν οὐκ ἄν ποτε εὕροιμεν ἀριθμοὺς ἐφαρμόσαι ταῖς πλευραῖς·*

63) Ὑπόμνημα εἰς Εὐκλ. IV. p. 111.

οὐ γάρ ἐστι τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος, εἰ μὴ λέγοι τις τὸν σύνεγγυς· ὁ γὰρ ἀπὸ τοῦ ζ̄ τοῦ ἀπὸ τοῦ ε̄ διπλάσιός ἐστιν ᾱ δέοντος, d. h. „Es giebt zwei Arten rechtwinkliger Dreiecke, gleichſchenklige und ungleichſeitige; in dem gleichſchenkligen iſt es nicht möglich Zahlen zu finden, welche den Seiten entſprechen; denn es giebt keine Quadratzahl, welche das Doppelte einer Quadratzahl wäre, es ſei denn daß Jemand um 1 verſchiedene Zahlen (eigentlich: zunächſtliegende) meinte; ſo iſt z. B. das Quadrat von 7 das Doppelte des Quadrats von 5 weniger 1.“ Aber keiner der genannten Autoren giebt uns irgend einen Wink darüber, wie man auf dieſe Auflöſung obiger Gleichungen gekommen iſt, vielmehr ſteht dieſelbe in ihrem Reſultate als ganz nackte Wahrheit da.

Und nun noch einen kleinen Beitrag zur Geſchichte der Geſchichte. Theon [64]) ſagt: κεφαλαιώδη καὶ σύντομον ποιησόμεθα τῶν ἀναγκαίων, καὶ ὧν δεῖ μάλιστα τοῖς ἐντευξομένοις Πλάτωνι μαθηματικῶν θεωρημάτων παράδοσιν, ἀριθμητικῶν τε καὶ μουσικῶν καὶ γεωμετρικῶν, τῶν τε κατὰ στερεομετρίαν καὶ ἀστρονομίαν. Zu den Worten ἀριθμητικῶν τε καὶ μουσικῶν macht Bouilland p. 192 folgende Anmerkung: **Quae sola restant theoremata a Theone conscripta; desiderantur enim Geometrica, Stereometrica et Astronomica. Ex hujus *fortasse* autoris scriptis integris corrasit *Michaël Psellus* illa, quae compendioso congessit sub hocce titulo** εὐσύνοπτον σύνταγμα εἰς τὰς τέσσαρας μαθηματικὰς ἐπιστήμας Ἀριθμητικὴν, Μουσικὴν, Γεωμετρίαν καὶ Ἀστρονομίαν **anno a mundo condito juxta Graecum Ecclesiam 6516, id est anno Christi 1008.** Dieſelbe Vermuthung ſpricht er noch einmal in der Vorrede aus p. 7. **Composuerat siquidem Theo in eundem finem tractatus alios de Geometria, Stereometria et Astronomia, quod ipse satis pluribus hujusce libelli locis significavit. Et *forsan* ex integro hoc opere compilavit *Michael Psellus* synopsim a se conscriptam quatuor Mathematicarum scientiarum.** Wahrſcheinlich auf Grund dieſer Hypotheſe, die Bouillaud wenigſtens vorſichtiger Weiſe mit fortasse und forsan einführt, und die in der That ſo ſehr viel eben nicht für ſich hat, ſchreibt Delambre [65]): Son

---

64) Cap. 1. p. 2. Ed. Bull.

65) Hist. de l'Astron. anc. T. II. p. 638.

(Theon's) ouvrage a beaucoup servi à *Psellus*, qui s'en est fait l'abbreviateur. Nun wird dieſe neue Wahrheit auf Delambre's Autorität hin wieder in manches Buch übergehen, deſſen Verfaſſer weder Theon's noch Pſellus Werk geleſen hat. Ich ſagte, Bouillaud's Hypotheſe habe wenig für ſich; denn ein ſo elendes mageres Werk, wie das von Pſellus (herausgegeben von Wilh. Xylander, Griech. u. Lat. Baſel 1554. kl. 8.) konnte eben ſo gut aus jedem andern Autor excerpirt werden, als gerade aus Theon; es iſt ſo ſchlecht, daß es die Autorität, auf die es ſich ſtützt, durchaus gar nicht verräth.

Vielleicht fällt in dieſe oder die nächſtfolgende Zeit das Alter eines gewiſſen Thymaridas, dem die Mathematik manchen Zuwachs zu verdanken ſcheint. Wir kennen den Mann aber nur aus einigen Citaten bei Jamblichus [66]. Um von dem Unbedeutenderen anzufangen, ſo erwähne ich, daß Jamblichus zwei Definitionen von Thymaridas mittheilt; die erſte iſt die: die Einheit iſt die terminirende Größe (περαίνουσα ποσότης) (p. 11); die zweite iſt die, daß Thymaridas die Primzahlen εὐθυγραμμικοὶ, geradlinige, genannt habe (p. 36), weil nur dieſe Zahlen allein ſich nicht als Flächen, d. h. als Producte darſtellen laſſen. Wichtiger aber iſt eine Regel des Thymaridas, welche in die Algebra einſchlägt, und die Jamblichus unter dem ſonderbaren Namen des ἐπάνθημα, das Daranblühen, das Anhaften (von Tennulius florida sententia überſetzt) einführt. Es war nämlich vorher p. 87 geſagt worden: „Bei der bildlichen Darſtellung der Polygonalzahlen bleiben immer zwei Seiten dieſelben, indem jede nach einer Seite hin verlängert wird (μηκυνόμεναι καθ' ἕκαστον); die aber um dieſe liegen, werden durch das Herumſetzen der Gnomones eingeſchloſſen, indem ſie ſich immer ändern, eine im Dreieck, zwei im Viereck, drei im Fünfeck und ſo bis ins Unendliche fort, indem die Benennung der Polygone von der Anzahl der veränderten Seiten immer um 2 differirt." Und da heißt es denn nun p. 88 weiter: „Daher iſt auch die Methode des Epanthema von Thymaridas entnommen. Wenn nämlich gegebene und unbekannte Größen ſich in eine gegebene theilen (d. h. zuſammengenommen dieſer gleich ſind), und eine von ihnen mit jeder

---

66) **Comment. in Nicom. p. 11. 36. 88. 91. 95. Vita Pythag. c. 23. 28. Recens. Pythag. c. 33. 36.**

andern zu einer Summe verbunden wird, ſo wird die Summe aller dieſer Paare nach Subtraction der urſprünglichen Summe, bei drei Zahlen, der zu den übrigen addirten ganz zuerkannt (gleich geſetzt), bei vieren deren Hälfte, bei fünfen deren Drittel, bei ſechſen deren Viertel, und ſo fort." — Tennulius hat, wie aus ſeiner völlig ſinnloſen Überſetzung hervorgeht, den an dieſer Stelle ſehr verſtümmelten Text nicht verſtanden, und auch ſein ſonſt ausführlicher Commentar iſt nicht im Stande ihn an dieſer Stelle gegen den gemachten Vorwurf zu vertheidigen [67]). Um meinen Leſern ein Exempel zu ſtatuiren, wie dieſer Herausgeber ſeinen Autor behandelt, ſchreibe ich die kurze Regel des Epanthema, die ich ſo eben deutſch gegeben habe, nach des Tennulius Text und Überſetzung hier ab:

Ενταῦθεν ἡ ἔφοδος τοῦ Θυμαριδίου ἐπανθήματος ἐλήφθη. Ὡρισμένων γὰρ ἢ ἀορίστων μερισαμένων ὡρισμένον τι, καὶ ἑνὸς οὑτινοσοῦν τοῖς λοιποῖς καθ' ἕκαστον συντεθέντος, τὸ ἐκ πάντων ἀθροισθὲν πλῆθος, ἐπὶ μὲν τριῶν μετὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὁρισθεῖσαν ποσότητα ὅλον τῷ συγκριθέντι προσνέμει, τ' ἀφ' οὗ τὸ λοιπὸν καθ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἀφαιρεθήσεται, ἐπὶ δὲ τεσσάρων τὸ ἥμισυ, καὶ ἐπὶ πέντε τὸ τρίτον, καὶ ἐπὶ ἓξ τὸ τέταρτον, καὶ ἀεὶ ἀκολούθως.	**Hinc etiam cognoscitur ratio floridae sententiae, quam tradidit Thymaridas. Cum enim, ait, finita vel indefinita dividunt aliquid definitum, et unum quodlibet singulis reliquis apponitur, cumulata ex omnibus multitudo, in tribus quidem post priorem definitam quantitatem, totum attribuit concreto, a quo reliquum secundum singula reliqua auferetur, in quatuor vero dimidiam, in quinque tertiam, in sex quartam partem, et ad eandem sequentiam in omnibus proceditur.**

Hätte Tennulius zum Beſten derer, welche nicht Griechiſch ver-

67) Der ganze Commentar, den er zu dieſer Stelle giebt, die manche Gelegenheit zu Erläuterungen darbot, iſt folgender p. 171. 'Ὡρισμένων] **auctor hic usque ad pag. 96. demonstrat proportionem cujusque polygoni et laterum mutandorum.** — 'Ἐπὶ μὲν τριῶν] **in tribus est aliquid definitum.** — 'Ἐπὶ ἓξ τὸ τέταρτον] **quia sexanguli gnomon continet quatuor latera.** Dieſe drei Notizen ſind ein wahres Muſter von Commentar, beſonders die zweite; Tennulius hat wieder nicht einmal von ferne gewittert, wovon die Rede iſt.

ſtehen, die Griechiſchen Wörter mit Lateiniſchen Buchſtaben geſchrieben, ſo wären dieſelben eben ſo gut daran geweſen, wie jetzt mit ſeiner Lateiniſchen Überſetzung. Was nun den Text anlangt, ſo muß es zunächſt ἐντεῦθεν ſtatt ἐνταῦθεν heißen; die aber in der Mitte ausgezeichnete Stelle iſt nach einigen Änderungen und Umſtellungen ſo zu leſen: μετὰ τὴν ἐξ ἀρχῆς ὁρισθεῖσαν ποσότητα ἀφαιρεθεῖσαν, ἐπὶ μὲν τριῶν ὅλον τῷ καθ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν συγκριθέντι προσνέμεται, ἐπὶ δὲ τεσσάρων etc.

Thymaridas hat wahrſcheinlich bei ſeiner Regel an die Gnomones der Polygonalzahlen nicht gedacht, mit denen ſie auch in gar keiner innern Verbindung ſteht, ſondern Jamblichus benutzt nur die zufällige Analogie des Fortſchreitens um $n - 2$, um einen fremdartigen Gegenſtand einzuführen, für deſſen Mittheilung wir ihm indeß allen Dank ſchuldig ſind. Das Epanthema enthält, in Zeichen ausgedrückt, folgende einfache Regel. Wenn eine Anzahl von n Unbekannten, $x, y, y', y'', y''', y''''$ u. ſ. w., in der Art beſtimmt iſt, daß die Summe aller gleich a, die Summe von x in jede folgende ſucceſſive gleich b, b', b'', b''', b'''' etc. iſt, ſo iſt $x = \frac{b + b' + b'' + b''' + b'''' + \ldots - a}{n - 2}$. Werden nun drei Größen geſucht, ſo daß $x + y + y' = a$, $x + y = b$, $x + y' = b'$, ſo iſt $x = b + b' - a$[68]); werden vier Größen geſucht, alſo $x + y + y' + y'' = a$, $x + y = b$, $x + y' = b'$, $x + y'' = b''$, ſo iſt $x = \frac{b + b' + b'' - a}{2}$, bei fünfen $x = \frac{b + b' + b'' + b''' - a}{3}$ und ſo fort. Daß dieſer Sinn, den ich dem Epanthema untergelegt habe, der einzig richtige iſt, beweiſt Jamblichus ſelbſt, indem er die Regel gleich hinterher an zwei Beiſpielen erläutert, von denen ich eines mittheilen will. „Daß aber dieſes Epanthema nicht müßig daſteht (παρέλκει), ſondern auch auf eine arithmetiſche Regel Bezug hat, und uns zu einer ſehr zierlichen Methode der Auffindung führt, wollen wir ſo darthun. Es ſei uns zum Beiſpiel aufgegeben, vier Zahlen zu finden, ſo daß die erſte ſammt der zweiten doppelt ſo groß ſei, als die dritte und vierte zuſammen,

68) Addirt man nämlich die beiden letzten Gleichungen, ſo wird $x + (x + y + y') = b + b'$, oder $x + y + y' = a$, alſo $x + a = b + b'$ und $x = b + b' - a$. Ähnlich bei den folgenden.

die erſte und dritte dreimal ſo groß als die zweite und vierte, und auf ähnliche Weiſe, die erſte und vierte viermal ſo groß als die beiden mittlern, nämlich die zweite und dritte zuſammengenommen, alle zuſammen aber fünfmal ſo groß, als eben dieſe beiden mittlern (was unmittelbar aus der vorigen Bedingung folgt)." Jamblichus wird bei der Ausführung dieſer Aufgabe etwas weitläuftig; ich will kurz den Inhalt angeben, ohne an dem Weſentlichen ſeiner Methode etwas zu ändern. Da hier ein Doppeltes, ein Dreifaches, ein Vierfaches und ein Fünffaches gebraucht wird, ſo ſetze ich die Summe der vier Zahlen gleich $2 . 3 . 4 . 5 = 120$. Da nun die Summe der beiden erſten Zahlen gleich der doppelten Summe der beiden letzten iſt, alſo die dreifache Summe der erſten beiden gleich der doppelten Summe aller vier Zahlen (wenn man nämlich zu beiden Seiten die doppelte Summe der erſten beiden addirt), ſo multiplicire ich die 120 mit 2, und dividire das Product durch 3, ſo habe ich den Quotienten 80 als Summe der erſten beiden Zahlen. Weil ferner die erſte und dritte gleich dem der dreifachen Summe der zweiten und vierten, alſo die vierfache Summe der erſten und dritten gleich der dreifachen Summe aller vier Zahlen iſt, ſo multiplicire ich 120 mit 3, und dividire das Product durch 4, ſo iſt der Quotient 90 die Summe der erſten und dritten. Auf dieſelbe Weiſe erhalte ich, wenn ich 120 mit 4 multiplicire und das Product durch 5 dividire, den Quotienten 96 gleich der Summe der erſten und vierten Zahl. „Da nun," fährt Jamblichus fort, „die vier Zahlen in ihrer Verbindung gefunden, aber noch nicht einzeln geſchieden ſind, ſo giebt uns den Weg zu ihrer Abſonderung von einander das *Epanthema des Thymaridas* an die Hand. Wenn wir nämlich die drei Summen addiren, das heißt 80, 90, 96, und von dieſer Geſammtſumme, 266, die anfangs gegebene („in die vier Zahlen getheilte") Summe 120 ſubtrahiren, ſo erhalten wir den Reſt 146, und dieſes Reſtes Hälfte, weil nämlich vier Zahlen gegeben waren, giebt die zu den übrigen addirte; dieſe Hälfte [69]) aber iſt 73, und das iſt die erſte Zahl, ihr Reſt von 80, nämlich 7, wird alſo die zweite, ihr Reſt von 90, nämlich 17, die dritte, und ihr Reſt von 96, nämlich 23, die vierte

69) Der Schluß von hier an iſt im Griechiſchen Texte p. 92. wieder ſehr verſtümmelt; da die Hauptſache aber gelöſt, und das Übrige nur als ein Anhang zu betrachten iſt, ſo mag ich mich bei der Correctur nicht aufhalten.

Zahl ſein. Dieſes ſind die kleinſten Werthe in ganzen Zahlen, welche die gegebenen Verhältniſſe beobachten; wenn man ſie durch eine beliebige Zahl dividirt oder mit einer ſolchen multiplicirt, ſo werden die dadurch entſtandenen Zahlen ebenfalls der Aufgabe genügen.“

Dieſe Auflöſung iſt ſo einfach und leicht, daß ich es nicht für nöthig halte, unſern modernen Augen zu Gefallen die gegebenen Worte in algebraiſche Zeichen zu überſetzen. Es iſt hinreichend, wenn ich durch Mittheilung dieſer Auflöſung die Richtigkeit meiner Deutung des Epanthema nachgewieſen habe. Wichtiger aber noch als der Inhalt dieſer Regel iſt deren Form, weil darin bereits von bekannten und unbekannten Größen die Rede iſt. Ἀόριστος iſt nämlich, auch bei Diophant, der Kunſtausdruck für eine in allgemeinen Zeichen ausgedrückte Zahl, im Gegenſatz des ὡρισμένος, der begrenzten oder gegebenen Zahl. Alſo hat man vor Diophant reine algebraiſche Operationen gekannt, das heißt, man hat mit einem allgemeinen Ausdrucke für die Unbekannte umzugehen gewußt — wenigſtens in Worten. Es folgt aber aus dem Epanthema nicht als durchaus nothwendig, daß man die Unbekannte auch durch ein allgemeines Zeichen ausgedrückt habe, wie Diophant es thut. Jedenfalls aber iſt dieſes Epanthema ein herrlicher Fund für die Geſchichte der Algebra.

Außer dieſer intereſſanten Mittheilung über Thymaridas enthält der Commentar des Jamblichus wenig Neues, einige einzelne Bemerkungen abgerechnet, die ich kurz erwähnen will.

Jede Zahl mit einer der beiden ihr zunächſt liegenden gleichartigen (d. h. gerade mit geraden, ungerade mit ungeraden) multiplicirt, giebt, wenn man zu dem Producte 1 addirt, ein Quadrat, und zwar geben ungerade Zahlen gerade Quadrate und gerade Zahlen ungerade Quadrate [70]). Das heißt, $a\,(a \pm 2) + 1 = (a \pm 1)^2$.

70) Pag. 127. Dieſe Stelle ſieht bei Tennulius ganz und gar wunderbar aus. Sie ſchließt ſich nämlich unmittelbar an die oben bei Gelegenheit Theon's über die Theilbarkeit der Quadrate durch 3 und 4 mitgetheilte Stelle an, daher ich hier deren letzten Satz wiederhole. Εἰ δὲ ἔχοι ἀμφότερα, ἔστιν ὅτε ἡ ἀφαίρεσις τῆς μονάδος ἀμφοτέρων στερίσκει, καὶ ἅπας ἀριθμὸς τὸν διαφέροντα ἐφ' ἑκάτερα. Ὁπότερον οὖν ὁμογενῆ πολλαπλασιάσας καὶ προλαβὼν μονάδα τετράγωνον ποιεῖ, περισσοὶ μὲν ἀρτίους ποιοῦσι, ἄρτιοι δὲ περισσούς. Es iſt erſtens zwiſchen στερίσκει und καὶ ἅπας ſtatt

Jede dreieckige Zahl, mit 8 multiplicirt und zum Producte 1 addirt, giebt eine Quadratzahl (p. 127).

Wenn man alle Zahlen von 1 bis a und von da wieder zurück von $a - 1$ bis 1 addirt, ſo iſt die Summe gleich a^2. Dieſer Satz iſt bloß eine Auflöſung des Satzes von Nikomachus, daß jede Quadratzahl die Summe von zwei dreieckigen Zahlen iſt, deren eine mit dem Quadrat eine gleiche, die andere eine um 1 kleinere Seite hat. Denn

$$1 + 2 + 3 + \ldots (a-1) + a = \frac{a(a+1)}{2} = a^{\Delta}$$

$$(a-1) + (a-2) + \ldots 3 + 2 + 1 = \frac{(a-1)a}{2} = (a-1)^{\Delta},$$

nach Nikomachus aber iſt $a^{\Delta} + (a-1)^{\Delta} = a^2$.

Bei Jamblichus (p. 107) lautet der Satz wörtlich ſo: „Die

des Komma ein Punct zu ſetzen, zweitens zwiſchen ἑκάτερα und ὁπότερον jede Interpunction wegzuſtreichen, drittens ὁποτερονοῦν ſtatt ὁπότερον οὖν, und viertens προσλαβὼν ſtatt προλαβὼν zu leſen. Tennulius überſetzt aber friſch darauf weg: . . . . et omnis numerus ultrinsecus differentem. Utrumvis igitur (οὖν) homogeneum multiplicans et anticipans (προλ.) unitatem, facit quadratum. Es müßte vielmehr, wörtlich überſetzt, heißen: Et omnis numerus utrimque adjacentium homogeneorum utrumlibet multiplicans et assumens unitatem, facit quadratum. Sonderbar genug iſt es indeß, daß Tennulius aus ſeinem falſchen Texte und falſcher Überſetzung den richtigen Satz herausbringt, nur in anderer Form. Er ſagt nämlich p. 188. Si quadrati homogenei sese, hoc est par parem, impar imparem produxerint, latus productae summae erit quadratum, si unitatem anticipaverit, ut quadrati 4 et 16 pares in se ducti faciunt 64, cujus latus est 8; huic si addas unitatem, habes imparem quadratum 9 ortum ex paribus. 16 ducti in 36 faciunt quadratum 576 cujus latus 24, si unitate augeatur, orietur impar quadratus 25. Impares quadrati 9 et 25 producunt 225 cujus latus 15 unitate auctum 16 facit quadratum parem. 25 et 49 faciunt 1225 cujus latus 35 auctum unitate facit similiter quadratum parem 36. Der Verfaſſer ſcheint nicht zu wiſſen, daß, wenn man zwei Quadratzahlen mit einander multiplicirt, und aus dem Product die Wurzel zieht, man daſſelbe Reſultat viel einfacher gehabt hätte, wenn man gleich die beiden Wurzeln der Quadrate mit einander multiplicirt hätte, wie es Jamblichus auch vorſchreibt, der an ein Multipliciren von Quadratzahlen und an ein Wurzelausziehen mit keiner Sylbe denkt. Außerdem hat Tennulius vergeſſen zu erwähnen, daß die beiden geraden oder ungeraden Zahlen nicht beliebig zu nehmen ſind, ſondern einander zunächſtliegende ſein müſſen.

Einheit iſt das Grundelement bei der Erzeugung der Quadratzahlen . . . Von ihr, wie aus der Schranke (ὕσπληγξ), geht man urſprünglich aus Behufs der Erzeugung irgend einer Quadratzahl, gewiſſermaßen bis zu dem Wendepuncte der Bahn (καμπτήρ), der Seite des zu erzeugenden Quadrats, und wiederum geſchieht die Rückkehr zu ihr, wie nach einem Ziele (νύσσα), indem man alle Zahlen und ſie ſelbſt (die Einheit) zertheilt (d. h. zweimal berührt), außer dem Wendepuncte, welcher die Seite des zu bildenden Quadrats iſt.“

Jamblichus hat ſich alſo die Zahlen bildlich in Geſtalt eines Circus hingeſtellt gedacht, den man durchlaufen muß, um die verlangte Quadratzahl zu erhalten, etwa, um ein Beiſpiel anzuführen, ſo:

(ὕσπληγξ) 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6 . .
7 (καμπτήρ)
(νύσσα) 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6 . .

p. 113. macht Jamblichus eine ähnliche aber nicht ſo glückliche Application dieſer Rennbahn-Idee auf die Heteromekes. Dieſe unterſcheiden ſich von den Quadratzahlen aber in folgenden Puncten: 1) daß ſie nicht zu demſelben Ziele, der Einheit, zurückkehren, von dem ſie ausgegangen ſind, ſondern bei der Zwei aufhören, und 2) daß bei ihnen der Wendepunct nicht auf einer Zahl, ſondern auf zweien, nämlich ihren beiden Factoren beruht, daß alſo dieſe beiden nur einmal geſetzt werden dürfen; das heißt, wiſſenſchaftlich ausgedrückt, $a\,(a + 1)$ iſt gleich der Summe der Zahlen von 1 bis $(a + 1)$ plus der Summe der Zahlen von $(a - 1)$ bis 2; und bildlich dargeſtellt giebt es eine Circusruine dergeſtalt

1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . .
6
7
2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . .

Es iſt dieſes eine zu weite Ausſpinnung des ganz angenehmen Witzes über die Quadratzahlen, um die ſich allerdings ſchon Mancher müde gejagt und gerechnet hat, ohne gerade immer bis an die νύσσα zu gelangen.

Pag. 124 — 126 enthalten Bemerkungen, welche eine etwas tiefere Einſicht in das Decimalſyſtem verrathen, indem hier die Potenzen von 10 als ebenſo viele Einheiten höherer Ordnungen erſcheinen. Ich will die Stelle, obgleich ſie nach Jamblichus Manier in ihrer Weitläuftigkeit manchen unnützen Zuſatz enthält, wörtlich überſetzen: „Eine bedeutende Auszeichnung bringt der Dekas die nach dem eben beſchriebenen Doppellauf (*δίαυλος* iſt eben jener Circus) angeſtellte Bildung der Quadratzahlen, wenn man in der erſten Zahlenſtufe, welche die Zahl begrenzt, von der Einheit bis zu dieſer fortſchreitet, und wiederum von ihr, als einer Zahl, welche die Einer von den Zehnern abſondert, zurück, gleichſam von einer Einheit zu einer andern. Es entſteht nämlich aus der Dekas, gleichſam durch Zuſammenreihung [71]), die Quadratzahl 100, die ebenfalls ein Grenzglied iſt zwiſchen den Zehnern und Hunderten, und von den Pythagoräern die Einheit des dritten Ganges (*μονὰς τριωδουμένη*) genannt wird, gleich wie die Zehn die Einheit des zweiten Ganges (*δευτερωδουμένη*). Die Seite des Quadrats 100 wird eben die 10 ſein, und ihr Quadrat die Summe, welche entſteht, wenn man zu ihr alle vorhergehenden Zahlen, doppelt genommen, addirt (*καὶ δύναμις αὐτῆς τὸ συγκεφαλαίωμα τῆς ἐπὶ ταύτῃ ἐπισωρείας τῶν ἐντὸς αὐτῆς ἀριθμῶν δὶς λαμβανομένων*). So nämlich gleicht, wie ich geſagt habe, dieſe Aneinanderreihung der Zahlen dem Wettlauf auf der Rennbahn, ſowohl hinſichts des Auslaufens von dem Anfange, gleichſam aus der Schranke, als auch hinſichts der Rückkehr von der Säule, gleichſam von dem Wendepfeiler. Wenn wir aber die Dekas nicht mehr als Wendepfeiler, ſondern als Schranke gebrauchen, und der Anfang des Auslaufs von ihr bis zur Hekontas geſchieht, von welcher wir wiederum bis zur Dekas zurückgehen, ſo geht aus der Addition als erſte Zahl (? *ὁ πρῶτος ἀριθμός* ?) die Einheit des vierten Ganges (*τετρωδουμένη μονάς*) hervor, welche ebenfalls ein Grenzglied zwiſchen

71) Im Texte ſteht: *ἔσται γὰρ ἐκ τῆς, ὡς ἀποσυνθέσεως τετράγωνος ϱ̄ ὁ ἀριθμός.* Vielleicht iſt zu leſen: *ἔσται γὰρ ἐκ τῆς ῑ* (d. i. *δεκάδος*) *ὡς ἀπὸ συνθέσεως ὁ τετράγωνος ἀριθμὸς ϱ̄.* Daß Tennulius auch ſo geleſen, die abgedruckten Worte alſo nur Druckfehler ſind, ſcheint ſeine Überſetzung anzudeuten: Ex *denario* enim tanquam compositione orietur numerus quadratus 100. Es wäre demnach nur im Drucke das ῑ zu einem Komma geworden, und die Worte *ἀπὸ συνθέσεως* in eins zuſammengelaufen.

den Hunderten und Tauſenden iſt (im Texte μυριάδων fehlerhaft für χιλιάδων), aber die Quadratwurzel der Zahl 1000 iſt nicht 100; denn 1000 iſt gar keine Quadratzahl, ſondern ein Kubus von der Seite 10. Um ſie aber in der Ebene als Parallelogramm (προμηκικῶς) darzuſtellen, werden ihre Seiten 100 und 10 ſein, ſo daß es klar iſt, daß die Hundert noch der Zehn bedarf, um eine Seite zu werden, (myſtiſch). Wenn wir wiederum von der Hundert als Schranke ausgehen und die nach ihr folgenden Hunderter addirend bis zu 1000 fortſchreiten und von da als Wendepunct ebenſo wieder bis zu 100 als Ziel zurückgehen, ſo iſt die Summe 10000 eine *Einheit des fünften Ganges* (πεντωδουμένη μονάς), die als Quadrat die Seite 100, als Parallelogramm die Seiten 1000 und 10 hat. So bedarf die Zehn, um in dieſer Nachahmung des Wettlaufs Seitenzahl zu werden, keiner der übrigen Grenzglieder, ich meine der Hundert oder der Tauſend; dieſe dagegen, damit ihnen daſſelbe zu Theil werde (damit ſie Seitenzahlen werden), bedürfen durchaus der Zehn; daher ertheilen wir gerade ihr dieſes Lob.“

Es iſt alſo bildlich dargeſtellt

1—2—3—4—5—6—7—8—9⌝
10 = 100 = 10 · 10
1—2—3—4—5—6—7—8—9⌟

10-20-30-40-50-60-70-80-90⌝
100 = 1000 = 100 · 10
10-20-30-40-50-60-70-80-90⌟

100-200-300-400-500-600-700-800-900⌝
1000 = 10000 = 100·100
100-200-300-400-500-600-700-800-900⌟ = 1000·10.

Jamblichus ſcheint nicht bemerkt zu haben, daß dieſelbe Erſcheinung ſich bei jeder andern Zahl zeigt, und daß ſie nur inſofern ein eigenthümliches ἐγκώμιον der Zehn iſt, als deren Potenzen die Grenzen in der Reihe der gewöhnlichen Zahlenſyſteme abgeben. Denn da die Summe der Zahlen von 1 bis a und von da zurück bis 1 gleich a^2 iſt, ſo iſt nothwendig dieſelbe Summe, wenn man jedes Glied mit a multiplicirt, das heißt, wenn man von a die Vielfachen durchlaufend bis a^2 und von da bis a zurückgeht, gleich a^3 u. ſ. w.

u. ſ. w. So iſt z. B. der Kubus 125 aus der Summation folgender Rennbahn entſtanden:

5 . . . 10 . . . 15 . . . 20 . .
                                        25
5 . . . 10 . . . 15 . . . 20 . .

was ganz daſſelbe iſt, als wenn ich die Summe der Rennbahn

1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . .
                                  5
1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . .

welche gleich 25 iſt, mit 5 multiplicire.

Indeß wird Jamblichus durch dieſe Darſtellung der Zehn und ihrer Potenzen als Einheiten höherer Ordnungen auf folgenden hübſchen Satz geführt (p. 145. 146): Wenn man die drei Zahlen 1, 2, 3 zu einander addirt, ſo erhält man die Summe 6. Dieſelbe Summe erhält man durch die Addition jeder folgenden Copulation von drei Zahlen, ohne eine zu überſpringen oder doppelt zu nehmen, wenn man immer ſtatt der Zehner ihre entſprechenden Einer ſetzt, oder die Zehn als eine Einheit höherer Ordnung betrachtet, was Pythagoras, wie oben erwähnt, gethan hat. (Ἐπεὶ δὲ ἑξάδος ἀποτελεστική ἐστιν ἡ πρώτη παρ᾽ οὐδὲν ἀπὸ μονάδος συζυγία, ἡ πρώτη α̅. β̅. γ̅ εἰδοποιήσει τὰς ἑξῆς αὐτῇ, μηδενὸς ὅρου κοινοῦ λαμβανομένου, μηδὲ μὴν παραλλειπομένου, ἀλλὰ μετὰ τὴν α̅. β̅. γ̅ λαμβανομένης τῆς δ̅. ε̅. ϛ̅, εἶτα ζ̅. η̅. ϑ̅ καὶ ἑξῆς ἀκολούθως. Πᾶσαι γὰρ αὗται ἑξάδες γενήσονται, μεταλαμβανούσης τὸν μονάδος τόπον ἀεὶ τῆς δεκάδος, τουτέστιν, εἰς μονάδα ἀναγομένης). Wir würden den Satz ſo ausdrücken: Wenn man drei aufeinander folgende Zahlen, deren größte durch 3 theilbar iſt, zu einander addirt, von der Summe die Zifferſumme, von dieſer Zifferſumme abermals die Zifferſumme nimmt, und ſo fort, ſo kommt man endlich immer einmal auf eine Zifferſumme, welche 6 iſt. Z. B.

$$997 + 998 + 999 = 2994$$
$$2 + 9 + 9 + 4 = 24$$
$$2 + 4 = 6$$

Solche Vorſtellungen waren für die Griechen umſtändlicher und ſchwieriger, als für uns, weil ſie das Bild unſerer Ziffern nicht vor dem Auge und im Sinne hatten, ſondern wirklich erſt eine Umgeſtaltung der Zehn zu einer Einheit vornehmen mußten, indem ſie $\overline{\alpha}$ ſtatt $\overline{\iota}$, $\overline{\beta}$ ſtatt $\overline{\varkappa}$ u. ſ. w. ſetzten.

Als Privatanſicht des Jamblichus führe ich nur noch an, daß er die Zahl 2 für keine Primzahl hält. Er ſagt nämlich p. 42: Κἀνταῦθα δὲ ὁ Εὐκλείδης προδηλότατον ἁμάρτημα παρέχει, τὴν δυάδα τῶν πρώτων καὶ ἀσυνθέτων οἰόμενος εἶναι, ἐπεὶ μονάδι μόνῃ μέτρῳ χρῆται, ἐκλελησμένος, ὅτι ἡ μὲν τοῦ ἀρτίου εἴδους ἐστίν. „Auch hier legt Euklides einen ganz augenſcheinlichen Irrthum an den Tag, indem er die Zwei für eine Primzahl hält, weil ihr einziges Maaß die Einheit iſt, und überſehen hat, daß ſie zu der Klaſſe der geraden Zahlen gehört.“ Nach Nikomachus I, 11 aber gehören, wie wir oben geſehen haben, die Primzahlen zu den ungeraden. Hier müſſen wir denn aber doch den Vater Euklides gegen Jamblichus in Schutz nehmen.

Aber es iſt Zeit, dieſen Gegenſtand zu verlaſſen. Wir ſind nachgerade in eine Periode gerathen in welcher wichtigere Dinge unſrer warten, nämlich in das muthmaßliche Zeitalter Diophants, und ich will nicht länger ſäumen den Leſer in die Darſtellung zunächſt der äußern Schickſale dieſes in jeder Beziehung merkwürdigen Mathematikers und ſeines berühmten Werkes einzuführen. Aus einem doppelten Grunde dagegen laſſe ich alle ſpäteren Griechiſchen Arithmetiker alten Styls hier unberührt, einestheils, weil ſeit dem vierten Jahrhundert in Griechenland nichts mehr iſt erfunden worden, und die ſpäteren Werke immer mehr zu bloßen Compilationen ſchon bekannter Sachen aus älteren Werken herabſinken, andrerſeits aber, weil ich überhaupt die Geſchichte der Griechiſchen Arithmetik hier nur aus dem Geſichtspuncte aufgefaßt habe, inſofern die Diophantiſche Algebra auf ſie als Vorarbeit ſich gründet. Darum jetzt genug davon.

Sechstes Kapitel.

Hiſtoriſches über Diophantus und ſeine Schriften.

Trotz des allgemeinen Intereſſes, deſſen das Werk Diophant's ſeit dem erſten Augenblicke ſeines Wiedererſcheinens in Europa ſich bei allen Mathematikern zu erfreuen hatte, iſt es bis jetzt weder gelungen, das über dem Zeitalter und den äußern Lebensverhältniſſen des Verfaſſers verbreitete Dunkel zu zerſtreuen, noch hat man vermocht, den Inhalt ſeines Werks, welches von den übrigen mathematiſchen Schriften der Griechen ſo ganz abweichend iſt, mit den frühern Erzeugniſſen dieſer Nation in einen innern wiſſenſchaftlichen Zuſammenhang zu bringen. So ſehr wir indeß den erſtgenannten Mangel bedauern, ſo wenig Grund haben wir uns über dieſes Dunkel, in welches die Perſon des Verfaſſers gehüllt iſt, zu wundern. Aus demſelben Grunde nämlich, aus welchem es geſchah, daß Diophant gerade der letzte der Griechiſchen Mathematiker iſt, der den Europäern nach dem Wiederaufblühen der Wiſſenſchaft bekannt wurde, aus demſelben Grunde, ſage ich, war er der erſte, den ſeine Landsleute vergaßen, und iſt ihnen eigentlich immer verborgen geblieben, ſo daß ſie uns keine Notiz über ihn hinterlaſſen haben. Und dieſer Grund iſt bei den Einen wie bei den Andern kein anderer als der, daß man ſein Werk nicht verſtand. Euklid's Elemente haben ſich in hundert und abermals hundert Abſchriften erhalten, von Apollonius Kegelſchnitten ſind nicht zufällig gerade die *letzten* vier Bücher verloren gegangen, ſondern darum, weil ſie zu ſchwer waren; und indem wir bedauern, daß das Werk Diophant's in ſo wenigen noch überdies unvollſtändigen und uncorrecten Exemplaren auf unſere Zeit gekommen iſt, können wir uns auf der andern Seite gratuliren, daß wir überhaupt irgend etwas von ihm dem allgemeinen Schiffbruche abgewonnen haben.

Die Zweifel über Diophant beginnen, wie Coſſali [1]) geiſtreich bemerkt, bereits bei der letzten Sylbe ſeines Namens. Man weiß nicht recht, ob er Διόφαντος oder Διοφάντης geheißen. Die Manuſcripte zeigen den Namen nur im Genitiv, Διοφάντου, der die Endung des Nominativs unbeſtimmt läßt. In den Ausgaben von Suidas Wörterbuch ſteht in dem Artikel Ὑπατία, auf den wir ſogleich noch einmal zurückkommen werden, der Accuſativ Διοφάντην, aber Bachet [2]) verſichert, daß zwei vorzügliche Pariſer Handſchriften Διόφαντον leſen. Außerdem hat Suidas den Artikel Διόφαντος, ὄνομα κύριον, nicht aber Διοφάντης; in einem dritten Artikel dagegen, Λιβάνιος, wo der Name Diophant auch vorkommt, ſteht wieder der unglückliche Genitiv. Dazu kommt, daß uns mehre Männer im Alterthum mit Namen Diophantos bekannt ſind, aber kein einziger Diophantes, wenn auch nicht, wie Bachet am angeführten Orte fälſchlich behauptet, Διοφάντης eine ungriechiſche Form iſt; man braucht gegen dieſe Behauptung nur an Συκοφάντης, Ἱεροφάντης etc. zu erinnern. Ich will hier noch folgendes erwähnen. Als Autorität für die Form auf της wird häufig Pococke in ſeiner Überſetzung der Geſchichte der Dynaſtien von Abulfaraj angeführt, wo er allerdings zweimal Diophantes ſchreibt. Man hätte aber ſtatt deſſen beſſer gethan, das daneben gedruckte Original zu berückſichtigen. Abulfaraj erwähnt unſern Autor zweimal, einmal p. 141, wo er ديوفنطس (דיופנטס) ſchreibt, alſo die letzte Sylbe in dubio läßt, das zweitemal p. 388, wo er ganz unzweifelhaft ديوفنطوس (דיופנטוס) ſchreibt. Demnach iſt Abulfaraj gerade umgekehrt eine Autorität für die Form Diophantos, und das um ſo mehr, als auch die Leſeart ديوفنطس, obgleich ſie den Vocal der letzten Sylbe nicht ausdrückt, doch immer mehr auf die Griechiſche Endung ος, als auf die Endung ης deutet, welche letztere die Araber gern durch يس (îs) wiedergeben [3]). Der Verfaſſer der Biblio-

---

1) Origine dell' Alg. T. 1. p. 61. Su la desinenza del nome comincia la diversità tra gli scrittori.

2) Dioph. Alex. Arithm. Paris. 1621. — Epist. ad Lect. p. 1.

3) So heißt z. B. Nikomachus نيقوماخس Abulf. p. 94. نيقومخس Casiri I. p. 390; ebenſo Auguſtus اغسطس Paulus neues Repert. I. 152. Autolykus اوطولوقس Ariſtarchus ارسطرخس Garz de interprett. Eucl.

theca philosophorum bei Casiri [4]) ſchreibt, wie Abulfaraj an der erſten Stelle, ديوفنطس. Unter den älteren Autoritäten iſt noch Bombelli zu nennen, der in der Vorrede ſeiner 1572 herausgegebenen Algebra Italieniſch **Diofante** ſchreibt, alſo Griechiſch Διοφάντης vorausſetzt. Aber Xylander ſchreibt **Diophantus**, ebenſo Bachet, und dieſe muthmaßlich richtige Form des Namens hat denn auch in neuern Zeiten den vollkommenſten Sieg über ihre Nebenbuhlerin davongetragen.

Wichtiger ſind die Unterſuchungen über Diophant's Zeitalter. Ohne Angabe eines Motivs ſetzt ihn Abulfaraj in die Regierungszeit des Kaiſers Julianus Apoſtata (361—363), eine Annahme über welche wir weiter unten mehr ſagen werden. Ebenſo willkührlich läßt Bombelli ihn unter Antoninus Pius (138—161) leben, und obgleich man auch das Fundament dieſer Annahme nicht kennt, ſo haben ſich doch Bombelli's Anſicht Jacob de Billy, Blancanus, Voſſius, Dechales, Heilbronner und Andere angeſchloſſen. Bachet hält unſern Autor für identiſch mit einem Aſtrologen dieſes Namens unter Tiberius (14—37), den Lucillius in einigen Gedichten der Anthologie lächerlich macht; aber auch dieſe Annahme iſt willkührlich, indem ſie ſich bloß auf die Gleichheit des bei den Griechen nichts weniger als ungewöhnlichen Namens ſtützt; dagegen iſt die Annahme der Jdentität unſeres tiefen Mathematikers mit jenem elenden lächerlichen Aſtrologen des Erſteren unwürdig [5]). Stevin

Arab. p. 2. Hipparchus ابرخس Casiri I. 345. (woraus die ſonderbare in ältern aus Arabiſchen Quellen gefloſſenen aſtronomiſchen Schriften ſich findende Verſtümmelung Abrachis entſtanden iſt). Dagegen heißt Archimedes ارشيميديس, Empedokles امبيذقليس, Ariſtoteles ارسطوطاليس Abulf. p. 50. 64. u. ſ. w. Eine große Conſequenz muß man indeß hierin nicht ſuchen; Euklides heißt immer (ohne I) اقليدس oder اوقليدس, und ſo manche andere. Sonderbar entſtellt findet man den Namen unſers Autors in Bauer's Überſetzung des Abulf. Th. 1. S. 129., nämlich in Diophantra, ohne daß dieſe Schreibart in dem zahlreichen Druckfehlerverzeichniſſe als ſolcher aufgeführt wäre. Dagegen ſchreibt Bauer an der zweiten Stelle richtig, dem Arabiſchen Texte, nicht Pococke, folgend, Diophantus. II, 92.

4) T. 1. p. 371. 434.

5) Über alle dieſe erwähnten Angaben vergleiche *Abulfar.* hist. dyn. p. 94. — *R. Bombelli* Algebra praef. — *J. Blancanus*, chron. Math. p. 51. — *G. J. Vossius* de univers. Math. nat. et const. p. 432. — *Bachet* Dioph.

endlich ſetzt ihn gar nach Mohammed ben Muſa, dem bekannten Arabiſchen Algebriſten im Anfange des neunten Jahrhunderts [6]). Wollen wir es über uns nehmen, in dieſen bunten Wirrwarr einiges Licht zu bringen, ſo müſſen wir uns durchaus vorher nach neuen Elementen zur Beſtimmung des möglichen Zeitalters unſeres Autors umſehen, deren wir zum Glücke nicht ganz entblößt ſind. Zunächſt kommt uns für den Augenblick ſehr willkommen das einzige Citat eines früheren Mathematikers, welches in Diophant's Schriften ſich findet, nämlich des Hypſikles im achten Satze der Schrift über die Polygonalzahlen. Leider aber kennen wir auch das Alter des Hypſikles nicht genau. Er iſt jedenfalls jünger als Apollonius, den er in der Vorrede zu ſeiner Schrift über die regelmäßigen Körper, welche gewöhnlich fälſchlich als das vierzehnte und funfzehnte Buch der Euklidiſchen Elemente erſcheint, citirt. Ferner nennt Hypſikles im fünften Satze des zweiten (funfzehnten) Buchs ſeinen Lehrer Iſidorus, in Ausdrücken, die auf einen berühmten Mann dieſes Namens ſchließen laſſen [7]), und dieſer Umſtand macht es nicht unwahrſcheinlich, daß der hier genannte Iſidorus einerlei ſei mit demjenigen, von dem Suidas unter dieſem Artikel ſagt: Ἰσίδωρος φιλόσοφος ὃς ἐφιλοσόφησε μὲν ὑπὸ τοῖς ἀδιλφοῖς, εἴπερ τις ἄλλος, ἐν τοῖς μαθήμασιν. Was ſoll die Redensart heißen: ὑπὸ τοῖς ἀδιλφοῖς? Fabricius [8]) macht hier die zwar gewagte, aber nicht ganz verwerfliche Conjectur, Iſidorus habe unter den beiden gemeinſchaftlich

---

Arithmet. epist. ad Lectorem. — *Cossali* origine T. 1. p. 62—65. — D. Schulz Dioph. arithm. Aufg. Vorr. S. V—XV. — *Heilbronner* hist. math. p. 338—340. — *Montucla* hist. des Math. T. 1. p. 320. — *Dechales* curs. Math. T. 1. p. 30. — *Frobesii* introd. in math. p. 126. — Chr. Wolff kurzer Unterr. v. math. Schriften S. 34. u. ſ. w.

6) S. Les Oeuvres Mathem. de *Sim. Stevin*, augm. par Alb. Girard. Leyden. 1634. fol. T. 1. p. 62. Stevin nennt hier unter der Überſchrift: Des inventeurs de ces reigles de trois des quantitez Mohammed ben Muſa den Erfinder der quadratiſchen Gleichungen, und fügt dann hinzu: Quant à Diophant, il semble qu'en son temps les inventions de Mahomet ayent seulement esté cognues, comme se peult colliger de ses six premiers livres.

7) Er ſagt nämlich: ἡ δὲ εὕρεσις, ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον.

8) Bibl. graeca T. II. p. 91. — Ed. Harles. T. IV. p. 20.

die Kaiſerwürde bekleidenden Brüdern Antoninus Philoſophus und Lucius Verus, alſo etwa in den Jahren 161 bis 180 unſerer Zeitrechnung gelehrt, ſo daß wir alſo ſeinen Schüler Hypſikles etwa gegen das Jahr 200 placiren könnten; eine Annahme, die zwar wegen der zweideutigen Ausdrucksweiſe bei Suidas und der nicht ſtrenge erwieſenen Identität des von dieſem genannten Iſidorus mit dem Lehrer des Hypſikles keinesweges objectiv ſicher, aber doch möglich iſt, und die durch einen innern Grund unterſtützt wird. Hypſikles iſt nämlich, nach Diophant's Ausſage, der Urheber eines Satzes, den wir in etwas unvollkommener Geſtalt aber ſchon bei Nikomachus und bei Theon von Smyrna antreffen, des Satzes nämlich von der Bildung der Polygonalzahlen durch die Summirung arithmetiſcher Progreſſionen; die beiden Umſtände nun, einerſeits, daß Hypſikles den Satz des Nikomachus verbeſſert giebt, andrerſeits, daß der ſo gewiſſenhaft citirende Theon (Nikomachus citirt ſelten) Hypſikles nicht nennt, laſſen mit einiger Gewißheit ſchließen, daß Hypſikles jünger iſt, als die beiden genannten Mathematiker; nun lebte Theon, wie wir oben geſehen haben, unter Hadrian, ums Jahr 130; demnach ſtimmt dieſes Argument auf eine auffallende Weiſe mit der von Fabricius auf einem völlig abweichenden Wege gewonnenen Conjectur überein.

Noch ſchlimmer ſtand es bisher um die Feſtſtellung der zweiten Grenze für die Beſtimmung von Diophant's Zeitalter, für welchen Zweck man faſt ausſchließlich eine Stelle in dem oben erwähnten Artikel Ὑπατία aus dem Lexicon des Suidas verwandte. Es heißt hier nämlich: Ὑπατία ἡ Θέωνος τοῦ Γεωμέτρου θυγάτηρ τοῦ Ἀλεξανδρέως φιλοσόφου καὶ αὐτὴ φιλόσοφος, καὶ πολλοῖς γνώριμος· γυνὴ Ἰσιδώρου τοῦ φιλοσόφου· ἤκμασεν ἐπὶ τῆς βασιλείας Ἀρκαδίου· ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διοφάντην τὸν ἀστρονομικόν. Κανόνα εἰς τὰ κωνικά· Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. Ganz augenſcheinlich aber iſt dieſe Stelle von ἔγραψεν an corrumpirt, obgleich alle Ausgaben, die ich verglichen habe, gleichförmig leſen. Erſtens giebt Διοφάντην τὸν ἀστρονομικόν keinen Sinn; ein Aſtronom heißt nicht ἀστρονομικός ſondern ἀστρόνομος. Was ſollen ferner die Worte, κανόνα εἰς τὰ κωνικά· Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα, eine Tabelle (oder ein Verzeichniß) zu den Kegelſchnitten und einen Commentar des Appollonius, ſagen? Die unpaſſende Ausdrucksweiſe dieſer Stelle hat man ſchon längſt gefühlt, und daher haben einige Herausgeber, ohne daß ſie den Text zu ändern wagten, ſo zu

interpungiren vorgeſchlagen: ὑπόμνημα εἰς Διοφάντην· τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα· εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. „Einen Commentar über Diophant; die aſtronomiſchen Tafeln; einen Commentar über die Kegelſchnitte des Apollonius.“ Dieſer Sinn wäre allerdings ſchon viel beſſer, als der durch die Mannſcripte dargebotene, und in dieſer Form wird die Stelle des Suidas dann auch ziemlich allgemein als ein testimonium de **Diophanto** angeführt. Nun wurde Hypatia im Jahre 415 zerriſſen, demnach hätte Diophant ſpäteſtens um das Jahr 400 gelebt; und ſo wird die Grenze faſt in allen Geſchichtsbüchern auf Autorität dieſer Stelle hin angenommen, ſelbſt von dem gründlichen und gelehrten Coſſali [9]). Indeß iſt auch an dieſer Correctur des Textes noch mancherlei auszuſetzen. Erſtens iſt der Ausdruck ὑπόμνημα εἰς Διοφάντην, „ein Commentar zum Diophant,“ ganz ungriechiſch; der Grieche nennt nicht, wie wir in den Schulen von unſerm Scheller, Paſſow, Zumpt u. ſ. w. zu ſprechen gewohnt ſind, das Buch ſchlechthin bei dem Namen ſeines Verfaſſers. Es würde jedenfalls, wenn unſer Arithmetiker gemeint wäre, heißen ὑπόμνημα εἰς Διοφάντου ἀριθμητικά. Sodann deutet der Ausdruck τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα darauf hin, daß die aſtronomiſchen Tafeln der Hypatia allgemein bekannt und namentlich noch zu Suidas Zeit in Gebrauch geweſen ſeien. Wir haben aber keine einzige anderweitige Nachricht nur für das einſtige Vorhandenſein ſolcher Tafeln, geſchweige denn, daß ſich dieſelben ſechshundert Jahre im Gebrauche erhalten hätten. Gegentheils wiſſen wir mit Beſtimmtheit, daß ſeit Ptolemäus Zeiten kein anderes aſtronomiſches Werk mehr aufgekommen iſt. Demnach iſt es wohl keine Frage, daß die Küſterſche Conjectur [10]) vor jener bedeutend den Vorzug verdient, welche ſo zu leſen vorſchlägt: ὑπόμνημα εἰς Διοφάντου τὸν ἀστρονομικὸν κανόνα· εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. Dadurch werden Hypatia's Schriften auf einen Commentar über Diophant's aſtronomiſche Tafeln, und auf einen Commentar über Apollonius Kegelſchnitte reducirt. Auf dieſe Leſart hat, ſoweit dieſelbe für die Beſtimmung von Diophant's Zeitalter von negirender Wichtigkeit iſt, meines Wiſſens erſt ein einziger Schrift-

---

9) Origine T. I. p. 62.

10) Suidae Lexicon etc. ill. Ludolphus Kusterus. Cantabrigiae. 1705. III. Tomi. fol.

ſteller Rückſicht genommen, nämlich der verdiente Otto Schulz in ſeiner unten zu nennenden Überſetzung Diophants [11]). Indem wir nämlich mit Hilfe dieſer wahrſcheinlich richtigen Conjectur Küſter's über die Schriften der Hypatia ins Klare kommen, gerathen wir dadurch gleichzeitig in Betreff Diophant's wieder ganz ins Dunkle. Denn indem nun von einem aſtronomiſchen Werke Diophant's die Rede iſt, wird es wahrſcheinlich, daß nicht unſer Arithmetiker, ſondern ein ganz anderer Mann gleichen Namens hier gemeint ſei, und wir ſehen uns genöthigt dieſes lange mit Freuden ergriffene und feſtgehaltene Zeugniß über unſern Autor ganz fallen zu laſſen.

Aber wir können dieſes Pſeudozeugniß des Suidas auch ohne alle Beſorgniß und Gefahr aufgeben, da wir ein viel wichtigeres und vollgültigeres für unſern Auctor aufzuſtellen vermögen. Es war mir nämlich, als ich den Commentar des Theon von Alexandrien, des Vaters der eben erwähnten Hypatia, über die Μεγάλη σύνταξις las, nicht wenig überraſchend, dort bald am Anfange unſern Diophant citirt zu finden. Mein Befremden ſtieg aber noch, als ich wirklich in einigen mathematiſch-hiſtoriſchen Werken dieſes Citat erwähnt, und dennoch für die hiſtoriſche Kritik ganz unbenutzt gelaſſen fand. Schon der älteſte Hiſtoriker der Mathematik aus neuerer Zeit, Peter Ramus, ſchreibt im erſten Buche ſeiner Scholae Mathematicae p. 37. ſo: ***Diophantus,*** **cujus sex libros, cum tamen author ipse tredecim polliceatur, graecos habemus de arithmeticis admirandae subtilitatis artem complexis, quae vulgo Algebra arabico nomine appellatur: cum tamen ex authore hoc antiquo** *(citatur enim a Theone)* **antiquitas artis appareat. Scripserat et Diophantus harmonica.** Woher kommt es, daß man dieſes citatur enim a Theone gar nicht berückſichtigt hat? Wahrſcheinlich daher, wird man ſagen, weil Ramus nicht geleſen worden iſt. Aber wir gehen weiter. Montucla kennt das Citat bei Theon, freilich in mancher Beziehung falſch, indem er ſchreibt [12]): Théon cite une autre ouvrage de cet analyste, où il étoit question de la pratique de l'arithmétique. Je soupçonnerois que c'étoit-là qu'il expliquoit plus au long les règles de sa nouvelle arithmétique, sur quoi il ne s'étoit pas

11) Vorrede S. VII. VIII.

12) Hist. T. 1. p. 322. Unten als Note: Comm. in Alm. I. 5.

assez étendu au commencement de ses questions. Ehe wir von den Fehlern, die Montucla hier begeht, ſprechen, will ich noch erwähnen, daß dieſe Stelle, die nur beweiſt, daß dieſer Hiſtoriker mit gewohnter Flüchtigkeit ſich begnügt hat, den Namen Diophantus in Theons Texte zu leſen, wörtlich überſetzt wieder erſcheint in Roſenthals Encyclopädie der reinen Mathematik Bd. 3. S. 195: „Theon führt noch ein ander Werk von dieſem Analyſten an, wo die Frage von der arithmetiſchen Praktik war. Vermuthlich entwikkelte er da die Regeln ſeiner neuen Arithmetik weitläuftiger, über welche er ſich im Anfange ſeiner Quäſtionen nicht genug ausgelaſſen hatte.“ Und ſicher eine zweite Reproduction dieſes Montucla'ſchen Irrthums iſt die Notiz in Klügel's Wörterbuch [13]): „Diophantus hat außer ſeinem großen arithmetiſchen Werke auch ein Werk über die praktiſche Arithmetik geſchrieben, das aber verloren iſt.“ Wunderbar bleibt es mir immer, daß Coſſali von dieſem durch Montucla, um Ramus nicht zu gedenken, ihm dargebotenen Winke gar keine Notiz nimmt [14]). Unterſuchen wir nun den wahren Stand der Sache, ſo ſteht, um von dem Unweſentlichen zu beginnen, die hiehergehörige Stelle nicht im fünften, wie Montucla citirt, ſondern im erſten Buche des Theon'ſchen Commentars, Seite 40. der Baſeler Ausgabe von 1538 [15]). Weſentlicher aber iſt der Umſtand, daß Theon nicht irgend ein anderes Werk von Diophant über praktiſche Arithmetik, ſondern gerade das uns vorliegende citirt, ſo daß über die Identität des Auctors gar kein Zweifel obwalten kann. Allerdings ſteht das Citat in demjenigen Abſchnitte des Theon'ſchen Commentars, in welchem er die Regeln für die Praxis der Sexageſimalrechnung lehrt, aber Theon macht blos eine Analogie zwiſchen der μονάς bei Diophant und der μοιρά in Ptolemäus Syſtem. Wie die μονάς, ſagt er, die Zahl, welche ſie multiplicirt, unverändert läßt,

---

13) Bd. I. S. 177. Artikel: Arithmetik.

14) Oder ſollte die fragliche Stelle vielleicht erſt in die zweite Auflage der Montucla'ſchen Geſchichte eingerückt ſein, die Coſſali noch nicht kannte. Ich habe die erſte Auflage nicht vergleichen können.

15) Dieſes falſche Citat iſt Schuld daran, daß Schulz die Stelle bei Theon nicht hat auffinden können, worüber er ſich Vorr. S. XX. (Note) beklagt. Der gelehrte Überſetzer unſers Auctors macht daher die unrichtige Hypotheſe, daß unter dem von Theon citirten Werke vielleicht die Porismen zu verſtehen ſeien.

Digitized by Google

ſo läßt die μοιρά das εἶδος, in welches ſie multiplicirt wird, unververändert. Die Stelle lautet wörtlich ſo: ἡ μὲν οὖν μοιρά ἐν τοῖς κατ' εἶδος πολλαπλασιασμοῖς μονάδος τάξιν ἐπέχουσα, ἀμετάθετός ἐστιν, ὅνπερ γὰρ τρόπον ἡ μονὰς ἐπὶ τὸν τρία ἀριθμὸν, λόγου χάριν, πολλαπλασιασθεῖσα, αὐτὸν τὸν τρίτον ἀριθμὸν φυλάττει, καὶ ἐπὶ τὸν τέταρτον αὐτὸν τὸν δ̄, καὶ ἐπὶ τὸν η̄ αὐτὸν τὸν η̄, καθὰ καὶ Διόφαντός φησιν ὅτι τῆς μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης καὶ ἑστώσης πάντοτε, τὸ πολλαπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσται, τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ἡ μοιρὰ ἐφ' ὃ ἂν εἶδος πολλαπλασιασθῇ, αὐτὸ τὸ εἶδος φυλάττει. Dieſe hier ausgezeichneten Worte ſind nichts anderes als die wörtliche ſechſte Definition nach der Bachet'ſchen Ausgabe des Diophant, mit der einzigen kleinen Variante, daß wo hier πάντοτε bei Bachet das ſynonyme ἀεὶ ſteht. Einige Zeilen weiter kommt der Name Diophant's noch einmal vor, aber ohne Anführung einer beſtimmten Stelle, weshalb ich die Worte nicht abſchreibe.

Somit haben wir ein bisher unbeachtet gelaſſenes und unbenutztes ganz ſicheres und unumſtößliches Zeugniß für Diophant, welches als ſpäteſte Grenze ſeiner Lebenszeit die zweite Hälfte des vierten Jahrhunderts feſtſtellt. Theon lebte nämlich unter Theodoſius dem Großen (379—395) [16], Diophant alſo jedenfalls etwas früher. Halten wir uns nun in Bezug auf Hypſikles an die Conjectur von Fabricius, ſo behalten wir als mögliches Zeitalter Diophant's nicht mehr als die anderthalb Jahrhunderte etwa zwiſchen den Jahren 200 bis 350 oder etwas weniges ſpäter, und es ſteht nun die Angabe bei Abulfaraj, daß Diophant unter dem Kaiſer Julianus Apoſtata gelebt habe, nicht ſo ganz unwahrſcheinlich da. Aber geſetzt auch, Hypſikles wäre um einige Jahrhunderte älter, da ſich mit vollkommener Sicherheit nur beſtimmen läßt, daß er nach Apollonius gelebt hat, ſo können wir doch darum das Zeitalter Diophant's nicht willkührlich weiter hinaufſchieben. Diophant muß in

---

16) Suidas ſagt: Θέων ὁ ἐκ Μουσείου, Αἰγύπτιος, φιλόσοφος, σύγχρονος δὲ Πάππῳ τῷ φιλοσόφῳ καὶ αὐτῷ Ἀλεξανδρεῖ· ἐτύγχανον δὲ ἀμφότεροι ἐπὶ Θεοδοσίου βασιλέως τοῦ πρεσβυτέρου· ἔγραψε Μαθηματικά· Ἀριθμητικά etc. Und unter Pappus: Πάππος Ἀλεξανδρεὺς, φιλόσοφος γεγονὼς κατὰ τὸν πρεσβύτερον βασιλέα Θεοδόσιον, ὅτε καὶ Θέων ὁ φιλόσοφος ἤκμαζεν, ὁ γράψας εἰς τὸν Πτολεμαίου κανόνα.

der Zeit gelebt haben, als die Mathematik der Griechen bereits ihren Grabesgang zu gehen anfing. Nur daraus läßt ſich das für die Fortbildung der Griechen moraliſche Nichtvorhandenſein ſeines Werks erklären. Hätte Diophant in einer frühern Periode gelebt, als der wiſſenſchaftliche Geiſt des Volks noch regbarer und empfänglicher war, wie hätte da ein Werk, welches der Wiſſenſchaft einen ſo ganz neuen Schwung zu geben geeignet war, ſo völlig unbeachtet und einflußlos bleiben können. Denken wir nur an den ungeheuern und fortdauernden Einfluß, den das viel weniger bedeutende Werk von Nikomachus auf die geiſtige Thätigkeit der Griechen ausgeübt hat. Setzen wir aber Diophant in die Mitte, oder gar gegen das Ende des vierten Jahrhunderts, ſo wird ſeine iſolirte Stellung zur Griechiſchen Mathematik dadurch vollkommen erklärt [17]).

Nun iſt er der letzte ſelbſtſtändig ſchaffende Geiſt in der Reihe der Mathematiker ſeiner Nation. Er ſteht bereits in der Zeit der Commentatoren und Sammler, deren Auftreten auf die Bühne im-

---

17) Boſſut würde ſich wundern, wenn er dieſe Stelle meiner Geſchichte läſe; denn er kennt unzählige Griechiſche Commentare über Diophant. Er ſagt nämlich I, 9: L'auteur a eu parmi les anciens *une foule* d'intreprètes, dont les ouvrages sont *la plupart* perdus. Nous regrettons, dans ce nombre, le commentaire de la célèbre *Hipathia* (sic!). Schade, daß ich Herrn Boſſut nicht fragen kann, 1) woher er die Nachricht hat, und 2) welches denn die noch vorhandenen Commentare der Alten über Diophant ſind, da doch, wie er ſagt, nicht alle, ſondern nur der größere Theil derſelben verloren gegangen. Die einzige Nachricht, die wir vielleicht von einem alten Commentator über Diophant haben, iſt die bereits gewürdigte Stelle bei Suidas. Außerdem iſt nur eine Arbeit der Art bekannt, nämlich die Scholien des Maximus Planudes, die aber erſt aus dem vierzehnten Jahrhundert herrühren. Das iſt alſo die foule d'intreprètes parmi les anciens, nämlich ein einziger unter den Neuern. — Man verſtehe mich übrigens nicht falſch, als wollte ich mit Diophant's Iſolirung ſoviel ſagen, daß er den Alten nicht bekannt geweſen ſei. Ich habe nur ſeinen Einfluß auf die geiſtige Richtung des Volks und ſein Einwirken auf die Fortbildung der Wiſſenſchaft im Auge. Daß er den Griechen bekannt, und als großer Arithmetiker bekannt geweſen, beweiſt eine Stelle, die Voſſius (de univ. math. nat. et const. p. 432) citirt, und die ich nicht habe nachſchlagen können; Voſſius ſagt nämlich: Quanti jam olim habitus sit Diophantus, arguit, quod eum cum Pythagora conjungat *Joannes patriarcha Hierosolymitanus*, in vita Jo. Damesceni, ubi, cum Damasceni et Cosmao in Arithmeticis peritiam vellet extollere, hunc in modum ait (p. 683. ed Bas.) Ἀναλογίας δὲ Ἀριθμητικῆς οὕτως ἐξησκήσασιν εὐφρῶς, ὡς Πυθαγόρας καὶ Διόφαντος. Vergl. Schulz a. a. O. S. IX.

mer auf den wiſſenſchaftlichen Ruin des Volks hindeutet. Die Mathematik wurde überhaupt nach ſeiner Zeit nicht mehr fortgebildet, darum konnte er auch keinen Einfluß auf die Fortbildung derſelben mehr haben. Pappus und Theon ſind die letzten großen Mathematiker der Griechen, und auch dieſe, für ihre Zeit zwar Heroen, treten weniger ſelbſt ſchaffend als ordnend und erklärend auf. Dazu kommt noch, daß der falſche Chriſteneifer des Kaiſers Theodoſius ein Ereigniß herbeiführte, welches für die Mathematik, wie für die ganze Wiſſenſchaft aller Zeiten von nie genug zu beklagendem Einfluſſe war, nämlich die Zerſtörung der Bibliothek zu Alexandrien, wodurch dem bereits immer mehr und mehr zum Alltäglichen ſich verflachenden Geiſte der Gelehrten auch noch die äußeren Mittel zu ihrer wiſſenſchaftlichen Ausbildung geraubt wurden. Dieſer ſonſt energiſche und weiſe Regent nämlich, umgeben und verleitet durch orthodoxe Pfaffen, gab im Jahre 392 den unheilvollen Befehl zur Vernichtung aller heidniſchen Tempel in dem ganzen Umfange ſeiner Herrſchaft. Ein Opfer dieſes Befehls ward auch der Serapistempel zu Alexandrien, in welchem ſich ſeit der Einäſcherung des Brucheions während der Belagerung Alexandriens durch Julius Cäſar, die große von den Ptolemäern gegründete und durch die Freigebigkeit der Römiſchen Kaiſer vielfältig vermehrte Bibliothek befand; die der Wiſſenſchaft unerſetzlichen Schätze wurden ein Raub des fanatiſchen durch Prieſter angeführten chriſtlichen Pöbels, deſſelben Pöbels, welcher drei und zwanzig Jahre ſpäter, im Jahre 415, von einem chriſtlichen Biſchofe, Cyrillus, angefeuert, die ebenſo gelehrte als liebenswürdige, aber noch dem Heidenthum anhängende Hypatia auf öffentlicher Straße im eigentlichſten Sinne des Worts in Stücke zerriß und die Fetzen ihres Leichnams in allen Gaſſen der Stadt herumſchleppte. Vergebens ſind die Bemühungen geweſen, wenigſtens eine dieſer Gräuelthaten, die das Chriſtenthum ſchänden, von demſelben abzuwälzen, indem man die Zerſtörung der Bibliothek dem Khalifen Omar, unter deſſen Regierung am erſten Weihnachtstage des Jahres 640 Alexandria erobert ward, aufgebürdet hat. Denn ſchon Oroſius, ein Schriftſteller des fünften Jahrhunderts, bezeugt, daß er die leeren Schränke der zerſtörten Bibliothek geſehen habe [18]. Aber wir kehren zu Diophant zurück.

---

18) Orosii historii adv. paganos VI, 15: Extant quae et nos vidi-

Wenn ich aus innern wiſſenſchaftlichen Gründen mich dafür entſchieden habe, daß Diophant nicht vor der Mitte des vierten Jahrhunderts gelebt hat und daß dadurch die aus unbekannter Quelle geſchöpfte Notiz des Abulfaraj Haltung gewinnt, ſo findet nun auch dieſe Angabe des Arabiſchen Hiſtorikers noch einen bedeutenden äußeren Stützpunct in einem Artikel bei Suidas. Wir leſen nämlich bei Letzterem: Λιβάνιος, Ἀντιοχεύς, σοφιστὴς ἐπὶ τοῦ Ἰουλιανοῦ τοῦ Παραβάτου χρόνων, καὶ μέχρι Θεοδοσίου τοῦ πρεσβυτέρου (Ed. Kusteri πρεσβύτου), Φασγανίου πατρὸς, μαθητὴς Διοφάντου. Was hindert uns, dieſen Lehrer des Libanius, in völliger Übereinſtimmung mit der Angabe bei Abulfaraj, für unſern Diophant zu halten? Etwa der Umſtand, daß ſich Libanius nicht auch als Mathematiker, ſondern vorzüglich als Redner bekannt gemacht hat? Schwerlich wird Jemand einen ſolchen Einwurf, den Schulz mit Recht von ſeiner lächerlichen Seite auffaßt, im Ernſte machen. Was für Schlüſſe wollte man, mit dieſem Grundſatze ausgerüſtet, z. B. auf Ariſtoteles zu Wege bringen, der bekanntlich Lehrer Alexanders des Großen war? Aber ein anderer Einwurf iſt dieſer Zuſammenſtellung gemacht worden. Es haben nämlich Männer, wie Coſſali und Colebrooke [19]) die Vermuthung ausgeſprochen, daß Abulfaraj gerade auf Grund dieſer Stelle bei Suidas, durch die Namengleichheit verleitet, dem Mathematiker Diophant ſeinen Platz unter den Zeitgenoſſen Julian's angewieſen habe. Aber mit Recht, wie es mir ſcheint, macht hier Schulz [20]) die gewiß treffende Gegenbemerkung, daß es nicht abzuſehen iſt, warum Suidas gerade die einzige Quelle ſein ſoll, aus welcher Abulfaraj geſchöpft hat, zumal dieſer Geſchicht-

---

mus armaria librorum, quibus direptis exinanita ea a nostris hominibus etc. Vergleiche über dieſen ganzen Gegenſtand Schöll Geſchichte der Griechiſchen Litteratur, deutſch von Pinder. Berlin. 1828—30. am Anfang des dritten Bandes.

19) Cossali Origine T. I. p. 64. 65. Colebrooke Algebra of the Hindu's. Note M. p. LXIII. „The Armenian Abu'lfaraj places the Algebraist Diophantus under the Emperor Julian. But it may be questioned, whether he has any authority for that date, besides the mention by Greek authors of a learned person of the name, the instructor of Libanius, who was contemporary with that emperor. Indeß erklärt Colebrooke gleich hinterher Abulfaraj's Angabe für annehmbar.

20) A. a. O. S. XV.

ſchreiber uns noch eine Notiz über Diophant giebt, die ſicher aus anderer Quelle herrührt, die nämlich, daß das Werk des Griechiſchen Auctors von Mohammed Abulwafa ins Arabiſche überſetzt worden iſt. Wohl mochte dieſe Überſetzung oder Bearbeitung dem Hiſtoriker nicht unbekannt ſein, und vielleicht ſelbſt Notizen enthalten, die uns fehlen, zumal, wie wir unten ſehen werden, der Verfaſſer derſelben vor Suidas lebte. Es iſt alſo nicht nur kein Grund vorhanden, die Zeitbeſtimmung über Diophant's Alter, welche Abulfaraj darbietet, nicht anzunehmen, ſondern wir haben vielmehr im Gegentheil mehrfache Gründe, welche das Zeugniß des Arabiſchen Geſchichtſchreibers beſtätigen und bekräftigen.

Sonderbar benimmt ſich hier wieder Boſſut. T. 1. p. 7, wo er von Diophant handelt, ſetzt er ihn vermöge am Rande beigefügter Jahrzahl, mit unſerm Reſultat übereinſtimmend, auf das Jahr 350 n. Chr., welches Datum der Überſetzer Reimer S. 26 (Note) mit Unrecht verwirft. Dagegen in der dem zweiten Bande der Ausgabe von 1810 angehängten chronologiſchen Tafel finden wir Diophant in der Mitte des zweiten Jahrhunderts. Zwar iſt die Tafel nicht von Boſſut ſelbſt, ſondern von ſeinem Engliſchen Überſetzer, Bonnycaſtle, entworfen; aber ich denke, wenn Boſſut ſich veranlaßt ſah, ſie in ſeine zweite Auflage aufzunehmen, ſo mußte er ſie wenigſtens mit ſeinem Vortrage übereinſtimmend machen.

Diophantus wird 'Αλεξανδρεὺς, der Alexandriner, genannt; er war alſo entweder aus Alexandria gebürtig, oder was wahrſcheinlicher iſt, er lebte und lehrte daſelbſt. Alles, was wir ſonſt von ſeinen Schickſalen wiſſen, iſt in folgenden Räthſelverſen des Metrodorus enthalten, deren deutſche Übertragung man in Schulz's Überſetzung S. 276. 277 findet:

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος, ἃ μέγα θαῦμα,
  Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην,
  Δωδεκάτῃ δ' ἐπιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν.
Τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
  'Εκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
Αἴ αἴ τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρός,
  Τοῦ δὲ καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
  Τῇδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

Die Ausrechnung der Aufgabe lehrt nur, daß Diophant im ein und zwanzigſten Jahre ſeines Alters einen Bart, im drei und dreißigſten eine Frau, im acht und dreißigſten einen Sohn bekommen habe, daß dieſer in ſeinem zwei und vierzigſten, in des Vaters achtzigſten Jahre, und der Vater im vier und achtzigſten geſtorben ſei. Ohne aus dieſer poetiſch-mathematiſchen Spielerei Schlüſſe zu ziehen, gehen wir zu wichtigeren Dingen über, und zwar zunächſt zu den Schickſalen, welche Diophant's Schriften erlebt haben.

Wir kennen drei Schriften von Diophant, von denen aber nur zwei, und auch dieſe unvollſtändig, in unſern Händen ſind; das erſte führt den Titel Ἀριθμητικῶν βιβλία ιγ; das zweite iſt eine kleine Abhandlung unter dem Titel περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν; das dritte endlich, welches wir nur aus Citaten im erſten kennen, hieß πορίσματα [21]). Das erſtgenannte Werk, Ἀριθμητικά, Arithmetiſches, kündigt ſich nicht nur auf dem Titel, ſondern auch in ſeiner Einleitung [22]) als in dreizehn Bücher getheilt an; aber alle fünf oder ſechs bis jetzt aufgefundenen Codices [23]) enthalten nur ſechs Bü-

---

21) In Betreff des Werks, welches Ramus p. 37. **Harmonica** nennt (**Scripserat et Diophantus harmonica**), habe ich weiter nichts finden können, als was Fabricius (**Bibl. Graeca T. IV. p. 15. — Ed. Harl. T. V. p. 645.**) darüber ſagt: **Harmonica Diophanti, quae Gesnerus et alii memorant, intellige de harmonicis numeris, non de scripto quodam musici argumenti.** Was hier mit den harmoniſchen Zahlen gemeint iſt, iſt doch nicht klar.

22) **Def. XI.** am Ende: *οὕτω γὰρ εὐόδευτα γενήσεται τοῖς ἀρχομένοις, καὶ ἡ ἀγωγὴ αὐτῶν μνημονευθήσεται, τῆς πραγματείας αὐτῶν ἐν τρισκαίδεκα βιβλίοις γεγενημένης.*

23) Dieſe Codices ſind

I—III. Drei Vaticaniſche unter folgenden Nummern (ſ. **Cossali Origine T. I. p. 61.**)
No. 191. Saec. XIII. charta bombycina.
No. 200. Saec. XIV. charta pergamena.
No. 304. Saec. XV. charta.

IV. Einer auf der Königlichen Bibliothek zu Paris, den Bachet ſeiner Ausgabe zu Grunde gelegt hat. S. **Ep. ad Lect.**

V. Einer auf der Palatiniſchen Bibliothek, deſſen Collation für Bachet Claude Saumaiſe beſorgte. S. **ib.**

VI. Ein ſechſter iſt dann vielleicht derjenige, den Xylander bei ſeiner Bearbeitung in Händen hatte, und der vorher dem Kaiſerlichen Geſandten in Warſchau, Andreas Dudicius (ſ. u.) angehörte. Indeß hält Colebrooke (**Note M. p. LXI**) die beiden letztgenannten für wahrſcheinlich identiſch.

Bücher der 'Αριθμητικά und das in der Mitte abgebrochene Buch über die Polygonalzahlen, mit der einzigen Abweichung, daß der Vaticaniſche Codex No. 200. denſelben Text der Arithmetica, welchen die übrigen Manuſcripte in ſechs Büchern enthalten, auf ſieben vertheilt. Iſt ſchon die äußere Übereinſtimmung ſo vieler Handſchriften, die an ganz verſchiedenen Orten ſich befinden und aus verſchiedenen Jahrhunderten herrühren, wunderbar, ſo iſt's der Umſtand noch mehr, daß alle mit einander in den Lücken, Fehlern und einzelnen Verunſtaltungen ſo unglückſeliger Weiſe zuſammentreffen, daß Bachet, der Herausgeber der Diophantiſchen Überreſte, für die Kritik des Textes aus der Collation derſelben gar nichts gewinnen konnte, was wir mit ihm herzlich bedauern. Und nicht ohne große Wahrſcheinlichkeit ſtellt Bachet die Vermuthung auf, daß alle dieſe vorhandenen Handſchriften Copien von einem und demſelben älteren Hauptcodex ſeien [24]). Unter ſolchen ungünſtigen Umſtänden konnte es nicht fehlen, daß Bachet's Recenſion des Textes, die einzige, die wir bis jetzt haben, an vielen Stellen ſehr mangelhaft ausfallen mußte. Indeß iſt die Hoffnung, einen wenn nicht weſentlich vollſtändigeren, ſo doch vielleicht im Einzelnen reineren Text zu erhalten, uns nicht ganz benommen. Bachet hat nämlich, wie aus der vorigen Note hervorgeht, nur einen der drei Vaticaniſchen Codices, und auch den nicht vollſtändig vergleichen können, und ſomit wäre immer noch zu erwarten, daß, wenn einmal Jemand ſich der gewiß nicht unbelohnenden Mühe unterzöge, die drei Vaticaniſchen Codices gründlich mit der Bachet'ſchen Ausgabe zu vergleichen, dieſe Arbeit für den Text des Diophantiſchen Werkes ein erwünſchteres Reſultat herbeiführen könnte.

Alle Nachrichten von dem einſtmaligen Vorhandenſein der drei-

24) Epist. ad Lect.: „Etenim neque codex Regius, cujus ope hanc editionem adornavimus, neque is quem prae manibus habuit Xilander, neque Palatinus, ut doctissimo viro Claudio Salmasio referente accepimus, neque Vaticanus, quem vir summus Jacobus Sirmondus mihi ex parte transcribendum curavit, quicquam amplius continent, quam sex hosce Arithmeticorum libros, et tractatum de numeris maltangulis imperfectum. Sed et tam infeliciter hi omnes codices inter se consentiunt. ut ab uno fonte manasse et ab eodem exemplari descriptos fuisse non dubitem. Itaque parum auxilii ab his subministratum nobis esse, verissime affirmare possum.

zehn Bücher ſind unſicher und zum Theil erwieſen falſch. Ich ſchreibe hier zunächſt folgende Stelle aus Bachet's Epistola ad Lectorem ab: *Joannes* tamen *Regiomontanus* tredecim Diophanti libros se alicubi vidisse asseverat, et Illustrissimus Cardinalis *Perronius,* quem nuper extinctum magno Christianae et literariae Reipublicae detrimento conquerimur, mihi saepe testatus est, se codicem manuscriptum habuisse, qui tredecim Diophanti libros integros contineret, quem cum *Guilielmo Gosselino* concivi suo, qui in Diophantum Commentaria meditabatur, perhumaniter more suo exhibuisset, paulo post accidit, ut Gosselinus peste correptus interiret, et Diophanti codex eodem fato nobis eriperetur. Cum enim precibus meis motus Cardinalis amplissimus, nullisque sumptibus parcens, apud haeredes Gosselini codicem illum diligenter exquiri mandasset et quovis pretio redimi, nusquam repertus est. Was zuerſt die Nachricht in Betreff Regiomontan's anlangt, ſo beruht dieſelbe, wie ich ſchon S. 35. vorläufig erwähnte, auf einem Mißverſtändniſſe. Xylander ſagt in der Epistola nuncupatoria von ſeiner Überſetzung Diophant's, er habe gehört, daß in der Vaticaniſchen Bibliothek die vollſtändigen dreizehn Bücher von Diophant's Arithmetik vorhanden ſeien, und wahrſcheinlich habe Regiomontanus, welcher verſichere auf Italieniſchen Bibliotheken Diophant's Werk geſehen zu haben, dieſe dreizehn Bücher in Händen gehabt [25]. Nach damals gebräuchlicher und leider auch ſpäter oft noch vorkom-

25) Leider habe ich die Xylandriſche Überſetzung bis jetzt nicht können zu Geſichte bekommen; die beiden Stellen, auf welche ich obige Ausſage gründe, theilt Coſſali mit, auf deſſen Citate man ſich verlaſſen kann. Die erſte ſteht Orig. T. I. p. 58, und lautet: Inveni tanquam exstantis in bibliothecis italicis sibi visi Diophanti operis mentionem a Regiomontano factam; die zweite ebend. p. 66: Sane tredecim libri arithmeticae Diophanti ab aliis perhibentur exstare in bibliotheca Vaticana, quos Regiomontanus viderit. Über die erſte dieſer Stellen iſt zu vergleichen, was ich weiter im Texte ſage. Hinſichtlich der zweiten aber iſt einleuchtend, daß Xylander falſch war berichtet worden; denn, wie ſich ergeben hat, enthalten die Vaticaniſchen Codices nicht die vollſtändigen dreizehn Bücher, ſondern kündigen ſie nur auf dem Titel an. Damit fällt denn aber auch die ganze Nachricht, daß Regiomontan die dreizehn Bücher geſehen habe, über den Haufen, zumal da es nur eine Combination von Xylander iſt, daß Regiomontan gerade dieſe vorgeblich vollſtändigen Vaticaniſchen Codices geſehen habe.

mender übler Sitte glaubt Xylander genug gethan zu haben, wenn er den Namen Regiomontanus citirt. Es iſt in dieſem Falle aber, bei den faſt unzähligen Werken, welche Regiomontan verfaßt hat, und die zum größten Theil ſogar ungedruckt geblieben ſind, ganz beſonders ſchwierig zu ermitteln, auf welche Stelle in dieſes fruchtbaren Schriftſtellers Werken Xylander ſich bezieht. Voſſius, wie ich oben S. 35 ſchon erwähnte, giebt uns einen genaueren Fingerzeig, und ich habe auch bis jetzt in Regiomontan's Schriften keine andere Stelle gefunden, welche hier gemeint ſein könnte, als eben ſeine erwähnte Oratio habita Patavii in praelectione Alfragani, abgedruckt vor dem Werke: Rudimenta astronomica *Alfragani.* Item *Albategnius* astronomus peritissimus de motu stellarum, ex observationibus tum propriis tum Ptolemaei, omnia cum demonstrationibus Geometricis et Additionibus *Joannis de Regiomonte.* Item Oratio introductoria in omnes scientias Mathematicas *Joannis de Regiomonte,* Patavii habitu, cum Alfraganum publice praelegeret. Ejusdem utilissima introductio in elementa Euclidis. Item Epistola *Philippi Melanthonis* nuncupatoria, ad Senatum Noribergensem. Omnia jam recens prelis publicata. Norimbergae anno 1537. 4. In der erwähnten Rede, welche auf die Vorrede von Ph. Melanthon folgt, heißt es (Blatt β. S. 2.), nachdem von der Arithmetik des Euklides und Jordanus (Nemorianus) die Rede geweſen, ſo: *Diofanti* autem tredecim libros subtilissimos nemo usquehac ex Graecis Latinos fecit, in quibus flos ipse totius Arithmeticae latet, ars videlicet rei et census, quam hodie vocant Algebram Arabico nomine. Hujus equidem artis pulcherimae multa fragmenta passim Latini contrectant, paucissimos autem egregie doctos offendo nostra tempestate post Joannem de Blanchinis virum optimum. Wenn alſo Regiomontanus, was übrigens aus dieſer Stelle auf keine Weiſe hervorgeht, ein Manuſcript von Diophant ſelbſt geſehen hat, (noch weniger aber liegt in den Worten, daß er, wie Voſſius p. 432 behauptet, Diophant für den Erfinder der Algebra ausgiebt), ſo folgt daraus noch nicht, daß daſſelbe alle dreizehn Bücher anderswo als auf dem Titel gehabt habe. Gründlich ſtudirt hat Regiomontan es ſicher nicht, wie ſchon ſeine Inhaltsangabe beweiſt. Die ars rei et census iſt, wie wir in unſerm zweiten Kapitel geſehen haben, die Auflöſung der beſtimmten quadratiſchen Gleichungen, und gerade dieſe fehlen in unſerm

Diophant; aber geſetzt, ſie wäre in dem Codex, den Regiomontanus geſehen, vorhanden geweſen, ſo wäre doch gerade dieſe Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen nicht der Glanzpunct, der bei Diophant vorzugsweiſe einer beſondern Erwähnung verdiente. Die meiſten alten Codices ſind aber ſo eingerichtet, daß Jemand, der einen ſolchen nicht gründlich durchſtudirt, nicht ſo leicht überſehen kann, in wie viele Bücher oder Abſchnitte das Werk getheilt iſt, weil ſie häufig ohne Abſätze das ganze Werk in einem Zuge darſtellen. Wer dieſes mit dem in der vorigen Note Geſagten vergleichen will, wird mir gern die Unzuverläſſigkeit dieſer Nachrichten über Regiomontan's Verhältniß zu Diophant's dreizehn Büchern zugeben. Wenn indeß aus den angezogenen Worten weiter auch nichts folgte, als daß Regiomontanus von der Exiſtenz Diophant's Kunde hatte, ſo iſt dieſe Stelle doch ſchon immer hiſtoriſch merkwürdig genug als die früheſte Erwähnung Diophant's, die wir bis jetzt bei einem Europäiſchen Mathematiker gefunden haben. Noch viel unbeſtimmter iſt eine andere Stelle in derſelben Rede (Blatt β2, S. 2), welche Xylander mit der eben angeführten combinirt zu haben ſcheint. Regiomontanus erzählt, er ſei nach dem Tode ſeines Lehrers Georg von Peurbach († 1461) in Begleitung des Cardinals Beſſarion nach Rom gereiſt, um den Plan Peurbach's, die Griechiſchen Mathematiker im Original kennen zu lernen und bekannt zu machen, auszuführen. **Quid igitur, ſagt er, reliquum erat nisi ut orbitam viri clarissimi sectarer? coeptum foelix tuum pro viribus exequerer? Duce itaque patrono communi Romam profectus more meo literis exerceor, ubi scripta plurima Graecorum clarissimorum *ad literas suas discendas* me invitant, quo Latinitas in studiis praesertim Mathematicis locupletior redderetur.** Wenn wir nun bedenken, daß Regiomontanus nach Italien ging, um vorläufig Griechiſch zu lernen, daß er ſich ferner nicht gar lange Zeit in Rom aufgehalten[26]) und ſich da nicht einmal ausſchließlich mit mathema-

26) Wegen Unzugänglichkeit der Quellen kann ich einige Jahrzahlen nicht genau angeben; aber aus der folgenden Zuſammenſtellung wird dennoch erhellen, daß Regiomontan's Aufenthalt in Rom von nicht langer Dauer geweſen ſein kann. Am 8. April 1461 ſtarb Peurbach, alſo nach dieſem Datum begab Jener ſich auf die Reiſe. Als nach einiger Zeit Beſſarion nach Griechenland abreiſte, ging Regiomontan aus Rom weg, hielt ſich über ein Jahr lang in Ferrara auf, wo er Griechiſche Verſe machte und den Ptolemäus verbeſſerte, darauf nahm er einen

thematiſchen Schriftſtellern, geſchweige denn mit Diophant beſchäftigt (vielmehr wiſſen wir, daß, als eines Aſtronomen von Profeſſion, ſein Hauptaugenmerk immer auf Ptolemäus gerichtet blieb, deſſen Bearbeitung nach dem Original er auch bald nach ſeiner Rückkehr aus Italien bekannt machte), bedenken wir ferner, daß Diophant nicht der Art iſt, daß ein Mathematiker des funfzehnten Jahrhunderts, dem der Gegenſtand ganz neu und für ſeinen mathematiſchen Geſichtskreis viel zu hoch und der noch dazu erſt Anfänger im Griechiſchen war, das Studium dieſes Werks in einigen Monaten zu vollenden im Stande iſt; bedenken wir das Alles, ſo wird man mir leicht beiſtimmen, wenn ich ſage, daß Regiomontanus von Diophant nicht viel mehr als den Titel kennen und allenfalls im Allgemeinen aus dem Durchblättern eines Codex wiſſen konnte, daß er über Algebra handele. Aber Regiomontanus erwähnt ja auch Diophant's in der beigebrachten Stelle mit keiner Sylbe, und es iſt eine bloße Conjectur von Xylander und Coſſali [27]), daß unter den Griechiſchen Mathematikern, deren in obiger Stelle gedacht wird, ſich auch Diophant befunden habe. Soviel aber, denke ich, ſteht feſt, daß das wirkliche Daſein der vollſtändigen dreizehn Bücher aus der Erwähnung Regiomontan's ebenſo wenig folgt, als wenn Blancanus in ſeiner Chronologia p. 52. von Diophant ſagt: extant ejus 13 **libri Graeci Arithmeticorum.**

Ruf nach Padua an, um daſelbſt Vorleſungen über Alfraganus zu halten, und hielt da die Antrittsrede, aus der ich obige Stelle citirt habe; darauf ging er, nachdem er hier eine Zeitlang geleſen, nach Venedig, um die Rückkehr des Cardinals abzuwarten, von Venedig begab er ſich noch einmal auf kurze Zeit nach Rom, ging dann nach Wien zurück, wo er eigentlich angeſtellt war, und wartete eine Zeitlang ſeiner Profeſſur, darauf nahm er einen Ruf des Königs Matthias von Ungarn an, bei dem er einige Jahre in hohen Gunſten ſtand, und dieſe Stellung endlich verließ er im Frühling des Jahres 1471, um ſeinen bleibenden Wohnſitz in Nürnberg zu nehmen. Welch' eine Menge von Begebenheiten auf kaum zehn Jahre vertheilt! Wieviel kann davon für den Aufenthalt in Rom, und namentlich für den erſten Aufenthalt, auf welchen ſeine in Padua erwähnte Bekanntſchaft mit Diophant ſich doch allein ſtützen kann, übrig geblieben ſein? Und von dieſem Wenigen wurde noch ein bedeutender Theil verbraucht, um erſt Griechiſch zu lernen, wozu er vorher in Wien keine Gelegenheit gehabt hatte.

27) **Cossali I. 59.** Ja dieſer achtungswerthe Gelehrte will ſogar, daß Regiomontanus ſich eine Copie von einem Diophantiſchen Codex genommen. Er bringt nämlich eine Stelle aus Gaſſendo's Leben Regiomontan's bei, in der es

Ob nun das andere von Bachet erwähnte Manuſcript, welches alle dreizehn Bücher enthalten haben ſoll, wirklich dem Titel entſprochen — ein Bedenken, was man bei dergleichen Nachrichten immer bereit halten muß, — oder ob es, wie die übrigen vorhandenen, die dreizehn Bücher nur angekündigt habe, läßt ſich aus Mangel an Datis gar nicht ausmitteln. Iſt das erſtere der Fall geweſen, ſo ſcheint wirklich ein unheilvoller Fluch auf den Werken dieſes Auctors zu ruhen, indem alle möglichen Unglücksfälle, ſelbſt die Peſt nicht ausgenommen, ſich verbündet zu haben ſcheinen, um dieſelben der Nachwelt zu entziehen.

Eine ähnliche Nachricht von einem vollſtändigen Diophant ſcheint Fermat gehabt zu haben. Er ſchreibt am 15. Auguſt 1657 an Digby[28]: **Le nom de cet Autheur (Diophante) me donne l'occasion de vous faire souvenir de la promesse qu'il vous a pleu me faire de recouvrer quelque manuscrit de cet Autheur, qui contienne tous les treize livres, et de m'en faire part, s'il vous peut tomber en main.** Indeß geht aus dieſen Worten nicht mit Sicherheit hervor, daß Digby um ein ſolches Exemplar gewußt habe. Vielleicht hatte er dem modernen Diophant, Fermat, nur gelegentlich im Allgemeinen verſprochen, fall's ihm je einmal ein vollſtändiger Diophant in die Hände gerathen ſollte, Letzterem denſelben jedenfalls mitzutheilen. Freilich hätte Diophant in keine beſſern Hände als in Fermat's fallen können; denn dieſer bewundernswürdige Mann, Juriſt von Profeſſion und in ſeiner

---

heißt: per ejusmodi tempora graecos aliquot codices, tum comparavit, tum, quos rariores non potuit, commendato accepit, illosque aut ipse manu sua exscripsit, aut aliena manu sibi exscribi curavit. Darunter, meint Coſſali, ſei wahrſcheinlich auch Diophant geweſen. Das Opfer iſt denn doch für eine bloße Conjectur etwas zu groß, und ich kann dem ſonſt in meiner Achtung ſehr hoch ſtehenden Manne hierin nicht beiſtimmen. Regiomontan hat, nach dem von Heilbronner p. 501—504 gegebenen Verzeichniſſe ſeiner Schriften, die Werke von Euklides, Archimedes, Apollonius, Heron, Serenus, Menelaus, Ptolemäus (in mehren Ausgaben), Hypſikles, Theodoſius, Theon von Alexandria, Proklus, Jordanus Nemorianus, ja ſelbſt Ariſtoteles nach dem Original bearbeitet, ſo daß es zur Darſtellung ſeiner Verdienſte um die Verbreitung der Griechiſchen Mathematiker ganz überflüſſig iſt, wenn man ihm den Diophant noch dazu aufcomplementiren will, zumal wir durchaus keine Nachricht davon haben, daß dieſer Mathematiker jemals Gegenſtand ſeiner Arbeiten geweſen ſei.

28) Opera varia mathematica p. 192.

amtlichen Stellung geachtet, gehörte zugleich nicht nur zu den größten Mathematikern ſeiner Zeit, ſondern hat ſich auch als tüchtiger Philolog und Kritiker, wenn auch nicht durch die Herausgabe eines ganzen Auctors, bekannt gemacht, wie ſeine Correcturen einzelner Stellen Griechiſcher Auctoren beweiſen, die in ſeinen geſammelten Werken ſich zerſtreut finden.

Noch ein Beiſpiel eines unwahren Citats muß ich hier anführen, welches den eben behandelten Berufungen auf Regiomontanus ganz ähnlich ſieht. Moreri nämlich behauptet in ſeinem Dictionnaire historique, Bombelli erzähle, daß ihm die dreizehn Bücher von Diophant in der Vaticaniſchen Bibliothek ſeien gezeigt worden. Dem iſt aber nicht ſo, vielmehr giebt Bombelli an der Stelle der Vorrede ſeiner Algebra, in welcher er Diophant's erwähnt, die Zahl der Bücher auf ſieben an, woraus ſich ſchließen läßt, daß er den Codex No. 200 in Händen gehabt habe. Da wir auf dieſe Stelle noch mehrmals uns werden beziehen müſſen, ſo will ich ſie hier ganz mittheilen: ***Questi anni passati*** essendosi ritrovato un' opera greca di questa disciplina nella libreria di Nostro Signore in Vaticano, composta ***da un certo Diofante*** alessandrino autor greco, il quale fu ***a tempo di Antonino Pio,*** ed avendomela fatta vedere Messer Antonio Maria Pazzi reggiano, pubblico lettore delle matematiche in Roma, e giudicatolo con lui autore assai intelligente de' numeri (ancorche non tratti de' numeri irrationali, ma solo in lui si vede un perfetto ordine d' operare) egli ed io per arricchire il mondo di così fatta opera ci dessimo a tradurlo, ***e cinque libri (delle sette che sono) tradutti ne abbiamo;*** lo restante non avendo potuto finire per gli travagli avvenuti all' uno ed all' altro; ed in detta opera abbiamo ritrovato, ***ch' egli assai volte cita gli autori indiani,*** col che mi ha fatto conoscere, che questa disciplina appo gl' indiani prima fu che agli arabi [29]). Ich habe diejenigen Worte, welche ich entweder im Vorhergehenden ſchon berückſichtigt habe, oder in der Folge noch berückſichtigen werde, ausgezeichnet.

---

29) Da ich Bombelli's Algebra ſelbſt noch nicht in Händen gehabt habe, ſo habe ich dieſe Stelle aus Cossali Origine T. I. p. 60, wo ſie mitgetheilt iſt abgeſchrieben.

Da wir nun einmal Diophant's Werk unvollſtändig haben und uns vorläufig darüber beruhigen müſſen, ſo iſt die nächſte und natürlichſte Frage, die noch aufgeworfen werden kann, die: an welcher Stelle des Werks hat die Verſtümmelung ſtatt gefunden, am Anfange, am Ende, oder in der Mitte? Am Anfange ſicherlich nicht. Diophant beginnt ganz ordentlich mit einer Zueignung, der dann eine plane Auseinanderſetzung der Grundſätze ſeiner Methode folgt, und geht von da zu den einfachſten algebraiſchen Aufgaben des erſten Grades über. Dagegen ſucht die große Mehrzahl der Beurtheiler und Verehrer Diophant's, von denen übrigens Viele ihn nicht geleſen, wenigſtens nicht ſo geleſen haben, daß ſie des Geſammteindrucks des Werks ſich bewußt über eine Frage der Art urtheilen könnten, den Defect am Ende, und man erzählt ſich von goldenen Bergen und Wunder was für Dingen, welche in den noch fehlenden ſechs oder ſieben Büchern ſollen geſteckt haben. Dieſer Anſicht muß ich mich aber durchaus widerſetzen. Diophant's Kunſt iſt in ſeinem ſechſten Buche am Ende. Wenn man die vier letzten Bücher, vom dritten bis zum ſechſten, ſucceſſive mit Aufmerkſamkeit durcharbeitet, ſo findet man, daß ſich der Verfaſſer in einem ganz beſtimmten abgeſchloſſenen Cyclus von Vorſtellungen und Methoden bewegt, den er vergebens durch immer neu angehäufte Schwierigkeiten zu überſchreiten ſich bemüht; er wird immer, ſo oft er ſich den Anſchein giebt, als wolle er den einmal um ihn gezogenen Zauberkreis überſpringen, von einer unſichtbaren Hand auf den bereits bekannten alten Bezirk zurückgeworfen; man ſieht gleichſam hinter den genialen Kunſtgriffen, deren er ſich zu ſeiner Befreiung bedienen will, im Halbdunkel die Feſſeln, welche ſeinen Geiſt hemmen, man hört ihr Raſſeln, wenn er bei gar zu freigebig ſich ſelbſt aufgelegten Schwierigkeiten ſich nicht anders zu helfen weiß, als daß er den Knoten zerhaut, ſtatt ihn zu löſen. Belege für dieſe dem Anſcheine nach kecken Behauptungen kann ich erſt in der Folge geben, wenn die Leſer mir in das Weſen der Diophantiſchen Analyſis werden gefolgt ſein. Hier will ich nur noch das hinzufügen, daß das ſechſte Buch auch ſeiner Form nach einen ganz paſſenden Schluß des Ganzen bildet, indem der Verfaſſer hier, nachdem er in den vorigen Büchern immer nur rein arithmetiſche Aufgaben behandelt hat, den geometriſchen Begriff des rechtwinkligen Dreiecks in ſeine Darſtellung hineinzieht, und die vorhergelehrten Kunſtgriffe und Regeln auf die Auf-

findung ſolcher Dreiecke in rationalen Zahlen, unter mannigfachen beſchränkenden und erſchwerenden Umſtänden anwendet. —

— Meine Anſicht über die aufgeworfene Frage concentrirt ſich in folgenden Sätzen:

erſtens, daß uns von Diophant viel weniger fehlt, als man gewöhnlich glaubt, wenn man ſich an das Zahlenverhältniß von 6 : 13 hält,

zweitens, daß der Defect nicht am Ende, ſondern in der Mitte des Werks, und zwar hauptſächlich zwiſchen dem erſten und zweiten Buche zu ſuchen iſt; endlich

drittens, daß dieſe Verſtümmelung des Werks ziemlich frühe, gewiß aber vor dem dreizehnten oder vierzehnten Jahrhundert, und bereits in Griechenland ſelbſt ſtattgefunden hat.

Belege für den erſten Satz kann ich jetzt noch nicht beibringen, ſondern ich muß dieſelben mir verſparen, bis ich über die übrigen Schriften Diophant's werde geſprochen haben. Darum wenden wir uns hier zunächſt zu dem zweiten der ausgeſprochenen Sätze. Um mit einigem Anſchein von Wahrſcheinlichkeit beſtimmen zu können, wo in Diophant's Werk etwas fehlt, müſſen wir uns zuvörderſt klar zu machen ſuchen, was denn eigentlich fehlt. Das wird uns aber eine vorläufige Betrachtung des Inhalts der einzelnen Bücher ſogleich zeigen. Das erſte Buch enthält beſtimmte Aufgaben des erſten Grades, das zweite bis zum ſechſten Buche dagegen in ſucceſſiver Steigerung von dem Einfachen zum Schwierigeren unbeſtimmte Aufgaben des zweiten Grades. Demnach zeigt ſich ſofort eine ungeheure Lücke zwiſchen dem erſten und zweiten Buche, indem hier die beſtimmten Gleichungen des zweiten und die unbeſtimmten Aufgaben des erſten Grades fehlen. Daß Diophant Aufgaben der letztgenannten Art behandelt habe, bevor er ſich an die unbeſtimmten Aufgaben des zweiten Grades gemacht, wird zwar nirgend ausdrücklich erwähnt, iſt aber wahrſcheinlich und ziemlich ſicher anzunehmen. Ganz gewiß wiſſen wir aber, daß er die in dem Werke, wie es uns vorliegt, fehlende Auflöſung der gemiſchten quadratiſchen Gleichungen gelehrt hat; denn eines Theils verſpricht er die Auflöſung derſelben in der der Einleitung, andern Theils ſetzt er dieſelbe in den folgenden Bü-

chern voraus, indem er theils, wenn er im Verlauf der Rechnung auf eine ſolche Gleichung gekommen iſt, geradezu den Werth der Unbekannten hinſchreibt, theils auch bei der unten näher zu erörternden Methode der Zurückrechnung auf die Form des irrationalen Theils der Wurzel einer quadratiſchen Gleichung als auf eine bekannte Sache ſich bezieht, ohne daß er die Wurzel ſelbſt hingeſchrieben hat. Beiſpiele von reinen quadratiſchen Gleichungen freilich finden ſich ſchon im erſten Buche, z. B. Aufgabe 30. 31. 33. Aber dieſe rechnet Diophant zu den einfachen Gleichungen, und thut meiner Meinung nach daran beſſer, als die meiſten neuern Lehrbücher und Lehrmeiſter, welche über dieſen Gegenſtand lange Kapitel vortragen. Diophant braucht nämlich nicht die Potenz der Unbekannten als Eintheilungsgrund, ſondern die Anzahl der in der Normalgleichung übrig bleibenden Glieder; er ſpricht ſich darüber (Def. XI.) ſo aus: „Wenn man durch die Aufgabe auf eine Gleichung geführt wird, in welcher auf beiden Seiten dieſelben Potenzen (εἴδη) der Unbekannten mit verſchiedenen Coefficienten vorkommen, ſo muß man ſo lange Gleiches gegen Gleiches wegheben (Arab. almukábalah), und Negatives auf beiden Seiten addiren (aljebr), bis man auf jeder Seite nur einen Ausdruck übrig behält. πεφιλοτεχνήσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ· ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται. d. h. „Dieſes wende man auf den Anſatz der Aufgaben, wenn es möglich iſt, ſo lange an, bis ein Glied einem Gliede (alſo gleichviel von welcher Potenz) gleich bleibt (d. h. bis man auf eine Gleichung von der Form $x = a$ oder $x^2 = a$ gelangt). Späterhin aber will ich dir zeigen, wie man die Aufgabe löſt, wenn zuletzt zwei Glieder einem Gliede gleich ſind (d. h. wenn das Reſultat des Weghebens die Gleichung $x^2 \pm ax = \pm b$ iſt)." Dieſe Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen nun, welche Diophant hier verſpricht und auf welche er ſich in den zweiten und den folgenden Büchern mehrfach bezieht, und die ihrer Natur und dieſen Beziehungen zufolge nicht füglich anderswo als zwiſchen dem erſten und zweiten Buche geſtanden haben kann, iſt in der gegenwärtigen Geſtalt ſeines Werks nirgend zu finden.

Aber außerdem, daß ein weſentlicher Theil des Werks, der dem folgenden zur Stütze dient, ausgefallen iſt, hat auch das noch Vorhandene mancherlei Verſtümmelungen erlitten. So gehören z. B.

die Aufgaben 6. 7. 18. 19. des zweiten Buchs, welche beſtimmte Aufgaben des erſten Grades behandeln, ſichtbar in das erſte. Bei den beiden letztgenannten Aufgaben tritt ferner die ſonderbare Erſcheinung hervor, daß die neunzehnte gar nicht aufgelöſt iſt, ſondern die ihr angehängte Auflöſung bloß eine zweite Auflöſung der vorhergehenden Aufgabe iſt, ohne auf die bis zum Anſatze durchgeführte neunzehnte Aufgabe irgend wie Bezug zu nehmen. Die Aufgaben 1 bis 5 des zweiten Buchs ſind, ſo wie ſie gelöſt werden, bloß Wiederholungen der Aufgaben 34. 37. 35. 36. des erſten Buchs. Demnach beginnt das eigentliche Sujet des zweiten Buchs erſt mit der achten Aufgabe deſſelben, und reicht bis zur ſiebzehnten. Die Aufgaben 18. und 19. müſſen, wie erwähnt, in das erſte Buch geſchoben werden, und zwar hinter die Aufg. 25. dieſes Buchs, der ſie ſich genau anſchließen. Mit **II**, 20 beginnt dann eine ganz neue Gattung von Aufgaben, welche dergeſtalt im dritten Buche fortläuft, daß der Anfang des dritten Buchs gar keinen natürlichen Abſchnitt bildet. Die beiden letzten Aufgaben des zweiten Buchs ſind nämlich:

35. Man ſoll drei Zahlen von der Beſchaffenheit finden, daß das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die Summe der drei Zahlen dazu addirt. Man hat alſo die drei Gleichungen

$$x^2 + (x + y + z) = a^2$$
$$y^2 + (x + y + z) = b^2$$
$$z^2 + (x + y + z) = c^2$$

36. Dem ganz analog wird die Auflöſung der drei Gleichungen geſucht

$$x^2 - (x + y + z) = a^2$$
$$y^2 - (x + y + z) = b^2$$
$$z^2 - (x + y + z) = c^2$$

Daran nun ſchließt ſich ganz natürlich die erſte Aufgabe des dritten Buchs an, in welcher die drei Gleichungen ſich ſo geſtalten

$$(x + y + z) - x^2 = a^2$$
$$(x + y + z) - y^2 = b^2$$
$$(x + y + z) - z^2 = c^2$$

und ebenſo die folgende. Es iſt alſo mit Sicherheit anzunehmen,

daß hier die natürliche und urſprüngliche Eintheilung verſchoben iſt. Da ähnliche Erſcheinungen ſich auch in den folgenden Büchern zeigen, daß nämlich häufig in der Mitte eines Buchs ein viel merklicherer Abſchnitt iſt, als am Ende deſſelben, ſo iſt es keinesweges befremdend, daß eines der Vaticaniſchen Manuſcripte denſelben Stoff, den wir haben, anders eintheilt und ſo aus unſern ſechs Büchern ſieben macht; und mit derſelben Ungezwungenheit könnte ein anderer Codex acht und mehr Bücher zählen. Es kommt dazu, daß viele Aufgaben ganz verſtümmelt erſcheinen, andere dagegen, auf welche eine ſpätere ſich bezieht, ausgefallen ſind; namentlich iſt in dieſer Hinſicht das fünfte Buch ſtiefmütterlich von der Mutter Zeit behandelt worden. So ſind augenſcheinlich zwiſchen 21. und 22. drei Aufgaben, analog denen in 21. 22. 23. ausgefallen, auf deren eine der Verfäſſer in 22. verweiſt; bei 24. 25. iſt die Auflöſung verſtümmelt, bei ſehr vielen Aufgaben in ſämmtlichen Büchern iſt die Auflöſung nicht zu Ende geführt, und ſo weiter fort.

Schwerlich aber ſind wohl alle dieſe Entſtellungen des urſprünglichen Textes bloß der Unachtſamkeit eines Abſchreibers zuzuſchreiben, ſondern wohl, wenigſtens zum Theil, der Unwiſſenheit und Ungeſchicklichkeit eines vermeintlichen Verbeſſerers zur Laſt zu legen, wenn ich auch keinesweges der Anſicht Bachet's beitreten mag, welcher annimmt, unſere ſechs Bücher ſeien ein von einem ſpäteren Bearbeiter angefertigter Auszug aus den vollſtändigen dreizehn Büchern. Doch dem ſei wie ihm wolle; für uns ſtellt ſich das hiſtoriſch nicht unwichtige Reſultat heraus, daß dieſe Corrumpirung des Textes und die Bildung der großen Lücke zwiſchen dem erſten und zweiten Buche vor Maximus Planudes, das heißt, vor dem vierzehnten, und wenn das Datum des Codex 191 auf der Vaticaniſchen Bibliothek ſeine Richtigkeit hat, vor dem dreizehnten Jahrhundert ſtatt gefunden haben muß. Maximus Planudes, unter der Regierung der Byzantiniſchen Kaiſer Andronicus des Zweiten und des Dritten, in der erſten Hälfte des vierzehnten Jahrhunderts, hat außer andern mathematiſchen Schriften, auf welche wir in einem ſpätern Theile dieſer Geſchichte zurückkommen werden, auch Scholien zu den beiden erſten Büchern von Diophant geſchrieben, welche Xylander ſeiner Überſetzung einverleibt hat; und wir erſehen aus denſelben, daß Planudes Diophant's Werk ſchon in derſelben Form, mit denſelben Auslaſſungen, Umſtellungen und Corrumpirungen, wenigſtens ſoweit dieſelben dieſe

Digitized by Google

beiden erſten Bücher betreffen, vor Augen hatte wie wir. Desgleichen enthält der erwähnte Vaticaniſche Codex keinen beſſern vollſtändigern Text. Dieſe traurigen Erſcheinungen benehmen uns denn ſo ziemlich alle Hoffnung, das ſo frühzeitig und ſchon in ſeinem Vaterlande corrumpirte Werk unſers Autors jemals wieder in ſeiner Vollſtändigkeit und Reinheit zu beſitzen, wenn nicht etwa einmal ein glücklicher Zufall einem Gelehrten die im zehnten Jahrhundert verfaßte Arabiſche Bearbeitung von Mohammed Abulwafa in die Hände ſpielt.

Dem Stoffe nach verwandt, aber ganz und gar abweichend in der Form der Behandlung, iſt Diophant's Abhandlung über die Polygonalzahlen. Sie iſt nicht, wie das Hauptwerk, analytiſch, ſondern ſynthetiſch gearbeitet; der Verfaſſer ſtellt einzelne Lehrſätze auf und giebt hinter jedem den Beweis; und zwar ſind dieſe Beweiſe ganz in der Euklidiſchen Manier des ſiebenten bis zehnten Buchs der Elemente gehalten, welche man mit Coſſali (ſ. o.) die lineäre Arithmetik nennen könnte, weil ſie Zahlenproportionen und Zahleneigenſchaften an Linien anſchaulich macht. In den Aufgaben bedient ſich Diophant nur einmal dieſes Hülfsmittels, nämlich V, 13, um zu veranſchaulichen, daß wenn $x + y = 1$ und $x + 2$ und $y + 6$ Quadrate ſein ſollen, die Aufgabe darauf hinauskommt, die Zahl 9 in zwei Quadratzahlen zu zerlegen, deren eine größer als 2 und kleiner als 3 wird. Man erſieht ſowohl aus dieſer einzelnen Anwendung, als aus der Behandlung der Sätze von den figurirten Zahlen, daß die lineäre, der Geometrie verwandte Vorſtellungsweiſe noch zu Diophant's Zeit für die Griechen den Vorzug der größern Deutlichkeit hatte.

Wir nannten aber noch unter Diophant's Werken ſeine Porismata. Wir kennen dieſen Titel nur aus drei Citaten, in welchen der Verfaſſer ſich ſelbſt auf dieſelben bezieht, nämlich in den Aufgaben 3. 5. und 19. des fünften Buchs. An allen drei Stellen führt der Verfaſſer mit der feſtſtehenden Redensart ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν Sätze aus der Zahlentheorie als bekannt an. Es iſt alſo nicht zu zweifeln, daß die Porismen eine Sammlung ſolcher Sätze über die Natur und die Zuſammenſetzung der Zahlen aus Quadraten und dergleichen mehr enthielten, und daß eben daraus auch alle die übrigen Sätze der Art entlehnt ſind, welche Diophant gelegentlich entweder ausdrücklich ausſpricht, oder deren Bekanntſchaft ſeine De-

terminationen vorausſetzen [30]). Wie wäre es nun, wenn wir dieſe Porismenſammlung als einen einleitenden Theil in die unbeſtimmte Analyſis des zweiten Grades, als einen bei der ſpätern Verſtümmelung herausgefallenen Theil des ganzen Werks betrachteten? Natürlich müßte dieſe Sammlung dann auch vor der Behandlung der unbeſtimmten Aufgaben des zweiten Grades, das heißt, zwiſchen dem erſten und zweiten Buche geſtanden haben. Wahrſcheinlich war die Behandlungsart dieſes Buchs, eben weil die Citate aus demſelben uns lauter Lehrſätze vorführen, auch ſynthetiſch. Das hindert uns aber nicht, daſſelbe ſammt der Abhandlung über die Polygonalzahlen, die dem Weſen nach ebenfalls dem Hauptgegenſtande ſo ſehr nahe verwandt iſt, für integrirende Theile des ganzen Werks zu halten. Wenigſtens iſt dieſe Annahme immer noch viel wahrſcheinlicher, als wenn man zur Ergänzung der dreizehn Bücher vorausſetzt, daß Diophant in den verlornen Büchern noch ganz neue Methoden zur Auflöſung von unbeſtimmten Aufgaben entwickelt habe, wie Schulz thut, oder gar mit Bombelli anzunehmen, Diophant habe in den verlornen Büchern ſich bis zu den Gleichungen des dritten und vierten Grades verſtiegen, was Bombelli dadurch motivirt, daß Diophant ſo viele Aufgaben vorlegt, deren Zweck iſt, die Summe eines Quadrats und irgend eines Accidens zu einem Quadrat zu machen, was dieſer, wie er glaubt, thut, um mit Hilfe dieſer Methoden die Gleichung $x^4 + px = q$ zu löſen [31]). Bombelli hat ſich ſehr viel, ja faſt ſein ganzes Leben hindurch, mit der Verbeſſerung und Vervollſtändigung der zu ſeiner Zeit ganz neuen Auflöſungen der Gleichungen des dritten und vierten Grades beſchäftigt, bei deren letztern es nach der damals üblichen Auflöſung allerdings darauf ankam, einen Ausdruck in der Form $Ax^2 + Bx + C$, deſſen Coefficienten eine zweite in die Gleichung eingeführte Unbekannte in ſich ſchloſſen, zu einem Quadrate zu machen. Wir dürfen uns alſo nicht wundern, wenn er in Diophant's davon ganz unabhängige Unterſuchungen ſeine eigene Lieblingsidee hineintrug. Diophant erklärt ja aber, (**Def. XI.**) ausdrücklich, daß er bei dem Vortrage und der Ausarbeitung dieſer Aufgaben keinen andern Zweck gehabt habe, als eben den Schüler in der Methode zu üben, daß alſo dieſe Aufgaben

30) Z. B. III, 22. V, 12. 14. VI, 15. Siehe unten Kap. X.

31) Schulz Vorr. S. XXI. Cossali Origine I, 76.

ſich ſelbſt Zweck ſeien; und in der That hätte der ſo ſcharfſinnige und ſinnreiche Diophant, wenn er mit ſeinen Aufgaben den von Bombelli ihm ſubſtituirten Zweck zu verfolgen beabſichtigt hätte, eben nicht den kürzeſten Weg gewählt, der zum Ziele führte. Aber auch in Betreff der Schulz'ſchen Hypotheſe gilt, was ich oben ſchon ſagte. Wir finden in dem Vorhandenen durchaus nicht die geringſte Andeutung, daß noch etwas Anderes, Höheres folgen ſolle. Diophant's Syſtem und Ideenkreis erſcheint ſo ganz in ſich ſelbſt abgeſchloſſen und ſeine Methoden kehren ſo regelmäßig in einen und denſelben Kreis mathematiſcher Vorſtellungen zurück, daß ſowohl die Schulz'ſche, als noch vielmehr die Bombelli'ſche Annahme ganz ohne Haltung erſcheint [32]). Was aber vielmehr, wenn auch nur als äußeres Zeugniß, für meine Hypotheſe zu ſprechen ſcheint, für die nämlich, daß die drei uns bekannten Werke Diophant's nur **ein** Ganzes bildeten, iſt auf der einen Seite der Umſtand, daß wir nirgend eine Erwähnung von mehr als einem Werke Diophant's finden [33]), auf der andern Seite aber der ganz unbeſtimmte Titel 'Αριθμητικά,

---

32) Man hat noch einen Grund für die verloren gegangene Behandlung der höheren Gleichungen bei Diophant davon hergenommen, daß er Def. II. die Potenzen der Unbekannten und deren Zeichen bis zum ſechſten Grade erklärt. Warum das, ſagt man, wenn er ſie nicht brauchen, und warum nicht noch mehr, wenn er ſie bloß nennen wollte? Aber er braucht ſie wirklich und zwar gerade bis zur ſechſten Potenz. Nur folgt daraus, daß man in einem Buche den Ausdruck x^6 findet, noch nicht, daß dieſes Buch die Gleichungen des ſechſten Grades löſen lehrt. Diophant kommt zuweilen durch ſeine Annahme auf eine Gleichung, welche höhere Potenzen der Unbekannten, jedoch nie über die ſechſte hinaus, enthalten, die ſich dann aber allemal im Laufe der Rechnung auf irgend eine Weiſe reduciren läßt. Man vergleiche zu dieſem Ende IV, 19. V, 21. 24. 25. VI, 23.

33) Da die beiden einzigen Stellen in Griechiſchen Autoren, welche mit völliger Evidenz von unſerm Diophantus reden, nämlich die oben beigebrachten Stellen von Theon Alexandrinus und Johannes von Jeruſalem bloß den Namen ohne das Werk nennen, ſo können hier nur die Arabiſchen Anetoren in Betracht kommen; und da iſt wirklich an beiden Stellen in Abulfaraj's Geſchichte der Dynaſtien p. 141 und p. 338, und ebenſo in den beiden Stellen in Caſiri's Biblioth. Arab. Hisp. Escur. T. I. p. 371 und p. 434 immer nur von dem Buche **Diophant's** die Rede. Woher anders iſt das zu erklären (da doch, wie ſämmtliche jetzt vorhandene Handſchriften beweiſen, wenigſtens das Buch über die Polygonalzahlen mit der Arithmeik verbunden zu ſein pflegte), als daraus, daß man nur **ein** Werk Diophant's, 'Αριθμητικά, kannte, welches Alles enthielt, was der Autor geſchrieben hat.

Arithmetiſches. Dieſes Pluralneutrum ſcheint mir geradezu auf ein Conglomerat arithmetiſcher Abhandlungen verſchiedenen Inhalts hinzudeuten, und ich halte es nicht für unmöglich, daß daſſelbe noch einen oder den andern Aufſatz, ähnlich dem über die Polygonalzahlen, der überdies mitten in einem Satze abgebrochen iſt, mit in ſich begriff. Im Allgemeinen iſt dieſe Hypotheſe nicht ganz neu; ſchon Colebrooke hat ſie als möglich ausgeſprochen, und daraus und aus der vielleicht früher abweichenden Abtheilung der einzelnen Bücher, wofür der Vaticaniſche Codex No. 200. ſpricht, den ſehr probablen von mir oben ausgeſprochenen Schluß gezogen, daß uns nämlich von Diophant viel weniger verloren gegangen ſein mag, als man in der Regel zu glauben geneigt iſt [34]). Unter dem Verlorenen dürften die Porismen am Meiſten zu bedauern ſein, da Diophant in dieſen Sätzen, ſoviel ſich aus den wenigen Citaten ſchließen läßt, ſeiner Zeit bedeutend vorausgeeilt zu ſein ſcheint, und da viele derſelben erſt ſpät wieder bewieſen worden ſind.

Obgleich ich nun im Vorigen meine feſte ſubjective Überzeugung, hervorgegangen aus dem anhaltenden und gewiſſenhaften Studium des intereſſanten Mathematikers, ausgeſprochen und mit den mir zu Gebote ſtehenden Mitteln und Gründen derſelben Objectivität zu geben verſucht habe, ſo bin ich doch weit davon entfernt, dieſe meine Anſicht als allein und feſt daſtehende Wahrheit geltend machen zu wollen; vielmehr geſtehe ich gern ein, daß es bei der Dürftigkeit aller

34) Algebra of the Hindu's Note M. p. LXI: In truth the division of manuscript books is very uncertain: and it is by no means improbable, that the remains of Diophantus, as we possess them, may be less incomplete and constitute a larger portion of the thirteen books announced by him (Def. 11), than is commonly reckoned. His treatise on polygon numbers, which is surmised to be one (and that the last of the thirteen), follows, as it seems, the six (or seven) books in the exemplars of the work, as if the preceeding portion were complete. It is itself imperfect: but the manner is essentially different from that of the foregoing books: and the solution of problems by equations is no longer the object, but rather the demonstration of propositions. There appears no ground, beyond bare surmise, to presume, that the author, in the rest of the tracts relative to numbres which fulfilled his promise of thirteen books, resumed the Algebraic manner: or in short, that the Algebraic part of his performance is at all mutilated in the copies extant, which are considered to be all transcripts of single imperfect exemplar.

aller äußern Zeugniſſe völlig unmöglich iſt, in Bezug auf Diophant's Werk zu einem ganz ſichern Reſultat zu gelangen. Aber wie ich ſelbſt Tadel verdiente (und ſelbſt der Erſte ſein würde, der ihn ausſpräche), wenn ich mir in Betreff dieſes dunkeln und ſchwierigen Gegenſtandes irgend eine kategoriſche Behauptung erlaubt hätte, eben ſo ſehe ich mich genöthigt, meinerſeits jeder abſprechenden Äußerung mit rückſichtloſer Strenge entgegenzutreten. Ich ſehe zum Beiſpiel nicht ein, wie Reimer in ſeiner Überſetzung der Boſſut'ſchen Geſchichte der Mathematik [35]) bei den Worten ſeines Auctors: „Il avoit écrit treize livres d'arithmétique: les six premiers (?) sont arrivés jusqu'à nous; tous les autres sont perdus, si, néanmoins, un septième, qu'on trouve dans quelques (!) éditions de Diophante, n'est pas de lui," ich ſehe nicht ein, ſage ich, wie Reimer hier zu der apodiktiſch ausgeſprochenen Anmerkung kommt: Dieſes Buch de numeris multangulis iſt eine für ſich beſtehende Schrift und gehört *keinesweges* in die Sammlung der Arithmeticorum Diophant's." Solcher Gnoſticismen muß ſich jeder Hiſtoriker bei noch ſo wenig aufgeklärten Sujets, wie das vorliegende, enthalten. Ich habe abſichtlich Boſſut's Worte hieher geſetzt, weil auch an ihnen manches zu erinnern iſt. Über die six *premiers* livres will ich nicht weiter ſprechen; zweitens befindet ſich die Schrift über die Polygonalzahlen nicht bei *einigen*, ſondern bei *allen* Ausgaben und Überſetzungen Diophant's, von Xylander bis Schulz; drittens aber iſt bis jetzt Boſſut der Einzige, der die Echtheit dieſer Schrift als einer Diophantiſchen in Zweifel zieht, wozu doch wohl gar kein Grund vorhanden iſt.

Wenn wir aus den oben auseinandergeſetzten Gründen den oft angeführten Commentar der *Hypatia* über Diophant müſſen fallen laſſen, ſo bleibt uns nur *ein* Grieche übrig, der über dieſen Auctor geſchrieben hat, nämlich der ſchon erwähnte Mönch *Maximus Planudes*, deſſen Scholien zu dem erſten und zweiten Buche der Ἀριθμητικά ſich bei einigen Handſchriften, und Lateiniſch in Xylander's Überſetzung des Diophant befinden. Wenn wir bedenken, wie mannigfach das in wiſſenſchaftlicher Hinſicht viel weniger bedeutende Werk von Nikomachus paraphraſirt und erläutert worden iſt, ſo zeigt dieſe Armuth an einer Diophantiſchen Literatur bei den

35) Th. 1. S. 28. Die Stelle des Originals ſteht T. 1. p. 9.

Griechen, verbunden mit dem völligen Ausſterben der Diophantiſchen Methode, recht deutlich, wie wenig dieſer Schriftſteller von ſeinen Landsleuten beachtet und verſtanden worden, wie wenig er auf das geiſtige Leben der ſpätern Mathematiker eingewirkt hat. Erſt tauſend Jahre nach dem Erſcheinen ſeines Werkes wagte ſich ein für ſeine Zeit allerdings ſehr gelehrter, namentlich als Kenner der Arabiſchen Mathematiker rühmlichſt bekannter Mönch an eine Bearbeitung des Werks ſeines großen Landsmannes, aber auch er blieb bei den beiden Elementarabſchnitten des Auctors ſtehen.

Aber bedeutend früher hat Diophant das glückliche Loos gehabt, den Arabern in die Hände zu fallen. Unter den Schriften des Mohammed Abulwafa [36]), der zu Buzjan (ſpr. Bûz-dschân) bei Niſchapur in Perſien im Jahre 940 (328 H.) geboren, 959 (348 H.) nach Bagdad ging, um ſich in der Arithmetik und Geometrie auszubilden, ſpäterhin daſelbſt als Lehrer auftrat und im Jahre 998 (388 H.) zu Bagdad ſtarb, findet ſich nach Abulfaraj und dem Tharikh-al-Hokma (Biblioth. philosophorum bei Caſiri, wörtlich: Chronik der Gelehrten) ein Commentar über das Werk Diophant's [37]), der alſo etwa um das Jahr 970 verfaßt ſein mag.

---

36) Sein vollſtändiger Name iſt Mohammed ibn Mohammed ibn Yahyâ ibn Ismaîl ibn Al-abbâs Abu'lwafâ Al-Bûzjâni, محمد بن محمد بن يحيي بن اسمعيل بن العباس ابوالوفا البوزجاني und bei Caſiri (I. 346) führt er den Beinamen Al-hâsib (الحاسب) der Rechner oder der Arithmetiker. Vergl. auch Casiri I. 433. 434 und Abulf. p. 338.

37) Abulfaraj a. a. O. ſagt فسر كتاب ديوفنطوس في الجبر والمقابلة „er commentirte das Werk Diophant's über Algebra," und im Thârîkh-al-Hokmâ (Casiri p. 434) heißt es تفسير كتاب ديوفنطس في الجبر „ein Commentar (eine Erklärung) über das Werk Diophant's über Algebra." Von beiden Autoren iſt das Wort فسر gebraucht, welches zweideutig iſt; ein Commentar heißt ſonſt gewöhnlich شرح, eine Überſetzung نقل. Da es nun nicht wahrſcheinlich iſt, daß Abulwafa einen Commentar über ein unüberſetztes Griechiſches Buch geſchrieben hat, ſo iſt der gebrauchte Ausdruck wahrſcheinlich von einer unwörtlichen, paraphraſirenden Überſetzung zu verſtehen. Vergl. Colebr. l. l. p. LXXI. Cossali I. 175. 176. Ich will hier noch etwas über die Stelle bei Abulfaraj p. 141 ſprechen; es heißt daſelbſt, nachdem mehre Gelehrte aus der Zeit Julians genannt worden ſind: ومنهم ديوفنطس وكتابه اب قسمة في الجبر والمقابلة مشهور „unter ihnen war Diophantus, und ſein Buch ..... über Algebra iſt berühmt."

Es iſt dieſes die erſte und einzige Arabiſche Bearbeitung Diophant's, von der wir Nachricht haben, und es iſt daher grundfalſch, wenn Boſſut [38]) ſagt, Diophant ſei einer der erſten Griechiſchen Mathematiker geweſen, welchen die Araber überſetzt haben, da er im Gegentheil einer der letzten iſt und namentlich Euklides, Apollonius und Ptolemäus faſt zweihundert Jahre früher in Arabiſchen Bearbeitungen erſchienen ſind. Die Auffindung und Bekanntmachung dieſer Bearbeitung von Abulwafa würde von dem größten hiſtoriſchen In-

---

Die Worte اب قسمة geben nämlich gar keinen Sinn. Für قسمة notirt Pococke eine andere Leſeart يسميه „welches er nennt," wodurch aber nur ein Theil der Schwierigkeit gehoben iſt. Pococke begnügt ſich damit und überſetzt: **cujus liber A, B** (d. i. اب) **quem Algebram vocat etc.** Ebenſo überſetzt Bauer I. S. 129 „deſſen Buch A B, die Algebra genannt, ſehr berühmt iſt." Es kommt aber durch dieſe zweite Leſeart der Unſinn hinein, daß Diophant ſein Buch aljebr w' almukâbalah genannt haben ſoll. Am Beſten kommt man aus der Schwierigkeit, wenn man die corrumpirten Worte اب قسمة ganz wegläßt. Abulfaraj hat oft das Tharikh-al-Hokma faſt wörtlich excerpirt. Wie ſtände es daher um folgende Conjectur. Bei Caſiri I. p. 346 wird ein Werk von Abulwafa genannt, welches den Titel führt كتاب قسمة الاعداد „ein Werk über die Eintheilung der Zahlen." Offenbar kannte Abulfaraj Diophantus nur aus Abulwafa's Bearbeitung, er hatte alſo das im Tharik-al-Hokma gegebene Verzeichniß der Werke dieſes Letzteren vor ſich liegen, und aus Verſehen kroch ihm der Titel des zuletzt angeführten Werks in ſeinen Text, und er vergaß, nachdem er den Irrthum eingeſehen, die Worte vollſtändig auszuradiren, ſo daß die anderthalb Worte اب قسمة ſtehen geblieben ſind. Indeß will ich auf dieſe Conjectur keinen Werth legen, ſondern ich geſtehe gern ein, daß die Idelerſche Vermuthung, اب قسمة ſei vielleicht eine Verſtümmelung für ارثماطيقي (ob vielleicht auch ارثميتيقة oder ähnlich geſchrieben?) Arithmetik, vor der meinigen den Vorzug der weniger complicirten hat. Dann würde der vollſtändige Sinn der Worte ſein: „Deſſen Buch, Arithmetika (als Angabe des Titels), über Algebra (handelnd) berühmt iſt." Vergl. Schulz a. a. O. S. XIV. die Note.

38) **T. I. p. 196. 197. Il paraît certain que les Grecs n'ont commencé à connaître l'algèbre qu'au temps de Diophante. Reste à savoir si les Arabes l'ont puisée dans cet auteur *qu'ils traduisirent un des premiers*, ou dans quelqu'autre source, ou s'ils n'en sont pas eux-mêmes les inventeurs. Les savans sont partagés sur ces trois questions.** In Reimer's Überſetzung finde ich dieſe Stelle nicht; alſo iſt ſie wahrſcheinlich ein verſchlimmernder Zuſatz in der zweiten Auflage. Zwar nennt das Tharith-al-Hokma (Casiri I. 371) eine Überſetzung Diophant's ohne den Namen des Überſetzers

tereſſe ſein, indem ſie darthun würde, ob der Überſetzer das Werk Diophant's bereits in der verſtümmelten, oder noch in ſeiner vollſtändigen und reinen Urgeſtalt vor Augen gehabt hat; in dem letzteren Falle wären wir dann im Stande, dieſes unſchätzbare Werk des Alterthums wieder herzuſtellen, wie es mit ſo vielen Schriften der Griechen, von Archimedes, Apollonius und Andern, geſchehen iſt; der erſte Fall dagegen würde die Verſtümmelung des Werks noch bedeutend früher hinaufrücken, als wir es ſchon aus andern Gründen gethan haben. Aus dem bloßen Titel eines zweiten Werks deſſelben Arabiſchen Mathematikers, welcher lautet: „Beweiſe für die von Diophant in ſeinem Buche aufgeſtellten Sätze“ [39]) läßt ſich auf deſſen Inhalt nicht mit Sicherheit ſchließen. Sollten es etwa Beweiſe für die in den Porismen enthaltenen Sätze aus der Zahlentheorie ſein? Die hat aber doch Diophant wohl ſelbſt bewieſen. Daher iſt es wahrſcheinlicher, daß Abulwafa die in den Aufgaben zerſtreut vorkommenden, unbewieſenen Sätze mit Beweiſen verſehen hat. Iſt das der Fall, ſo folgt daraus mit ziemlicher Gewißheit, daß auch ſchon damals, im zehnten Jahrhundert, die Porismen nicht mehr vorhanden geweſen ſind. Indeß traue ich mir, wie geſagt, aus der bloßen Titelangabe hierüber kein Urtheil zu.

Verhältnißmäßig eben ſo ſpät iſt Diophant nach dem Wiederaufleben der Wiſſenſchaften in Europa bekannt geworden. Die oben angeführte Stelle aus **Regiomontan's** Antrittsrede zu Padua iſt die älteſte Erwähnung Diophant's im Occident, die bis jetzt bekannt geworden iſt. Indeß blieben noch lange Zeit alle Nachrichten über

ديوفنطس اليوناني الاسكندراني فاضل كامل مشهور في وقته له في صناعة الجبر كتاب مشهور خرج الي العربية) „Diophantus, der Grieche, aus Alexandria, ausgezeichnet, vollkommen, berühmt zu ſeiner Zeit; er hat über die Kunſtgriffe der Algebra ein berühmtes Buch geſchrieben, welches ins Arabiſche übergegangen iſt“); da aber derſelbe Verfaſſer an einer andern Stelle (p. 434) ausdrücklich Mohammed Abulwafa als Überſetzer nennt, ohne einer früheren Bearbeitung zu gedenken, ſo iſt, in Übereinſtimmung dieſer Nachricht mit Abulfaraj, der auch an keine andere Arbeit über Diophant denkt, nicht zu zweifeln, daß der Verfaſſer des Tharikh-al-Hokma auch an der beigebrachten Stelle die Überſetzung von Abulwafa im Sinne hat.

39) Casiri I. p. 434: كتاب البراهين علي القضايا في ما استعمله ديوفنطس في كتابه

dieſen Auctor ganz unbeſtimmt. Beinahe hundert Jahre nach Regiomontan erwähnt **Joachim Camerarius** des Diophantiſchen Werks als in der Vaticaniſchen Bibliothek vorhanden, und iſt ſehr begierig es zu ſehen, hat aber, wie es ſcheint, darüber die verkehrte Anſicht, daß es die Logiſtik, das heißt, die praktiſche Rechenkunſt lehre [40]). Um dieſelbe Zeit ſpricht **Jacob Peletarius** von einem gewiſſen Griechen Diophant [41]). Wunderbar bleibt es indeß, daß nachdem deutſche Mathematiker ſeit 1470 und vielleicht früher von dem Daſein des Diophantiſchen Codex in Rom geſprochen hatten, dieſe Entdeckung den Italienern ſelbſt ganz entgangen zu ſein ſcheint. In der Reihe ihrer großen Mathematiker, Luca Pacioli (de Burgo), Tartaglia, Cardan, findet ſich keiner, der nur Diophant's Namen nennte. Der erſte Italiener, dem Diophant bekannt geworden zu ſein ſcheint, und der zugleich ernſtlich an eine Bearbeitung deſſelben gedacht hat, war **Raphael Bombelli**. Er hatte, wie aus ſeinen oben S. 263. mitgetheilten Worten hervorgeht, bisher von Diophant nichts gewußt. „Es hat ſich," ſo ſagt er im Jahre 1572, „in den jüngſt verfloſſenen Jahren ein Griechiſches Werk über Algebra in der Vaticaniſchen

40) De Graecis Latinisque numerorum notis et praeterea Saracenicis seu Indicis etc. etc. studio Joachimi Camerarii Papeberg. 1556. (ſ. oben Kap. V. S. 222. in der Literatur des Nikomachus). Hier heißt es in der Epistola ad Zasium ſo: Venit mihi in mentem eorum quae et de hac et aliis liberalibus artibus dicta fuere, in eo convivio cujus in tuis aedibus me et Peucerum nostrum participes esse, suavissima tua invitatio voluit. Cum autem de autoribus Logistices verba fierent, et a me *Diophantus* Graecus nominaretur, qui extaret in Bibliotheca Vaticana, ostendebatur tum spes quaedam, posse nobis copiam libri illius. Ibi ego cupiditate videndi incensus, fortasse audacius non tamen infeliciter, te quasi procuratorem constitui negotii gerendi, mandato voluntario, cum quidem et tu libenter susciperes quod imponebatur, et fides solenni festivitate firmaretur, de illo tuo et poculo eleganti et vino optimo. Neque tu igitur oblivisceris ejus rei, cujus explicationem tua benignitas tibi commisit, neque ego non meminisse potero, non modo excellentis virtutis et sapientiae, sed singularis comitatis et incredibilis suavitatis tuae.

41) Arithmeticae practicae methodus facilis, per *Gemmam Frisium* etc. Huc acc. *Jacobi Peletarii* annotationes. Coloniae. 1571. (Die Vorrede von Peletarius hat aber das Datum Lutetiae. 1558.) S. p. 72. *Nota Peletarii:* Algebra autem dicta videtur a Gebro Arabe ut vox ipsa sonat; hujus artis si non inventore, saltem excultore. Alii tribuunt Diophanto cuidam Graeco.

Bibliothek vorgefunden, deſſen Verfaſſer ein gewiſſer Diophantes (sic) von Alexandrien iſt, der zur Zeit des Antoninus Pius lebte.“ Dieſes Manuſcript wurde ihm von einem gewiſſen Pazzi, einem damaligen Lehrer der Mathematik zu Rom, gezeigt, und nachdem ſie Beide gefunden, daß der Verfaſſer in der Arithmetik ſehr einſichtsvoll ſei (assai intelligente de' numeri), ſo beſchloſſen ſie das Werk zu überſetzen, um die Welt damit zu bereichern; wirklich hatten ſie bereits fünf von den vorhandenen ſieben Büchern überſetzt, da wurden ſie Beide durch anderweitige Arbeiten an der Vollendung verhindert. Dieſes Ereigniß fällt demnach einige Jahre vor 1572, dem Datum von Bombelli's Algebra, deren Vorrede jene Worte entlehnt ſind. Unterblieb nun gleich die beabſichtigte Bekanntmachung Diophant's, ſo nahm doch nichts deſto weniger Bombelli alle Aufgaben der vier erſten Bücher und einzelne aus dem fünften Buch in ſeine Algebra auf, und warf dadurch das erſte Licht auf dieſen bis dahin unbekannten Schriftſteller. Auch geſteht Bachet, daß Bombelli's Arbeit, obgleich er die Diophantiſchen Aufgaben mit ſeinen eigenen vermengt und den Auctor ganz frei behandelt habe, doch in manchen Stücken vor der Xylandriſchen Überſetzung den Vorzug verdiene und ihm oft behilflich geweſen ſei, um dieſe zu verbeſſern. Nur begeht Bachet hier einen Anachronismus, wenn er ſagt, Bombelli habe ſich erſt nach dem Erſcheinen der Xylandriſchen Interpretation an Diophant's Bearbeitung gemacht [42]). Xylander erhielt das Manuſcript, nach welchem er arbeitete, erſt 1571, nachdem alſo ſicher Bombelli, da ſchon im folgenden Jahre ſeine Algebra im

42) Episi. ad Lect.: Primns Guilielmus Xilander Augustanus, vir omnibus disciplinis excultus, Diophantum Latinum edidit etc. Und auf der folgenden Seite: Non longo post Xilandrum intervallo Ruphael Bombellius Bononiensis, Graecum e Vaticana Bibliotheca Diophanti codicem nactus, omnes priorum quatuor librorum quaestiones, et e libro quinto nonnullas, problematibus suis inseruit, in Algebra sua quam Italico sermone conscripsit. Sed suas Diophanteis quaestionibus ita immiscuit, ut has ab illis distinguere non sit in promptu, neque vero se fidum satis intepretem praebuit, cum passim verba Diophanti immutet, hisque pleraque addat, pleraque pro arbitrio detrahat. In multis nihilominus interpretationem Bombellii, Xilaudriana praestare, et ad hanc emendandam me adjuvisse ingenue fateor. Es iſt übrigens zu bemerken, daß der gelehrte Bachet den Namen ſeines Vorarbeiters immer unrichtig ſchreibt.

Druck erſchienen iſt, ſeine Arbeit über Diophant ſchon beendigt oder vielmehr aufgegeben hatte. Xylander's Überſetzung aber erſchien gar erſt 1575.

Wilhelm Xylander oder Holzmann, von armen Eltern aus Augsburg gebürtig, ſeit 1558 Profeſſor in Heidelberg, machte im Jahre 1571 eine Reiſe nach Wittenberg, wo ihm von den dortigen Profeſſoren Sebaſtian Theodorich und Wolfgang Schuler (oder Schüler, Lat. Schulerus) ein Bruchſtück von einer Abſchrift des Diophantiſchen Werks gezeigt wurde; zugleich wurde ihm Andreas Dudicius [43]) als Beſitzer des vollſtändigen Codex genannt. Xylander ſchrieb ſich eine Aufgabe ab, und nachdem er ſie dem Arzte Simon Simonius aus Lucca mitgetheilt, ſchrieben beide gemeinſchaftlich an Dudicius und baten ihn um Mittheilung des Codex. Dieſer ſchickte ihnen die Handſchrift ohne Verzug zu und ermunterte und beſtärkte Xylander in ſeinem Vorhaben, dieſelbe zu überſetzen. So erſchien denn nach Verlauf von vier Jahren Diophant zum erſtenmal vor dem Publicum unter dem Titel: *Diophanti Alexandrini* Rerum Arithmeticarum libri sex, quorum primi duo adjecta habent scholia Maximi (ut conjectura est) Planudis. Item liber de numeris polygonis seu multangulis. Opus incomparabile, verae Arithmeticae Logisticae perfectionem continens, paucis adhuc visum. A *Guil. Xylandro* Augustano incredibili labore latine redditum et Commentariis explanatum, inque lucem editum ad Illustriss. Principem *Ludovicum Vuirtembergensem.* Basileae per Eusebium Episcopium et Nicolai Fr. haeredes. 1571. (fol.). Xylander's Arbeit bleibt immer, trotz der mancherlei Mängel, welche bei der erſten Bearbeitung eines ſo ſchwierigen Auctors, überdies nach einem einzigen fehlerhaften Manuſcripte unvermeidlich waren, höchſt verdienſtvoll, und verdient nicht den harten Tadel, den ſie hie und da erfahren hat. Zwar hat Xylander manchmal ſeinen Auctor nicht verſtanden, Man-

43) Xylander ſchreibt: Andreas Dudicius Sbardellatus, hoc tempore Imperatoris Romanorum apud Polonos orator. (Schulz a. a. O. S. XXXIII). Ich weiß nicht, was der Zuſatz Sbardellatus zu bedeuten hat; nach den folgenden Worten ſcheint der Mann kaiſerlicher Geſandter am Polniſchen Hofe geweſen zu ſein, und nicht Polniſcher Staroſt, wie Coſſali I, 67 ſich ausdrückt: Polacco starosta Sbardellato; und ebend. p. 50 kehrt Coſſali das ganze Verhältniß um, und nennt ihn nobile polacco presso l'imperial corte oratore.

Digitized by Google

ches entſtellt (z. B. Def. 7. 8.), zwar iſt ſeine Überſetzung rauh und unlateiniſch, indem er ſich aus Furcht zu fehlen gar zu ängſtlich an den Buchſtaben des Originals hält; aber das Reſultat war darum nicht weniger glänzend. Das mathematiſche Publicum hatte Diophant's Werk, und wie einflußreich ſofort das Erſcheinen dieſer Überſetzung auf die Entwickelung und Geſtaltung der Algebra einwirkte, werden wir zu beobachten Gelegenheit haben, wenn wir an dieſem Puncte unſerer Geſchichte werden angelangt ſein.

Man findet zuweilen [44]) die falſche Angabe, daß Xylander auch das Griechiſche Original herausgegeben habe. Es ſcheint das aber auf einem Mißverſtändniſſe zu beruhen, indem Xylander an manchen Stellen des Commentars auf das Original hindeutet, welches er wahrſcheinlich herauszugeben beabſichtigte. Übrigens war ſchon Bachet über dieſen Punct in Zweifel, er ſchreibt in ſeiner oft von mir citirten *Epistola ad Lectorem:* **An vero et Graece a Xilandro editus sit Diophantus, nondum certo comperire potui. Videtur sane in multis suorum Commentariorum locis, de Graeco Diophanto tanquam a se edito, vel mox edendo, verba facere. Sed hanc editionem, neque mihi vidisse, neque aliquem qui viderit hactenus audivisse contigit.** Vielleicht wurde Xylander an der Edition des Textes durch ſeinen frühen Tod, der ſchon am 10. Februar des folgenden Jahres, 1576, erfolgte, verhindert.

Vielleicht gleichzeitig, oder etwas ſpäter, aber noch im ſechszehnten Jahrhundert, ſcheint der Neapolitaniſche Mathematiker Joſeph Auria Diophant's Schriften ins Lateiniſche überſetzt, aber nicht durch den Druck bekannt gemacht zu haben. Nach Schulz [45]) iſt der Titel der Schrift: **Diophanti libri sex, cum scholiis graecis Maximi Planudae, atque liber de numeris polygonis, collati**

---

44) Z. B. Mönnich II. 472. „Xylander hat ihn, nach einer ihm von Dudilius (sic), Kaiſerlichen Geſandten am Polniſchen Hofe, mitgetheilten Handſchrift, nebſt einer Überſetzung davon, mit Kommentarien 1575 herausgegeben. Aber dieſe Ausgabe iſt von denen, welche Bachet de Megirlac (sic) 1611 (sic) und Fermat 1670 veranſtalteten, weit übertroffen worden.

45) Vorr. S. XLIII. „Noch erwähnen die Litteratoren, daß ſich in der Bibliothek eines Carl von Montchall eine Bearbeitung des Diophantus von dem berühmten Mathematiker Joſeph Auria von Neapel (vermuthlich doch nur handſchriftlich) befunden habe, welche den Titel führt u. ſ. w." ſ. o.

cum Vaticanis codicibus, et latine versi a *Josepho Auria*. Bei Heilbronner finde ich unter den Handſchriften der Ambroſiſchen Bibliothek zu Mailand [46]): **Diophanti arithmet. libri et de num. polygonis, Josepho Auria interprete.** Nach Jöcher [47]) hat er, was unwahrſcheinlich iſt, nur die Schrift über die Polygonalzahlen überſetzt. Sonſt habe ich über dieſe Arbeit keine Nachrichten finden können; ſelbſt Coſſali erwähnt ihrer nicht.

Ich übergehe hier ſolche Arbeiten über Diophant, welche nicht ihn als Auctor, ſondern nur die von ihm behandelten Sachen als Gegenſtand mathematiſcher Unterſuchungen angehen. Der Art ſind die Arbeiten von Vieta in ſeinen **Zeteticis**, ferner von Stevin, Oughtred, Billy, Ozanam und Andern, von denen in der Geſchichte ihrer Zeit die Rede ſein wird. Demnach haben wir hier nur noch folgende Ausgaben und Überſetzungen zu nennen.

Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Nunc primum Graece et Latine editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati. Auctore *Claudio Gaspare Bacheto Meziriaco* Sebusiano. Lutetiae Parisiorum, sumptibus Sebastiani Cramoisy. 1621. fol. Es iſt dieſes die erſte, oder eigentlich einzige Ausgabe des Griechiſchen Originals, die ihrem Bearbeiter alle Ehre macht. Mit unermüdlichem Fleiße, inmitten eines langwierigen Fiebers [48]), hat Bachet die mannigfachen Hinderniſſe, welche die Schwierigkeit des Auctors auf einer, die Verderbtheit und Uncorrectheit der Manu-

46) Hist. math. univ. p. 563. §. 90.

47) Gelehrten-Lexicon: „AURIA (Joseph), ein berühmter Mathematikus von Neapolis, war um das Jahr 1590 bekannt, ... überſetzte *Diophantis* (sic) Alexandrini Werck de numeris polygonis und Heronis Alexandrini Bücher aus dem Griechiſchen ins Lateiniſche, gab auch *Autolycum* de sphaera quae movetur etc. etc. mit neuen Überſetzungen heraus. To. Ol." Alſo iſt doch Diophant's und Heron's Werk nicht herausgegeben. Die Citate bedeuten: Toppi bibliotheca napoletana und Oldoin Athenaeum romanum (oder Ath. ligusticum).

48) *Montucla* I. 323: L'historien de l'Académie Françoise nous apprend que M. Bachet y travailla durant le cours d'une fièvre quarte, et qu'il disoit lui-même que, rebuté de la difficulté de ce travail, il ne l'auroit jamais achevé sans l'opiniâtreté melancolique que sa maladie lui inspiroit.

ſcripte auf der andern Seite ihm in den Weg legten, überwunden; und ſein gelehrter, nur manchmal zu weitläufiger Commentar beweiſt nicht nur, wie tief er ſich in ſeinen Auctor hineingearbeitet, ſondern hat auch nicht wenig zu dem allgemeinen Verſtändniſſe und zur nähern Bekanntſchaft der Mathematiker mit den Eigenthümlichkeiten Diophant's beigetragen. Zumal gilt dieſes auch von den drei Büchern **Porismatum**, welche er dem Texte vorausgeſchickt hat, und die Manches enthalten, was zu jener Zeit neu war, ebenſo wie die am Ende angehängten **Appendicis ad librum de numeris polygonis libri duo**, in welchen er die Diophantiſche Theorie weiter fortführt. Bachet hat, wie oben (Note 24) erwähnt iſt, die Ausgabe nach einem Codex der Königlichen Bibliothek zu Paris veranſtaltet, den er mit dem Palatiniſchen und einem Vaticaniſchen, ſowie mit der Xylanderſchen Überſetzung verglichen hat, welche alle aber wunderbar in allen Lücken und Fehlern übereinſtimmten, ſo daß er oft zu Conjecturen hat ſeine Zuflucht nehmen müſſen. Indeß iſt er dabei ſehr gewiſſenhaft zu Werke gegangen, und hat jede Einſchaltung, zu der er ſich, um einen Sinn in den Text zu bringen, genöthigt ſah, durch Klammern, [ ], und ſolche Worte, die ihm corrumpirt oder überflüſſig ſchienen, durch Sternchen eingeſchloſſen, ſo daß man ſeine Conjecturen von dem Texte immer genau unterſcheiden kann. Wo es nöthig war, hat er ſich über dieſe Verbeſſerungen oder über Vorſchläge zu ſolchen, auch in den Anmerkungen ausgeſprochen. Die Mängel, welche dieſe Ausgabe noch behalten hat, ſind nicht Schuld des Herausgebers, ſondern leider bedingt durch die ſchlechte Beſchaffenheit der Hilfsmittel, und ſo haben wir denn auch vorläufig noch keine genügendere Ausgabe dieſes Mathematikers zu erwarten.

Die Bachet'ſche Ausgabe iſt die einzige, welche ſich auf die Autorität von Handſchriften ſtützt. Ein bloßer Abdruck derſelben iſt folgender:

Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus. Cum Commentariis *C. G. Bacheti* et observationibus D. *P. de Fermat* Senatoris Tolosani. Accessit doctrinae Analyticae inventum novum, collectum ex variis ejusdem D. de Fermat Epistolis. Tolosae. 1670. fol. Unter der Vorrede nennt ſich **S. Fermat** (Samuel), der Sohn des auf dem Titel genannten berühmten Mathematikers,

als Herausgeber. Was dieſer Abdruck an äußerer Eleganz gewonnen hat (denn die Bachet'ſche Ausgabe iſt mit äußerſt unangenehmen, namentlich Griechiſchen Lettern gedruckt), das hat ſie an innerm Werthe in Bezug auf den Text verloren. Sie iſt nicht bloß voller Druckfehler in einzelnen Worten und Zeichen (z. B. durchgehends π ſtatt ϡ, 900) ſondern auch ganze Zeilen ſind ausgelaſſen oder doppelt gedruckt, (z. B. III, 12 eine Zeile doppelt, IV, 25 eine doppelt und gleich hinterher eine ausgelaſſen, IV, 52 eine doppelt, V, 11 eine ausgelaſſen, desgleichen V, 14. 25. 33, VI, 8. 13 u. ſ. w.), die Zahlen verſtümmelt, was aber das Ärgſte iſt, die Bachet'ſchen kritiſchen Zeichen ſind faſt überall, die Klammern durchgängig weggefallen, ſo daß dieſe Ausgabe als Text des Diophant völlig unbrauchbar geworden iſt. Dagegen erhält ſie mathematiſchen Werth durch die ſehr geſchätzten Observationes von Fermat, von denen zu ihrer Zeit die Rede ſein wird.

In dem Zeitraum von 1670 bis 1810 iſt direct für Diophant nichts gethan worden. In dem letztgenannten Jahre erſchien

Diophantus von Alexandrien über die Polygon-Zahlen. Überſetzt mit Zuſätzen von F. Th. Poſelger. Leipzig. 1810. 8. mit ſehr ſchätzbaren Anmerkungen und Mittheilungen über den vom Auctor behandelten Gegenſtand.

Noch mehr Anerkennung aber verdient die Bemühung des rühmlichſt bekannten Profeſſor Otto Schulz in Berlin, welcher uns in einer ſehr vorzüglichen Überſetzung endlich den ganzen Diophant deutſch gegeben hat unter dem Titel:

Diophantus von Alexandria arithmetiſche Aufgaben nebſt deſſen Schrift über die Polygon-Zahlen. Aus dem Griechiſchen überſetzt und mit Anmerkungen begleitet von Otto Schulz. Berlin. 1822. 8.

Das eben erwähnte Werk von Poſelger iſt mit Genehmigung des Letztern in dieſe Geſammtüberſetzung aufgenommen, wofür jeder Liebhaber des Diophant beiden Männern Dank wiſſen wird. Die Überſetzung des Ganzen iſt treu, ohne durch zu ängſtliche Nachahmung des Originals in unweſentlichen Dingen ungenießbar zu werden. Die erläuternden Anmerkungen, welche einen bedeutenden Theil des ziemlich ſtarken Octavbandes einnehmen, beziehen ſich der großen Mehrzahl nach auf den Inhalt, und geben nur ſelten Andeutungen über etwanige Verbeſſerungen im Texte. Der Überſetzer iſt nicht

Digitized by Google

Mathematiker von Profeſſion, deſſungeachtet werden ſeine Anmerkungen Manchem das Verſtändniß des Schriftſtellers erleichtern, und ihn auf den richtigen Standpunct zur Beurtheilung deſſelben ſtellen [49]. Es wäre in der That wünſchenswerth, daß wir erſt von allen Griechiſchen Mathematikern, wenigſtens von den wichtigern, ſolche Überſetzungen hätten, wie von Diophant, Archimedes und Euklid's Elementen.

Ich will hier noch eine Frage vorausnehmen, welche eigentlich erſt aufgeworfen und beantwortet werden ſollte, nachdem wir uns in einer überſichtlichen Darſtellung mit dem Inhalte der Diophantiſchen Schriften bekannt gemacht haben, die ich aber theils darum hier anticipire, weil ſie ihrer Natur nach in dieſem rein hiſtoriſchen Abſchnitte einen Platz ſucht, theils, weil ich fürchte, daß ſie am Ende des Ganzen ſich zu ſehr vereinzeln könnte. Es iſt nämlich *die* Frage, ob Diophant der Erfinder der algebraiſchen Methode bei den Griechen ſei. Es iſt kaum mehr der Mühe werth einen oft widerlegten Ausſpruch Bombelli's noch einmal zu widerlegen, den nämlich, daß Diophant im Verlaufe ſeines Werks Indiſche Auctoren citire. Bombelli hat den Text des Diophantus nicht hinlänglich ſorgſam von den Scholien des Planudes geſondert; in letzteren werden allerdings die Inder genannt, und zwar ihre Multiplicationsmethode [50]; dieſe Erwähnung darf uns auch bei einem Schriftſteller nicht Wunder nehmen, welcher ſelbſt ein leider noch nicht edirtes Werk geſchrieben unter dem Titel: ψηφοφορία κατ' Ἴνδους ἢ με-

49) Ich weiß nur *ein* Beiſpiel anzuführen, in welchem der gelehrte Verfaſſer, durch eine Übereilung ſelbſt verleitet, den Leſer irre führt, was er gewiß längſt ſchon ſelbſt bemerkt hat; es iſt eine Anmerkung zu V, 14. S. 524. 525. Diophant's Determination iſt da in der That nicht ausreichend, und einem Manne wie Schulz ſieht man's gerne nach, wenn er aus Verſehen in der Formel $3n + 2$ die Bedingung einer ungeraden Zahl ſieht.

50) S. die Überſ. v. Xylander, Def. IX: Ut ostendatur, quo pacto penuria in penuriam ducta, copiam; in copiam ducta penuriam procreet,

γάλη λεγομένη. Kein Citat der Art aber findet ſich in irgend einer Stelle des Diophantiſchen Textes, da dieſer Auctor im Allgemeinen das Citiren nicht liebt. Überhaupt iſt jedenfalls die Annahme irgend eines von auswärts ausgegangenen Einfluſſes auf Diophant's Werk unſtatthaft, und die Frage kann hier nur ſein, ob Diophant unter den Griechen directe Vorgänger gehabt habe, welche durch ſein hervorragendes Genie verdunkelt und verdrängt worden ſind [51]). Diejenigen, welche Diophant für den erſten und alleinigen Erfinder der Algebra zu halten geneigt ſind, ſtützen ſich beſonders auf eine Stelle ſeiner Vorrede, welche die in dem folgenden Werke vorgetragenen Sachen als neu bezeichnet. Um dieſe Stelle in ihrem vollſtändigen Zuſammenhange beurtheilen zu können, gebe ich hier die ganze Vorrede: Τὴν εὕρεσιν τῶν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς προβλημάτων, τιμιώτατέ μοι Διονύσιε, γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην, ἀρξάμενος ἀφ' ὧν συνέστηκε τὰ πράγματα θεμελίων, ὑποστῆσαι τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν. ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι, δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσίν εἰσιν αἱ τῶν ἀρχομένων ψυχαί, ὅμως δ' εὐκατάληπτόν σοι γενήσεται διὰ τὴν σὴν προθυμίαν καὶ τὴν

---

non *Indicam* hic multiplicandi rationem, quae inversum Graecanici moris ordinem sequitur, sed nostram tenebimus. S. Schulz Vorrede S. XXIX.

51) Solche ſpurloſe Verdrängungen früherer Werke durch ſpätere, welche dieſelben ſehr überragen, liegen ganz in der Ordnung der Dinge, ſo lange Bücher nur noch als Manuſcripte exiſtiren. Wir haben Ariſtäus und Anderer Werke über die Kegelſchnitte nicht erhalten, weil ſie von Apollonius übertroffen wurden, und man nachgehends nur dieſes vollſtändigere, vorzüglichere Werk abzuſchreiben ſich die Mühe nahm. Eben darum ſind die aſtronomiſchen Arbeiten von Hipparchus durch die vollſtändigeren des Ptolemäus verdrängt worden, und es heißt allen natürlichen Zuſammenhang hiſtoriſcher Thatſachen umkehren, wenn Schöll (Geſchichte der griechiſchen Literatur, deutſch von Pinder. Bd. II. S. 702) ſagt: „Überhaupt verdankt Ptolemäus einen Theil der übertriebenen Verehrung, welche ihm gezollt worden iſt, der Seltenheit der hipparchiſchen Schriften, welche unmittelbar nach ſeinen Lebzeiten verloren gegangen ſind.“ — Die Hipparchiſchen Schriften ſind vielmehr umgekehrt darum verloren gegangen, weil man dem Ptolemäus eine ſo große und allgemeine, und wenn man will, übertriebene Verehrung zollte.

ἐμὴν ἀπόδειξιν· ταχεῖα γὰρ εἰς μάθησιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδαχήν. d. h. „Da ich ſehe, daß Du, mein geehrteſter Dionyſius, eifrig bemüht biſt, die Auflöſung der arithmetiſchen Probleme zu erlernen, ſo habe ich die Methode ſyſtematiſch darzuſtellen (ὀργανῶσαι) verſucht, indem ich mit den Grundlagen beginne, auf welchen die Operationen beruhen, nämlich mit der Entwickelung der den Zahlen eigenthümlichen Natur und Eigenſchaft (δύναμις). Vielleicht nun erſcheint die Sache etwas ſchwierig, da ſie noch nicht bekannt iſt, denn die Gemüther der Anfänger haben auf das Gelingen wenig Hoffnung. Aber es wird Dir doch leicht faßlich werden durch deinen Eifer und durch meine Darſtellung; denn Eifer, der die Unterweiſung zu Hilfe nimmt, führt ſchnell zur Wiſſenſchaft.“ — Nun fragt ſich, giebt Diophant hier ſeine vorzutragende Lehre ſo geradezu und unzweifelhaft für etwas ganz Neues, noch gar nicht vorhanden Geweſenes aus? Ich denke vielmehr, die Worte ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι ſtehen ganz ſubjectiv da, nur in Bezug auf den Schüler, den der Verfaſſer vor ſich hat. Es wird, ſagt Diophant, dem Schüler immer ſchwer etwas zu lernen, das ſeinem Weſen nach ihm noch neu iſt. Dieſer Sinn der in Rede ſtehenden Worte wird meiner Meinung nach ganz unzweideutig beſtätigt durch den Zuſatz: δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσίν εἰσιν αἱ τῶν ἀρχομένων ψυχαί. Dem Anfänger, ſollte ich meinen, wird die Erlernung einer Sache nicht dadurch erſchwert, daß dieſe wirklich noch objectiv neu iſt, ſondern die Schwierigkeit für ihn entſteht nur aus der Neuheit, welche die Sache für ihn hat. Ja, der Anfang der Vorrede ſagt ja ganz deutlich, daß Dionyſius ſchon von Aufgaben der Art gehört hatte; Diophant führt ihn ja nicht aus eigenem Lehrertriebe, ſondern von Jenem dazu aufgefordert in das Gebiet der arithmetiſchen Aufgaben ein. Und was hat denn nun, als die Aufforderung an ihn ergangen war, Diophant gethan? Ὀργανῶσαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην „ich habe verſucht die Methode ſyſtematiſch darzuſtellen, zu ordnen.“ Darin liegt doch ganz klar, daß der Stoff wenigſtens zum Theil, daß einzelne Methoden zur Auflöſung ſolcher Probleme bereits vorhanden waren; er hat ja nur organiſirt, ſyſtematiſch angeordnet, was factiſch hie und da zerſtreut vorhanden war; er hat, wie es weiterhin heißt, die Sache ſo geordnet, wie er glaubt, daß ſie für Anfänger am faßlichſten ſei. Dieſes ſchließt indeß keineswegs die Möglichkeit aus, daß Diophant

auch an dem Inhalt ſeines Werks, an den vorgetragenen Sachen und Methoden, einen bedeutenden eigenen Antheil habe, und ein großer Theil des Gegebenen von ihm ſelbſt herrühre. So folgt denn wohl ſchon aus dieſer Stelle, auf welche gewöhnlich die Hypotheſe baſirt wird, daß Diophant der Erfinder der Algebra geweſen, gerade das Gegentheil. Und dieſe auf die Deutung der Vorrede in obigem Sinne geſtützte Anſicht, in der ich übrigens von ſehr achtbaren Autoritäten unterſtützt werde[52]), erhält noch mehr Wahrſcheinlichkeit durch die Art und Weiſe, wie Diophant die Fundamente ſeiner Rechnungen auseinanderſetzt. Das Werk beginnt näm-

52) Ganz die von mir entwickelte Anſicht hat Schulz, Vorr. XXII — XXIV ausgeſprochen („Es iſt aber nichts als Mißverſtändniß eines flüchtigen Leſers, wenn man hinzuſetzt, Diophantus eigne ſich ſelbſt die Erfindung der Analyſis zu u. ſ. w.“). Coſſali iſt auch der Meinung, daß Diophant nicht der Erfinder der Algebra ſei; was aber ſo eigentlich ſeine Meinung iſt, geht aus ſeinem Räſonnement T. 1. p. 82. 83 nicht ſo recht hervor. Erſt ſagt er: La parola *fabricari* (Bachet's Überſetzung von ὀργανῶσαι), l' asserzion *ignotum adhuc* dimostrano a tanto luce, che Diofanto va a fare qualche cosa di nuova, che bisognerebbe non aver occhi per non vederlo; wo er alſo das μήπω γνώριμον in dem Sinne von etwas abſolut Neuem nimmt. Nachdem er nun eine Weile mit Montucla gezankt, fährt er ſo fort: A me par troppo il dire, che da quelle espressioni non ne esca alcun lume; mi pare troppo il restingere la novità, che annunziano, al metodo, che nell' opera di Diofanto regnar si mira; ma parmi anche troppo il dedurne essere stato Diofanto in assoluto senso inventor dell' analisi. Es kommt am Ende weiterhin darauf hinaus, daß er die Algebra der beſtimmten, ſelbſt der quadratiſchen Gieichungen als vor Diopbant vorhanden annimmt. Und ungefähr in demſeiben Sinne ſpricht ſich Colebrooke (Note M. p. LXII) aus: It is rather to be inferred, as Cossuli does, from the compendious way in which the principles of Algebra are delivered, or alluded to, by him, that the determinate analysis was previously not unknown to the Greeks, wheresoever they got it; and that Diophantus, treating of it cursorily as a matter already understood, gives all his attention to cases of indeterminate annlysis in which perhaps he had no Greek precursor (Coss. Orig. dell' Alg. I. 4. §. 10). He certainly intimntes, that some part of what he proposes to tench is new: ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι. white in other places (Def. 10) he expects tho studeut to be previnusly exercised in the aigorithm of Algebra. The seeming contradiction is reconciled by conceyving the principles to have been knnwn, but the application of them to a certnin class of problems concerning numbers to have been new.

lich mit elf Sätzen, die zum Theil Erklärungen, zum Theil die einfachen Lehrſätze für die algebraiſchen Operationen, den Agorithmus enthalten (wiewohl ſie in den Ausgaben ſämmtlich Definitiones überſchrieben ſind), und die Kürze und Beiläufigkeit, welche aus dieſen Erklärungen und Erläuterungen der Elemente ſpricht, deutet jedem Unbefangenen ganz klar an, daß Diophant hier nichts Neues lehre, ſondern nur Bekanntes ins Gedächtniß rufe. Nachdem er in **Def. I.** über die Potenzen geſprochen, fährt er **Def. II.** fort: *Καλεῖται οὖν ὁ μὲν τετράγωνος δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῇ σημεῖον τὸ δ ἐπίσημον ἔχον υ, δ^{υ}*, und ebenſo bei den folgenden. Das war alſo doch ganz gewiß ſchon zu ſeiner Zeit gebräuchlich. Ja ſelbſt die Bezeichnung der Unbekannten führt er nicht anders ein: *ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἄλογον* (bei Bachet unrichtig *ἄλογος*) *ἀριθμὸς καλεῖται, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ς'*, wo *πλῆθος μονάδων ἄλογον* nicht, wie Bachet im Euklidiſchen Sinne des *ἄλογος* überſetzt, multitudo unitatum ***rationis expers***, ſondern eine unbekannte Menge von Einheiten bedeutet. In **Def. IX.** hält Diophant es nicht für nöthig, einen Satz, der ſelbſt ſpätern Mathematikern ſo viel Kopfbrechen verurſachte, den nämlich, daß Negatives mit Negativem multiplicirt Poſitives gebe, auch nur mit einer Sylbe zu erläutern, ſondern er ſagt, als ſpräche er von einer Sache, die ſich längſt von ſelbſt verſteht: *Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν· λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.* Die Diviſionsregeln in allgemeinen Ausdrücken giebt er gar nicht, weil ſie, wie er meint, dem Schüler ſchon aus den **Def. IV.** bis **IX.** vorgetragenen Multiplicationsregeln klar ſein müſſen. Nachdem er nun in der zehnten Definition ermahnt hat, in den Rechnungen mit algebraiſchen Ausdrücken ſich fleißig zu üben, namentlich in Operationen mit mehrgliedrigen Größen, von denen er vorher gar nichts geſagt hat (*καλῶς οὖν ἔχει ἐναρχόμενον τῆς πραγματείας, συνθέσει καὶ ἀφαιρέσει καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἴδη γεγυμνάσθαι· καὶ πῶς εἴδη ὑπάρχοντα καὶ λείποντα, μὴ ὁμοπληθῆ, προσθήσεις ἑτέροις εἴδεσιν ἤτοι καὶ αὐτοῖς ὑπάρχουσιν, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχουσι καὶ λείπουσι· καὶ πῶς ἀπὸ ὑπαρχόντων εἰδῶν καὶ ἑτέρων λειπόντων ἀφαιρήσεις ἕτερα ἤτοι ὑπάρχοντα ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχοντα καὶ λείποντα*), und ſich dann erſt an die Auflöſung von Aufgaben zu machen, ſo lehrt er eben ſo kurz und gleichfalls nur

wie

wie eine Nebenſache in der elften Definition, wie man eine gegebene Gleichung auf die einfachſte Form bringen könne. Man erſieht aus dem Allen, daß Diophant die Elemente der Algebra nicht lehrt, ſondern vorausſetzt und nur im Vorbeigehen daran erinnert um den Schüler zu veranlaſſen, daß er ſich in denſelben recht feſtſetze, weil er in ſeinem Werke ſich derſelben als Hilfsmittel der Unterſuchung bediene. Nicht ebenſo ſetzt er die Bekanntſchaft mit den quadratiſchen Gleichungen voraus; die Auflöſung dieſer verſpricht er, am Ende der Def. XI., zu lehren, wie wir oben geſehen haben.

Demnach ſtellt ſich in Bezug auf die aufgeworfene Frage ungefähr folgendes Reſultat heraus. Die algebraiſche Methode war vor Diophant erfunden, und er durfte, als er davon Gebrauch machen wollte, an die Hauptregeln derſelben, ſo wie an die Auflöſung der Gleichungen des erſten und der reinen Gleichungen des zweiten Grades nur kurz erinnern. Ob die Auflöſung der gemiſchten quadratiſchen Gleichungen ſeine Erfindung war, können wir nicht beſtimmen, wenigſtens glaubt er ſie nicht ebenſo unerläutert vorausſetzen zu dürfen. Die Behandlung der unbeſtimmten Gleichungen des zweiten Grades ſind der Hauptzweck ſeines Werks; es fehlen uns aber auch hier die hiſtoriſchen Elemente und Mittelglieder, um entſcheiden zu können, wieviel davon ihm ſelbſt angehört, und was er etwa ſchon als Stoff vorgefunden hat.

Zu dieſen aus der Betrachtung des Diophantiſchen Werks hervorgegangenen Reſultaten nun noch einige Zuſätze von außen her. Was zunächſt den erſten von mir ausgeſprochenen Satz anbelangt, ſo iſt wohl an deſſen Wahrheit auch aus äußeren Gründen nicht zu zweifeln. Algebra iſt, wie ich oben ſchon einmal berührte, weiter nichts, als die Anwendung der den Griechen ſeit Platon's Zeit bereits bekannten Methode der geometriſchen Analyſis auf die Rechnung [53]). Das Princip der Algebra war alſo in ſeiner Anwendung

53) Ganz richtig faßt dieſe Beziehung Dechales (Cursus Math. T. I. p. 8. 29.) auf, deſſen Theorie überhaupt viel beſſer iſt, als ſeine Geſchichte. An der erſten Stelle heißt es von Plato: Modumque demonstrandi analyticum invenit, nempe supponendo quod quaeritur factum esse et dari, quae methodus dici potest Algebra quaedam naturalis, et Algebrae artificialis seminarium fuit. Und p. 29. Plato Socratis auditor modum demonstrandi analyticum invenit, nempe prima Algebrae fundamenta jecit. Und ebend.

auf die Geometrie den Griechen längſt gegeben. Die Schwierigkeit, daſſelbe auf Zahlenoperationen anzuwenden, lag nur darin, daß man nicht ſo leicht, wie in der Geometrie, auf ein Mittel verfiel, eine von allen unweſentlichen Accidentien befreite Zahl darzuſtellen, wie man es in der Geometrie durch Hinzeichnung einer willkührlichen von allen beſchränkenden Vorausſetzungen befreiten Figur vermochte. Man zeichnete z. B. willkührlich ein Dreieck, und ſagte: geſetzt dieſes ſei das geſuchte Dreieck; an dem ſo beliebig angenommenen Dreiecke operirte man alsdann rückwärts, indem man von dem als bereits vorliegend gedachten Geſuchten, vermöge der gegebenen Bedingungen der Aufgabe, auf das Verhältniß der Abhängigkeit des Geſuchten von dem Gegebenen durch fortgeſetzte Schlüſſe zu gelangen ſich bemühte. Wie ſollte man dagegen ebenſo allgemein eine Zahl darſtellen, ohne ihr gleich bei der Annahme einen beſtimmten Werth beizulegen? Die Buchſtaben des Alphabets, als geläufige Schriftzüge, lagen hier am nächſten; aber an jeden Buchſtaben knüpfte die Einbildungskraft aus Gewohnheit einen beſtimmten Zahlbegriff. Es blieb nichts Anderes übrig, als entweder ein willkührlich gewähltes Zeichen ſich zu ſchaffen, oder den einzigen Buchſtaben des Griechiſchen Alphabets, deſſen Zug keinen conventionellen Zahlenwerth in ſich begriff, zu dieſem Zwecke zu verwenden, nämlich das Finalſigma,

---

vorher: Algebra quae analytica dici potest, eo quod per Analysin procedat, nempe id quod quaeritur jam quasi cognitum et datum supponat etc. etc. — Unnöthig, wie es ſcheint, iſt der Unterſchied, den Bezout (Cours de Math. T. III. 1768. Préf. p. III. IV.) zwiſchen Analyſis und Algebra macht: La méthode qu'on appelle *Analyse*, est celle qui enseigne à trouver ces regles, et l'instrument qu'elle emploie pour y parvenir, s'appelle *l'Algèbre*. — Ganz falſch dagegen iſt die Definition von Analyſis in Klügel's Mathem. Wörterbuch Th. 1. S. 77. „Analyſis, als wiſſenſchaftliches Syſtem, iſt die allgemeine Darſtellung und Entwickelung der Zuſammenſetzungsarten der Größen durch Rechnung. Sie behandelt alle Größen wie Zahlen, aber als unbeſtimmte in Abſicht auf die Einheit und die Menge der Einheiten. Dadurch unterſcheidet ſie ſich von der Geometrie, welche die ausgedehnten Größen u. ſ. w. mit einander vergleicht, ohne ſie als Vielheit von irgend einer Einheit und Theilen der Einheit zu betrachten.“ — Die Analyſis gehört weder ausſchließlich der Rechnung, noch ausſchließlich der Geometrie an, ſondern ſie iſt eine Methode, die in allen mathematiſchen, ja ſelbſt in den philoſophiſchen Disciplinen ihre Anwendung findet.

ς. Und man hat das Letztere wirklich gethan. Wann aber dieſer Schritt geſchehen iſt, und von Wem, das läßt ſich jetzt aus gänzlichem Mangel an vorhandenen Quellen nicht mehr beſtimmen. Nur ſoviel läßt ſich mit ziemlicher Gewißheit behaupten, daß dieſe ſo nahe liegende Anwendung ſo weit hinausgeſchoben wurde wegen des erwähnten für dieſen Zweck ungünſtigen Verhältniſſes des Griechiſchen Alphabets zu den Zahlen. Eine Spur von Unterſcheidung unbekannter und gegebener Zahlen finden wir in dem aus Jamblichus oben mitgetheilten Epanthema des Thymaridas, welches gleich ſo anfängt: *ὡρισμένων γὰρ ἢ ἀορίστων μερισαμένων ὡρισμένον τι* etc. „Wenn gegebene oder unbekannte Zahlen zuſammen einer gegebenen gleich ſind [54].“ Ja, die ganze Regel des ſogenannten Epanthema beruht auf der Anſchauung algebraiſcher Zahlenausdrücke, zu welchem Ende ich zu vergleichen bitte, was ich im vorigen Kapitel über daſſelbe geſagt habe. Jamblichus giebt uns ferner, wie wir gleichfalls geſehen haben, die Auflöſung zweier Aufgaben, deren jede auf drei Gleichungen des erſten Grades mit vier Unbekannten führt, aber freilich ohne algebraiſche Bezeichnung, bloß in Worten, jedoch ganz im Sinne der Diophantiſchen Algebra. Somit iſt denn, wenn wir dieſe Thatſachen mit dem zuſammenſtellen, was wir eben über Diophant's Definitionen geſagt haben, nicht daran zu zweifeln, daß die Anwendung der analytiſchen Methode auf die Rechnung vor Diophant in Gebrauch geweſen, mit andern Worten, daß Diophant nicht der Erfinder der Algebra iſt. Woher es nun gekommen, daß die vor ihm vielleicht vorhandenen Werke ſelbſt bis auf den Namen untergegangen ſind, als das vollſtändigere und glänzendere Diophant's ſich erhob, und warum deshalb auch die Araber keines der Art nennen, habe ich oben angedeutet. Daß aber Diophant keinen ſeiner etwanigen Vorgänger

---

54) S. S. 233. Ἀόριστος iſt auch bei Diophant der Ausdruck für eine durch das Zeichen der Unbekannten ausgedrückte Zahl; z. B. IV. 20. Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῷ ἀορίστῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μ° ᾱ ποιῇ τετράγωνον, d. h. Drei Zahlen in unbeſtimmten Ausdrücken zu finden, ſo daß das Product von je zweien zu der Einheit addirt ein Quadrat macht; und Diophant findet, in unſern Zeichen ausgedrückt, als Reſultat die drei Zahlen x, $x + 2$, $4x + 4$. Ähnliche Beiſpiele ſ. IV. 37. 39. 41. V. 21. VI. 12.

nennt, darf uns bei ſeiner Vortragsweiſe und bei dem Zwecke, den er verfolgt, nicht wundern [55]). Er will Anfänger unterrichten, nicht in der Zahl der Gelehrten glänzen.

Aber auch ſeine unbeſtimmten Aufgaben des zweiten Grades ſind nicht alle von ihm, vielmehr hat er auch hier ſeine Vorarbeiter gehabt. Seine Aufgabe II. 8. 9. iſt, nur beſſer dargeſtellt, identiſch mit Euklid's Lemma zu X. 29., einer Theorie, durch welche, wie wir oben geſehen haben, Pythagoras bereits den erſten Grund zur unbeſtimmten Analytik des zweiten Grades gelegt hat. Ein anderes Beiſpiel von der Auflöſung unbeſtimmter Probleme des zweiten Grades gab uns Theon von Smyrna, indem er ganze rationale Werthe für x und y in der Gleichung $2x^2 \pm 1 = y^2$ finden lehrte. Es folgt aus dieſen, wenngleich immerhin ſpärlichen Datis, zum Mindeſten ſoviel, daß die Sache bereits angeregt war, und daß es nur eines Genie's wie Diophantus bedurfte, um aus den einzelnen zerſtreuten Brocken ein großes ſyſtematiſches Ganze zuſammenzufügen. Nicht unbedeutenden Stoff gab ihm endlich die ſeit lange ſchon behandelte, in ſeinem ganzen Werke eine ſo wichtige Rolle ſpielende Theorie der Polygonzahlen zu ſeinen Unterſuchungen in Menge her. Indeß füge ich, um allen Mißverſtändniſſen vorzubeugen, hinzu, daß ich weit entfernt bin durch die angeführten Thatſachen Diophant's Ruhm ſchmälern zu wollen, oder ſelbſt zu glauben, daß dieſer große Mathematiker nur bereits Gegebenes verarbeitet habe. Gegentheils bin ich der feſten Überzeugung, daß bei weitem der größte Theil ſeiner Sätze, namentlich aber ſeine ſo ſehr ſcharfſinnigen Methoden ihm ſelbſt angehören. Es ſpricht dafür theils der ganz ſubjective Scharfſinn, der ſeine Auflöſungen durchdringt, und der durchaus einem einzigen Individuum anzugehören ſcheint, theils aber auch

55) Darnach iſt zu beurtheilen, was Andres in ſeiner Geſchichte der Italieniſchen Literatur ſagt: Osservo in oltre, che ni Diofanto nei moltissimi problemi, che si propone e scioglie non citu mai verun altro matematico, chi n'abbia cercata la soluzione; né vedesi da' greci posteriori citato altro scrittore di tale scienza anteriore a Diofanto; nè gli Arabi, chi in questa parte possono aver tanto peso di autorità, quanto gli stessi greci, chi ci sono rimasti, parlano di altro greco algebrista che di Diofanto. (Cossali Orig. I. p. 86).

das völlige Schweigen der Alten über irgend eine andere Arbeit der Art, woraus, wenn auch nicht zu viel, doch ſo viel gefolgert werden kann, daß die vorhandenen Bruchſtücke, von denen Diophant ausgegangen iſt, nicht von groſzer Bedeutung geweſen ſein können.

Digitized by Google

Siebentes Kapitel.

Form der Diophantiſchen Algebra.

Das Erſte, worauf wir bei der Darſtellung der Diophantiſchen Analyſis zu rückſichtigen haben, iſt ſeine Bezeichnungsmethode, welche gewiſſermaßen als das Gewand angeſehen werden muß, in welches er ſeine Kunſt gekleidet hat. Ich will von derſelben, weil von dieſer Form ſo unendlich Vieles im Weſen abhängt, ein möglichſt vollſtändiges und treues Bild geben, und werde ich dadurch auch gezwungen Manches zu wiederholen, was ſchon oft geſagt worden iſt, ſo kann ich doch eine ausführliche Auseinanderſetzung des hieher Gehörigen um ſo weniger übergehen, als man gerade auch im Betreff dieſes Punctes in früheren Werken ſo viel Mangelhaftes und ſelbſt Unwahres findet. Mögen alſo die Leſer nur noch in dieſem für Manchen unter ihnen vielleicht weniger anziehenden Kapitel mit mir Geduld haben und bedenken, daß der Gegenſtand deſſelben ein nothwendiger Übergang zu der Darſtellung der ſehr intereſſanten Methoden iſt, deren unſer Auctor ſich bedient.

Sind ſchon die algebraiſchen Werke des Occidents bis zur Mitte des ſiebzehnten Jahrhunderts in Vergleich mit den modernen arm an algebraiſchen Zeichen, ſo trifft das bei Diophant's Werk in noch viel höherem Grade zu. Diophant hat überhaupt nur drei Arten von Zeichen, erſtens für die Unbekannte und ihre Potenzen, zweitens für das abſolute Glied der Gleichung und drittens für die ſubtractive Bedingung eines Gliedes. Die Unbekannte bezeichnet er, wie ich ſchon in dem vorigen Kapitel andeutete, durch den Buchſtaben ς mit dem Accent, ς´ oder auch ςο´, und nennt dieſelbe im Contexte ὁ ἀριθμός, die Zahl; das Zeichen wird verdoppelt, wenn der Coefficient derſelben größer als eins iſt, ςς̃. Das Quadrat der Unbekannten heißt δύναμις, ein Ausdruck, den auch ſchon Euklides für

die Quadratzahl braucht, und das Rechnungszeichen dafür iſt δῡ; der Kubus der Unbekannten heißt κύβος, abgekürzt in κῡ. Die höheren Potenznamen werden aus den Namen δύναμις und κύβος der Art zuſammengeſetzt, daß jede höhere Potenz als ein Product von Quadraten und Kuben dargeſtellt wird; demnach heißt die vierte Potenz δυναμοδύναμις, die fünfte δυναμόκυβος, die ſechſte κυβοκυβος, und ihre entſprechenden Zeichen ſind δδῡ, δκῡ, κκῡ. Weiter geht Diophant nicht. Es iſt hier wohl zu bemerken, daß die Zeichen δῡ, κῡ, δδῡ u. ſ. w. durchaus bei Diophant nichts Anderes bedeuten, als das Quadrat, den Kubus, das Biquadrat, deren Wurzel die Unbekannte, ς', ὁ ἀριθμός iſt, und daß ſelbſt das Wort δύναμις für den Begriff des Quadrats nie anders gebraucht wird, als wenn von der Unbekannten die Rede iſt, wogegen in allen anderen Fällen das Quadrat τετράγωνος genannt wird; das Wort κύβος und die Namen der höhern Potenzen werden indeß auch in andern Verbindungen gebraucht, weil die Sprache da nicht zwei verſchiedene Worte darbot; die dafür ſubſtituirten Abkürzungen kommen aber nur von der Unbekannten vor. Es iſt demnach ganz unrichtig, wenn Reimer [1]) ſagt: „das Quadrat einer Zahl (δύναμις) bezeichnet er mit δῡ, den Kubus mit κῡ u. ſ. w.“ Nicht das Quadrat, den Kubus *einer Zahl* im Allgemeinen bezeichnet Diophant mit den angeführten Zeichen, ſondern immer das Quadrat, den Kubus der *unbekannten, geſuchten* Zahl, ſo daß Diophant's δῡ, κῡ ganz und gar, ohne weitern Zuſatz, unſern Ausdrücken x^2, x^3 entſprechen, und nicht etwa bloß den Exponenten ohne Rückſicht auf die Wurzelgröße ausdrücken; vielmehr vertritt der Ausdruck δῡ oder κῡ die Wurzelgröße ſammt ihrem Exponenten. Und gerade in dieſem unzweifelhaften Umſtande liegt eine Unvollkommenheit des Diophantiſchen Syſtems, daß nämlich die Zeichen der Potenzen mit dem Zeichen der Wurzel in keinem ſichtbaren Zuſammenhange ſtehen. Denn wenn man auch dem Zeichen δῡ leicht anſieht, daß es eine Abbreviatur des Worts δύναμις ſein, alſo ein Quadrat ausdrücken ſoll, ſo ſieht man ihm doch auf keine Weiſe an, daß es gerade das Quadrat der Wurzel ς' und gerade nur dieſer Wurzel ſein ſoll. Dem ganz analog und eben ſo inconvenient bezeichnen die Mathematiker

1) Überſ. von Boſſut's Geſch. d. Math. I. S. 56.

vor Vieta die Unbekannte mit R (radix oder res), deren Quadrat mit Z (zenſus), den Kubus mit C und ſo weiter, ja ſelbſt noch Bachet und Fermat, lange nach Vieta, behalten dieſe ihnen einmal geläufige Methode bei, nur mit dem Unterſchiede, daß ſie für R das Zeichen N (numerus) nach Diophant, und ſtatt Z den Buchſtaben Q (quadratum) gebrauchen. So ſchreibt zum Beiſpiel Bachet $1Q + 5N$ ſint aequales 24, eine Gleichung, die wir ſo ausdrücken würden $x^2 + 5x = 24$. Vieta thut den erſten Schritt, um dieſem Übelſtande abzuhelfen; er bezeichnet die Potenzen von A durch der Reihe durch $Aq.$, $Ac.$, $Aqq.$ oder vollſtändiger ausgeſchrieben A *quadr.*, A *cub.*, eine Bezeichnung, die außerdem, daß ſie an und für ſich ſyſtematiſch iſt, den unendlichen Vortheil gewährt, daß man mit ihrer Hilfe mehre Unbekannte einführen kann, was bei Diophant's und der Alten Methode abſolut unmöglich iſt. — An dieſe Zeichen der Unbekannten und ihrer Potenzen hängt Diophant die Zahlencoefficienten unmittelbar hinten an, und drückt ſelbſt den Coefficienten 1 immer aus, z. B. $\varsigma'\,\overline{\alpha}$, $\varsigma\varsigma'\,\overline{\delta}$, $\delta\tilde{\upsilon}\,\overline{\alpha}$, $\delta\tilde{\upsilon}\,\overline{\iota\gamma}$, $\kappa\tilde{\upsilon}\,\overline{\beta}$. Für die Multiplication hat Diophant kein Zeichen; denn da er nur Symbole für *eine* Hauptgröße und nur Zahlencoefficienten anwendet, ſo erſcheint jede Multiplication ſogleich ausgeführt; ebenſo die Diviſion, wenn ſie ausführbar iſt; im entgegengeſetzten Falle giebt ſie einen Bruch zum Reſultat, wovon wir ſogleich mehr ſagen werden. Die Addition wird durch bloßes Nebeneinanderſchreiben bezeichnet, ſo daß zum Beiſpiel $\delta\tilde{\upsilon}\,\overline{\alpha}\;\varsigma\tilde{\varsigma}\,\overline{\delta}$ ſo viel ſagt, wie $x^2 + 4x$. Dieſe Methode macht es nothwendig, auch dasjenige Glied einer Formel, welches die Unbekannte gar nicht enthält, als abſolute Zahl zu bezeichnen, damit nicht ihr bloßer Zahlenausdruck mit dem Coefficienten der vorhergehenden Größe zuſammenlaufe; daher nennt Diophant eine gegebene Zahl μονάδες, *Einheiten*, und bezeichnet ſie in der Formel durch die Abbreviatur $\mu^{\tilde{o}}$, welcher dann ebenſo wie den Zeichen der Unbekannten, die Coefficienten hinten angehängt werden. Nie aber wird, wie Reimer am angeführten Orte bemerkt, *die Einheit mit* $\mu^{\tilde{o}}$ *bezeichnet*, ſondern immer mit $\mu^{\tilde{o}}\,\alpha$ oder $\mu^{\tilde{o}}$ μία. Bei Bachet, welcher das Additionszeichen + gebraucht, findet ſich für das abſolute Glied kein beſonderes Zeichen mehr, ſondern er braucht die nackte Zahl; die Italiener dagegen, welche die erſte Potenz der Unbekannten mit R bezeichnen, nennen nach Sitte der Arabiſchen Algebriſten, das abſolute

Glied numerus und bezeichnen es durch N[2]). — Außer dieſen Zeichen hat Diophant nur noch ein einziges, nämlich für die Subtraction. Die Bedingung der Subtractivität oder Negation nennt er λεῖψις, **Mangel**, im Gegenſatz der Affirmation, die er ὕπαρξις, **Vorhandenſein**, nennt, und ſchreibt im Zuſammenhange zur Bezeichnung deſſen, was wir minus nennen, entweder dieſes Wort aus und zwar im Dativ λεῖψει, oder er braucht dafür als Symbol ein umgekehrtes und verſtümmeltes ψ, etwa ſo ⋔ (καὶ τῆς λείψεως σημεῖον ψ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον ⋔. Def. IX.). Um allen Mißverſtändniſſen vorzubeugen, ſtellt er bei zuſammengeſetzten Ausdrücken immer die negativen Glieder hinter alle poſitiven, z. B. δῦ ᾱ. μο̄ ιβ̄ λεῖψει ςς̄ ζ, das heißt $x^2+12-7x$, und ebenſo bei mehren negativen Gliedern δδῦ θ̄. δῦ ς̄ μο̄ ᾱ ⋔ κῦ δ̄ ςς̄ ιβ̄, das heißt $9x^4+6x^2+1-4x^3-12x$ (IV. 29.). An ein allein ſtehendes ſubtractives Glied, an den Begriff der an und für ſich negativen Zahl iſt, wie wir unten ſehen werden, bei ihm noch nicht zu denken.

---

2) Coſſali (Orig. T. I. p. 195. 196.) macht die ſonderbare Bemerkung, daß die Italiener und ihre Lehrer, die Araber, die Potenzenſcala nicht von der Potenz 1, der Wurzel, ſondern von der Potenz 0, der bekannten Zahl, anfangen. Seine Worte lauten ſo: Wallis non ha riflettuto a due altre differenze tra le scale medesime (nämlich der Diophantiſchen und der Italieniſch-Arabiſchen, deren erſter Unterſchied der iſt, daß die Letztern die höhern Potenzen als Potenzen von Potenzen darſtellen, während Diophant ſie als Producte der niedrigeren Potenzen betrachtet). La prima ci è, che laddove Diofanto denomina con singolarita *Numero* il numero ignoto, denominando *Monade* il numero dato di comparazione; gli antichi Italiani degli Arabi seguaci denominano questo il *Numero*, e *Radice*, o *Lato*, o *Cosa* il numero sconosciuto. La seconda è che Diofanto comincia la scala dal numero ignoto, e Fra Luca, Tartaglia, Cardano la incominciano dal numero noto. Dazu giebt er folgende Tabelle:

	Scala Diofantea	Scala Araba
	. . . .	1. Numero . . . il noto
x	1. Numero . . . l'ignoto	2. Cosa, radice, lato
x^2	2. Podestà	3. Censo
x^3	3. Cubo	4. Cubo
x^4	4. Podestà-podestà	5. Censo di censo
x^5	5. Podestà-cubo	6. Relato primo
x^6	6. Cubo-cubo	7. Censo di cubo, o cubo di censo

u. ſ. w.

Ich habe oben im dritten Kapitel bereits davon geſprochen, wie die Griechen überhaupt und zumal auch Diophant Brüche zu bezeichnen pflegen. Dagegen muß ich als hieher gehörig eine beſondere Art von Brüchen erwähnen, ſolche nämlich, deren Nenner die Unbekannte in irgend einer Form in ſich ſchließt. Die einfachſte Art dieſer Brüche iſt die, wenn der Nenner die Unbekannte ſelbſt oder irgend eine nicht weiter complicirte Potenz derſelben iſt. Wir finden darüber in Diophant's dritter Definition die nöthigen Aufſchlüſſe. „Wie die den Zahlen gleichnamigen Theile, ſagt Diophant, den Namen der Zahlen entſprechend benannt werden, ſo daß man von drei den Namen ein Drittel, von vier den Namen ein Viertel bildet, ſo werden auch die den eben beſchriebenen Zahlen (ἀριθμός, δύναμις, κύβος u. ſ. w.) gleichnamigen Theile nach den Namen dieſer Zahlen benannt werden, und man bildet von ἀριθμός den Namen τὸ ἀριθμοστόν, von δύναμις den Namen τὸ δυναμοστόν, von κύβος τὸ κυβοστόν und ſo fort τὸ δυναμοδυναμοστόν, τὸ δυναμοκυβοστόν, τὸ κυβοκυβοστόν. Jeder von ihnen wird ſeine Bezeichnung nach der gleichnamigen Zahl erhalten und eine Linie die Species abſondern (ἕξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν ἐπὶ τοῦ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ ση-

---

Dieſe Tabelle iſt inſoweit ganz richtig, nur hätte Coſſali, wie in der zweiten Spalte, ſo auch in der erſten eine Stufe höher, nämlich mit den Diophantiſchen μονάδες anfangen, oder auch mit demſelben Rechte in beiden Spalten dieſe erſte Stufe weglaſſen ſollen. Ich ſehe gar nicht ein, was dem ſonſt ſo beſonnenen Manne hier vorgeſchwebt hat, und habe auch eben keinen der alten Italieniſchen Mathematiker bei der Hand, den ich zu dieſem Behufe nachſchlagen könnte. Vielleicht daß daſelbſt ſich eine Stelle, wie folgende aus der Algebra ihres Lehrers, **Mohammed ben Muſa**, vorfand, aus welcher Coſſali wider ſeine Gewohnheit einen Schluß gezogen hat, zu dem die Sache nicht berechtigt. Hier heißt es nämlich S. 3. der Roſen'ſchen Ausgabe: ووجدت الاعداد التي يحتاج اليها في حساب الجبر والمقابلة علي ثلثة ضروب وهي جذور و اموال وعدد مفرد لا ينسب الي جذر ولا الي مال „Ich fand, daß die Zahlen, deren man ſich in der Rechnung Aljebr und Almukabalah bedient, dreierlei Art ſind, und zwar Wurzeln und Quadrate und abſolute Zahl, welche weder auf die Wurzel noch auf das Quadrat Bezug hat." Schwerlich aber dürfte eine Darſtellung der Art einen Schriftſteller bewegen zu ſagen, der Arabiſche Autor fange die Potenzenſcala der Unbekannten mit der bekannten Zahl an. Und daß die älteſten Italiener ungefähr daſſelbe geſagt haben, läßt ſich aus ihrem ſonſtigen Zuſammenhange mit Mohammed ben Muſa ſchließen.

Digitized by Google

μεῖον γράμμην ἔχον διαστέλλουσαν τὸ εἶδος)" [3]). Aus dieſen letzten Worten ſcheint hervorzugehen, daß Diophant ſeine Brüche urſprünglich anders, als gewöhnlich geſchieht, bezeichnet habe. In dem gedruckten Texte aber werden dieſe mit unbeſtimmtem Nenner den gewöhnlichen ganz analog ausgedrückt, indem das Nennerzeichen dem Zähler oben rechts als Exponent angeſetzt wird, z. B. $\overline{\alpha}^{\varsigma'}$, und noch vollſtändiger indem er ϛού, die Endſylbe von ἀριθμοστοῦ, nebſt dem zugehörigen Coefficienten oben anſetzt, $\overline{\delta}^{\varsigma o\tilde{v}\,\tilde{\alpha}}$, $\overline{\varkappa}^{\delta\tilde{v}\,\tilde{\alpha}}$. Iſt dagegen der Zähler ſelbſt ſchon ein Zahlenbruch, ſo finden wir die Formel in der Regel ausgeſchrieben, z. B. ἀριθμοστὸν $\overline{\alpha}$. $\overline{\alpha}^{\beta}$, d. h. $\frac{1\frac{1}{2}}{x}$, δυναμοστὸν $\overline{\varsigma}$. $\overline{\alpha}^{\tilde{\delta}}$ d. h. $\frac{6\frac{1}{4}}{x}$ [4]). Diophant geht aber noch weiter und macht von Brüchen Gebrauch, deren Zähler oder Nenner oder beide zugleich zuſammengeſetzte algebraiſche Ausdrücke ſind, z. B. $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\vartheta}$ ⋔ ϛοῦ $\overline{\alpha}^{\varsigma o\tilde{v}\,\tilde{\alpha}}$, welches ſoviel ſagen will, als $\frac{9-x}{x}$ [5]). Iſt jedoch der Nenner ein zuſammengeſetzter Ausdruck, ſo bedient Diophant ſich, anſtatt den Ausdruck als Bruch zu ſchreiben, des Mittels, von dem er auch ſchon bei ſehr großen Zahlennennern Gebrauch macht, daß er nämlich zu dem Zähler den Nenner mit den Worten ἐν μορίῳ oder μορίου hinzufügt; ſo zum Beiſpiel bei Zahlen $\delta\delta^{\tilde{v}}\,\overline{\beta}$. $\overline{,\varepsilon\chi}$ ἐν μορίῳ $\overline{\varrho\varkappa\beta}$. $\overline{\alpha\varkappa\varepsilon}$, das heißt $\frac{25600}{1221025}x^4$, und ebenſo bei algebraiſchen Nennern, z. B. $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\eta}$ μορίου $\delta^{\tilde{v}}\,\overline{\alpha}$. $\varsigma^{o\tilde{v}}\,\overline{\alpha}$, d. h. $\frac{8}{x^2+x}$; $\delta^{\tilde{v}}\,\overline{\alpha}$. $\varsigma^{o\tilde{v}}\,\overline{\alpha}$. $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\eta}$ μορίου $\delta^{\tilde{v}}\,\overline{\alpha}$ $\varsigma^{o\tilde{v}}\,\overline{\alpha}$ das heißt $\frac{x^2+x+8}{x^2+x}$; $\delta^{\tilde{v}}\,\overline{\zeta}$ λείψει ϛϛ̃ $\overline{\varkappa\delta}$ μορίου $\delta^{\tilde{v}}\,\overline{\alpha}$. $\mu^{\tilde{o}}\,\overline{\iota\beta}$ λείψει ϛϛ̃ $\overline{\zeta}$,

---

3) Dieſe ganze Definition, ſowie die ſiebente, welche die Multiplicationsregel für ſolche Brüche von der Form $\frac{a}{x^n}$ enthält, hat Bachet falſch verſtanden und ſo aufgefaßt, als hätte Diophant Ausdrücke von der Form $\frac{1}{n}x$ im Sinne. Während des Drucks hat der Herausgeber jedoch ſeinen Irrthum eingeſehen und am Ende des ſechſten Buchs, S. 451, verbeſſert.

4) Vergl. III, 12. IV, 40. V, 30. VI, 3. 4. 5.

5) S. IV, 37.

Digitized by Google

d. h. $\frac{7x^2 - 24}{x^2 + 12 - 7x}$; κ$^{\tilde{υ}}$ $\overline{β}$. δ$^{\tilde{υ}}$ $\overline{ε}$. ςς^{οί} $\overline{δ}$. μ$^{\tilde{o}}$ $\overline{α}$ ἐν μορίῳ δ$^{\tilde{υ}}$ $\overline{α}$. ςς$\tilde{}$ $\overline{β}$. μ$\overline{α}$, d. h. $\frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ und dergleichen mehr [6]).

Die beiden Seiten der Gleichung [7]) verbindet Diophant durch die Worte ἴσος oder ἴσος ἐστὶ in ihren verſchiedenen durch die Umſtände bedingten grammatiſchen Flexionen, z. B. ποιεῖ κ$^{\tilde{υ}}$ $\overline{κς}$ ςς^{οῦς} $\overline{ς}$ ⫛ δ$^{\tilde{υ}}$ $\overline{κς}$ ἴσους ςς^{οῖς} $\overline{ς}$ ⫛ δ$^{\tilde{υ}}$ $\overline{α}$, ähnlich wie die Europäer bis ins ſiebzehnte Jahrhundert hinein.

Nach dieſer Auseinanderſetzung der wirklich vorhandenen Zeichen, deren Diophant ſich bedient, wollen wir einen Blick auf das eigentliche Weſen dieſer Bezeichnung werfen. Da muß ich denn zunächſt bemerklich machen, daß dieſe Diophantiſche Bezeichnungsmethode ihrem Charakter nach ſehr verſchieden iſt von der bei uns gebräuchlichen. Während wir nämlich durch die algebraiſche Bezeichnungsmethode eine von dem mündlichen Vortrage ganz unabhängige Zeichen- und Formelſprache uns gebildet haben, finden wir bei Diophant nur Abbreviaturen der als ausgeſprochen gedachten Worte. Dies beweiſen theils die Zeichen ſelbſt, theils und noch mehr der Gebrauch derſelben. Diophant gebraucht ganz beliebig, wie es ihm gerade einfällt, bei der Darſtellung einer Formel bald das Zeichen, bald das vollſtändige Wort; er ſchreibt in demſelben Satze ς́, ςς$\tilde{}$, und gleich daneben in demſelben Sinne ἀριθμός, ἀριθμοί [8]), ebenſo μ$^{\tilde{o}}$ und

---

6) S. IV, 26. 41. 42. V, 25. VI, 13. 14. 15. 21. 23.

7) Die Seite der Gleichung heißt Def. XI. μέρος, dagegen IV, 25. ἴσωσις (καὶ εἰ ἦσαν οἱ ςς^{οὶ} ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι etc.).

8) Was will Reimer mit folgenden Worten (Überſ. d. Geſch. d. Mathem. von Boſſut, I. 56.) ſagen? „Die Zahl, welche nicht als Potenz betrachtet wird, wird mit dem griechiſchen Buchſtaben ς, die Einheit mit μ° bezeichnet. Die geſuchte Größe (unſer x), in ſo fern ſie zu keiner Dignität erhoben iſt, nennt Diophant **immer** in Worten d i e Z a h l (ἀριθμὸς), **oder** er gebraucht **auch** jenen Buchſtaben ς.“ Reimer macht hier geradezu die Ausnahme zur Regel und umgekehrt. Diophant ſagt in der zweiten Definition ausdrücklich, er werde die Unbekannte ἀριθμὸς nennen und durch ς́ bezeichnen, und es iſt ſpäterhin im Texte eine Unregelmäßigkeit, wenn er oft auch für ς́ das Wort ausſchreibt und andrerſeits ἀριθμὸς in ς́ abkürzt, auch wo es nicht die Unbekannte bedeutet. Aus Reimer's Darſtellung würde für beide Fälle gerade das Gegentheil geſchloſſen werden müſſen. Was ſollen ferner die ſich gegenſeitig aufhebenden Partikeln — **immer** — **oder auch**?

μονάδες, δῦ und *δύναμις*, ⋔ und *λείψει* und ſo fort. Ja, was den Charakter dieſer Zeichen als bloßer Abbreviaturen der Worte noch mehr ins Klare ſtellt, er gebraucht dieſe algebraiſchen Zeichen für die entſprechenden Worte auch dann, wenn dieſe einen ganz andern Sinn haben, zum Beiſpiel ς' für das Wort *ἀριθμός*, wo unter letzterem gar nicht die Unbekannte verſtanden wird [9]), und ebenſo das Zeichen ⋔ für andere Flexionsformeln des Stammes *λεῖψις*, zum Beiſpiel im Contexte für *λιπών* oder *λείψας*, ſogar in den Worten der Aufgabe [10]). Ferner wird oft das Wort ſowohl als ſeine Abbreviatur von dem zugehörigen Zahlencoefficienten durch Partikeln getrennt [11]); ganz beſonders aber deutet auch auf den Charakter bloßer Abbreviaturen der Umſtand hin, daß den Zeichen ς' und μο͂ der den Worten *ἀριθμός* und *μονάς* nach der jedesmaligen Verbindung angemeſſene Artikel vorgeſetzt, ferner daß dem Zeichen ς' ſtatt des einfachen Accents in der Regel noch oben die Caſusendung angehängt wird, ςοῦ, ςῷ, ςςοὶ, ςςοῦς, ςοῖς, und ſo auch mit den für den Artikel gebräuchlichen Abbreviaturen ς̀ für *ἀριθμὸν*, ςς͂ für *ἀριθμῶν*, gleichwie man τ̀ für *τὸν* und τ͂ für *τῶν* ſchreibt. Faſt alle dieſe erwähnten Eigenthümlichkeiten finden wir in einer Formel vereinigt, welche wir in den letzten Zeilen des erſten Buchs leſen: *ςςοὶ ἄρα ι̅ μο͂ λ ἴσοι εἰσὶν ςςοῖς ι̅α̅ μονάσι ι̅ε̅.* Die letztgenannten Erſcheinungen kommen indeß ſo oft vor, daß es nicht nöthig iſt, Beiſpiele als Belege anzuführen; jede Seite bietet deren mehrere.

Um den Standpunct, welchen Diophant in der Geſchichte der Algebra in dieſer Hinſicht einnimmt, richtiger beurtheilen zu können, bemerken wir Folgendes. Wir können, was die formelle Darſtellung der algebraiſchen Operationen und Gleichungen anlangt, drei hiſto-

9) Z. B. II, 12. 19. III, 19. (zweimal) IV, 10. 25. V, 12. VI, 10. und öfter. Z. B. III, 19. *ἵνα οὖν τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν ἔχωμεν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ς' πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀπῆκται εἰς τὸ ζητῆσαι δύο ςςοὺς* etc.

10) Z. B. III, 3. heißt die Aufgabe: *Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν ⋔ ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον.* Und ähnlich III, 11. 15. 19. IV, 40. vielleicht auch noch öfter. Zwar für *λείψει*, aber mitten im wörtlich ausgedrückten Texte findet es ſich II, 34. und öfter.

11) Z. B. I, 2. *ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες* für $4x$, I, 43. *μονάδες ἄρα ι̅ε̅.* ebend. *ςςοὶ ἄρα ι̅*, und dergleichen.

riſch und weſentlich verſchiedene Entwickelungsſtufen dieſer Wiſſenſchaft unterſcheiden. Die erſte und niedrigſte Stufe kann man die rhetoriſche Algebra nennen; ſie iſt vollſtändige Wortrechnung, und ihr Weſen beſteht darin, daß bei Ermangelung aller Zeichen der ganze Verlauf der Rechnung in ausführlichen Worten dargeſtellt wird. Hieher gehören die Beiſpiele algebraiſcher Auflöſungen, welche wir bei Jamblichus finden und von denen wir im fünften Kapitel eines ausgeführt haben, ſo wie die Baſis derſelben, das Epanthema von Thymaridas; hieher gehören ferner alle bis jetzt bekannt gewordenen Arabiſchen und Perſiſchen Algebriſten, bei denen wir ebenſo wenig wie bei Jamblichus irgend eine Spur von algebraiſcher Zeichenſprache vorfinden; auch ſind die älteſten Italiener und deren Schüler, zum Beiſpiel Regiomontanus, noch hieher zu rechnen [12]). Die zweite Stufe kann man die ſynkopirte Algebra nennen. Ihr Vortrag iſt dem Weſen nach rhetoriſch, wie in der erſten Stufe, aber ſie bedient ſich für gewiſſe oft wiederkehrende Begriffe und Operationen conſtanter Abbreviaturen ſtatt der vollen Worte. Auf dieſer Stufe ſteht Diophantus und die ſpäteren Europäer bis gegen die Mitte des ſiebzehnten Jahrhunderts, obgleich ſchon Vieta in ſeinen Schriften den Keim der modernen Algebra niedergelegt hat, der aber erſt einige Zeit nach ihm aufſproßte. Dieſe dritte Stufe nämlich iſt die ſymboliſche Algebra, welche alle vorkommenden Formen und Operationen durch eine vollkommen ausgebildete, vom mündlichen Vortrage ganz unabhängige Zeichenſprache darſtellt, wodurch ſie jede rhetoriſche Darſtellung unnütz macht. Wir können eine algebraiſche Entwickelung von Anfang bis zu Ende völlig verſtändlich durchführen, ohne irgend ein geſchriebenes Wort zu gebrauchen, und ſetzen wirklich, wenigſtens bei einfacheren Entwickelungen, nur hin und wieder eine Conjunction zwiſchen die Formeln, um dem Leſer das Suchen und Zurückleſen dadurch zu erſparen, daß wir gleich auf die Verbindung der Formel mit den vorhergehenden und nächſtfolgenden hinweiſen. Indeß ſind wir Europäer ſeit der Mitte des ſiebzehnten Jahrhunderts nicht die Erſten geweſen, die ſich auf dieſe Stufe erhoben haben, ſondern die Indiſchen Mathematiker ſind uns hier um viele Jahrhunderte

12) Man kann hierüber vergleichen, was Stifel in der oben S. 57 Note 45 mitgetheilten Stelle ſeiner Coß ſagt.

vorausgeeilt. Ich will jede dieſer drei Stufen, der größern Anſchaulichkeit wegen, an einem Beiſpiele erläutern, welches zu den beiden erſten Methoden wörtlich aus irgend einem Mathematiker entnommen iſt.

Erſte Stufe. Beiſpiel aus Mohammed ben Muſa [13]). Ein Quadrat und zehn ſeiner Wurzeln ſind gleich neun und dreißig Dirhem, das heißt, wenn du zu einem Quadrate zehn Wurzeln addirſt, ſo wird dieſes zuſammengenommen gleich neun und dreißig. Die Auflöſung beſteht darin, daß du die Anzahl der Wurzeln halbirſt, und das macht in dieſem Beiſpiele fünf; dann multiplicirſt du dieſes in ſich ſelbſt, ſo kommt fünf und zwanzig heraus. Hierauf addirſt du dieſes zu den neun und dreißig, das macht vier und ſechzig; daraus ziehſt du die Quadratwurzel, das iſt acht, und ſubtrahirſt davon die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, nämlich fünf, ſo bleibt der Reſt drei; und das iſt die Wurzel des Quadrats, welches du ſuchſt, und das Quadrat iſt neun.

Die Araber ſind in der Anwendung dieſer rhetoriſchen Methode ſo conſequent, daß ſie nicht einmal ein Zahlzeichen in ihrem Texte gebrauchen. Man vergleiche mit dieſem Beiſpiele Jamblichus (p. 89—96), der zwei Exempel giebt, die ſich von dem Arabiſchen nur darin unterſcheiden, daß der Grieche ſich's nicht übel nimmt, ſtatt der Zahlworte nach Belieben Zahlzeichen anzuwenden. Ferner kann man das oben S. 56 mitgetheilte Beiſpiel aus Regiomontanus daneben halten, in welchem ſich auch keine andern Zeichen als Zahlzeichen befinden.

---

13) Ausgabe v. Roſen S. 5.

مال و عشرة اجذاره يعدل تسعة و ثلثين درهما و معناه اي مال
اذا زدت عليه مثل عشرة اجذار بلغ ذلك كله تسعة و ثلثين ۞
فقياسه ان تنصف الاجذار وهي في هذه المسألة خمسة فتضربها في
مثلها فيكون خمسة و عشرين فتزيدها علي التسعة والثلثين فيكون
اربعة و ستين فتاخذ جذره وهو ثمانية فتنقص منه نصف الاجذار
وهو خمسة فيبقي ثلثة وهو جذر المال الذي تريد والمال تسعة ۞

In der Art iſt das ganze Werk; ebenſo die Werke von Beha-eddin, Nejm-eddin Ali, und die Auszüge aus Feizi's Perſiſcher Bearbeitung der Lilawati, die ich geſehen habe.

Zweite Stufe. Beiſpiel aus Diophantus [14]).

Drei Zahlen zu finden, ſo daß die Summe von allen dreien ſowohl als von je zweien ein Quadrat ſei. Man ſetze die Summe der drei Zahlen gleich dem Quadrate 1 Q. 2 Z. 1 E. Die erſte Zahl ſammt der zweiten ſei 1 Q., ſo wird der Reſt 2 Z. 1 E. die dritte Zahl ſein. Die zweite mit der dritten ſei gleich 1 Q. 1 E. w. 2 Z., wovon die Wurzel 1 Z. w. 1 E. iſt. Nun ſind alle drei zuſammen 1 Q. 2 Z. 1 E.; daher wird die erſte ſein 4 Z. Dieſe aber mit der zweiten zuſammen war geſetzt gleich 1 Q. Demnach wird die zweite ſein 1 Q. weniger 4 Z. Es wird alſo die erſte mit der dritten zuſammen, 6 Z. 1 E., eine Quadratzahl ſein müſſen. Sei (dieſe Summe) gleich 121 E., ſo wird die Zahl 20 E. Daher iſt die erſte 80 E., die zweite 320 E., die dritte 41 E.; und ſie erfüllen die Forderung.

So wenig wie der Übergang von der erſten Stufe zu der zweiten ſich ſo ganz ſchroff darſtellt [15]), ebenſowenig iſt die Grenze zwiſchen der zweiten und dritten Stufe ſcharf bezeichnet. Der Übergang geſchah allmählig, indem man immer ein Zeichen nach dem andern erfand. Diophant hat ein einziges Operationszeichen, nämlich für die

14) III, 7. Ich habe, um das Princip der Abbreviatur auch im Deutſchen auszudrücken, für die Diophantiſchen Zeichen δῦ, ς́, μ̃°, ⋔ die Buchſtaben Q., Z., E., w., als Anfangsbuchſtaben der Worte Quadrat, Zahl, Einheit, weniger gewählt, und unſerer Sprachweiſe gemäß die Zahlen vor das abgekürzte Wort geſtellt. Zur Vergleichung ſtehe hier das Original: Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ἵνα σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ δῦ ᾱ. ςς̃ β̄ μ̃° ᾱ. καὶ ἔστω ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου δῦ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ςς̀ β̄ μ̃° ᾱ. ἔστω δὲ καὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου δῦ ᾱ μ̃° ᾱ ⋔ ςς̃ β̄, ἀπὸ πλευρᾶς ςοῦ ᾱ λείψει μ̃° ᾱ. καὶ εἰσὶν οἱ τρεῖς δῦ ᾱ. ςς̃ β̄ μ̃° ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ςς̃ δ̄. ἀλλὰ καὶ σὺν τῷ δευτέρῳ τέτακται δῦ ᾱ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται δῦ ᾱ. λείψει ςς̃ δ̄. δεήσει ἄρα καὶ τὸν πρῶτον μετὰ του τρίτου συναγόμενον ςς̃ ϛ̄ μῦ ᾱ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ· ἔστω ἴσος μ° ρκα· καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̃° κ̄· ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̃° π̄, ὁ δὲ δεύτερος μ̃° τκ̄, ὁ δὲ τρίτος μ̃° μα· καὶ ποιοῦσι τὸ ἐπίταγμα.

15) So finden wir wirklich ſelbſt bei Diophant Beiſpiele von gänzlicher Vernachläſſigung des Gebrauchs der Abbreviaturen (z. B. I, 1.), die alſo ganz der rhetoriſchen Stufe angehören.

die Subtraction; Lucas de Burgo braucht für plus und minus die Anfangsbuchſtaben *p* und *m*; Tartaglia drückt plus durch φ aus; bei Vieta finden wir bereits die jetzt noch gebräuchlichen Zeichen $+$, $-$, und außerdem $=$ für die unbeſtimmte Subtraction ($A = B$ heißt bei Vieta: entweder $A - B$ oder $B - A$ jenachdem das eine oder das andere größer iſt, oder kurz geſagt, die Differenz zwiſchen A und B), wofür Andere das Zeichen ∽ gebrauchen. Für die Multiplication wendet Oughtred zuerſt das Zeichen $\times$ an, und Harriot ſchreibt die Factoren ohne Zeichen nebeneinander [16]). Zu den am ſpäteſten eingeführten Zeichen gehört das für die Gleichheit, welches ich mich nicht früher als bei Descartes gefunden zu haben erinnere, der dafür dieſes Zeichen ∞ in ſeiner Geometrie gebraucht, wofür ſeit Wallis das jetzige Zeichen $=$ allgemein aufgenommen iſt [17]).

Dritte Stufe. Bloß der Vergleichung wegen will ich hier das oben gegebene Beiſpiel aus Mohammed ben Muſa ſo hinſchreiben, wie wir etwa den Gang der Rechnung einem Anfänger deutlich machen würden. Gegeben iſt die Gleichung

$$x^2 + 10x = 39$$

$\left(\frac{10}{2}\right)^2$, d. i. 25, auf beiden Seiten addirt, giebt

$$x^2 + 10x + 25 = 64$$

alſo auch $\sqrt{x^2 + 10x + 25} = \sqrt{64}$

das iſt $x + 5 = 8$

$$x = 3$$

Nachdem ich ſo Diophant's Bezeichnungsmethode dargeſtellt und ihm in dieſer Beziehung ſeine Stellung im Gebiete der Algebra an-

---

16) Coſſali (Orig. I. p. 52) ſagt: Descartes, sebbe posteriore, Geom. parte II. (a la testa) prescrive d'interporre alle due quantità complesse da moltiplicarsi insieme la lettera M tirando sopra ciascuna una linea etc. In der Ausgabe von Descartes Geometrie, welche ich beſitze, (Paris. 1726. 8.) habe ich weder an der bezeichneten noch an irgend einer andern Stelle etwas der Art gefunden.

17) Nach Käſtner, Geſch. d. Math. I. S. 188, ſoll ſchon Xylander in ſeiner Überſetzung Diophant's das Zeichen || für die Gleichheit gebrauchen, was ich nicht habe vergleichen können. Speciellere Nachrichten über die allmählige Aufnahme

gewieſen habe, wollen wir noch einige Puncte berühren, welche nothwendig hervorgehoben werden müſſen, wenn wir uns von des Verfaſſers formeller Entwickelungsſtufe ein ganz klares ſelbſt im Einzelnen ausgeführtes Bild entwerfen wollen; und zwar werden wir unſer Augenmerk noch vorzüglich auf drei Gegenſtände zu richten haben, auf die Grenzen nämlich, welche in Diophant's Werk den unbekannten Größen, den gegebenen Größen und endlich den Wurzeln der Gleichungen geſteckt ſind.

Diophant kann vermöge ſeiner Bezeichnungsmethode nur eine Unbekannte in die Gleichung einführen. Das hat auf ſeinen Vortrag einerſeits den Einfluß, daß er Eliminationen, welche wir im Laufe der Rechnung ausführen, bereits in der Vorbereitung ausführt, ſo daß er auf einen Anſatz mit einer Unbekannten kommt. Einfache Beiſpiele der Art enthalten die meiſten Aufgaben des erſten Buchs, welche meiſtens beſtimmte Aufgaben mit mehren Unbekannten ſind. Sind aber, wie in vielen Beiſpielen, die Bedingungen und Verhältniſſe zwiſchen den verſchiedenen Unbekannten complicirter, ſo entwickelt Diophant eine unglaubliche Gewandtheit ſowohl in der geſchickteſten Annahme der Unbekannten als in der oft ſehr kunſtvollen und ſcharfſinnigen Vorbereitung der Gleichung. Beiſpiele führe ich hier nicht an, weil ich in den folgenden Kapiteln mehre der Art beibringe. Auf der andern Seite aber äußert dieſe Unvollkommenheit der Bezeichnung auf Diophant's Vortrag den üblen Einfluß, daß er bei Aufgaben, die ihrer Natur nach unbeſtimmt ſind und die alſo auf eine Endgleichung mit zwei oder mehren Unbekannten führen würden, für irgend eine derſelben eine willkührlich gewählte beſtimmte Zahl annehmen und auf dieſe Weiſe die unbeſtimmte Aufgabe in eine beſtimmte verwandeln muß. So wenigſtens macht er es bei den meiſten Aufgaben, welche ihrem erſten allgemeinen Ausdrucke nach auf unbeſtimmte Gleichungen des erſten Grades führen würden. Wie er aber ſchon bei den leichteren Aufgaben des erſten Buchs nicht immer eine der geſuchten Zahlen ſelbſt als die für die Gleichung beſtimmte Unbekannte annimmt, ſondern bald ihre Summe, bald ihre

der einzelnen Zeichen werde ich ſpäterhin geben. Vorläufig verweiſe ich auf die Notizen bei Coſſali T. I. cap. III. und auf Wallis Algebra (Opera T. II.), wo ſich einzelne Notizen der Art, z. B. p. 68. 69. 89. 138. 239. zerſtreut finden, die aber nicht alle richtig ſind.

Differenz, bald irgend eine andere Complexion derſelben als ἀριθμός ſetzt, wobei er abermals eine ungemeine Gewandtheit in der Kunſt, die Endgleichung in der möglichſt einfachen Form darzuſtellen, an den Tag legt, ſo iſt das noch viel mehr der Fall bei den ſchwierigeren Problemen der folgenden Bücher. Um daher die Beſchränkung, welche Diophant's Kunſt durch die Unmöglichkeit, mehr als eine Unbekannte in die Rechnung zu bringen, erleidet, ganz allgemein zu faſſen, müſſen wir ſagen: er iſt genöthigt, alle Unbekannten, welche die Aufgabe zu finden vorſchreibt, als Functionen einer einzigen darzuſtellen. Mit welcher Kunſtfertigkeit nun Diophant zwei, drei bis vier Unbekannte als Functionen ſeines Zeichens ς' ſo auszudrücken weiß, daß alle Bedingungen der Aufgabe bis auf eine ſchon durch dieſe Annahme erledigt werden, ſo daß für die eigentliche Rechnung nur noch dieſe eine Bedingung zu erfüllen übrig bleibt, das wollen wir unten an einigen in dieſer Beziehung ausgezeichneten Beiſpielen ausführlich zeigen. So giebt ihm alſo gerade dieſe formelle Unvollkommenheit ſeiner Methode Gelegenheit, ſein überwiegendes Genie und ſeine ſeltene noch jetzt als Muſter daſtehende Gewandtheit in ihrem höchſten Glanze zu zeigen, und was ſeine Methoden dadurch an wiſſenſchaftlicher Allgemeinheit verlieren, das gewinnen ſie an äußerer Grazie und überraſchendem Effect.

Weniger eine Beſchränkung, als eine Unannehmlichkeit für den Leſer, die aus dem Mangel an Zeichen für mehre Unbekannte hervorgeht, iſt folgende. Diophant ſieht ſich oft genöthigt den Gang ſeiner Rechnung durch Auflöſung einer Zwiſchenaufgabe zu unterbrechen, um eben für jene Functionen von ς', durch welche die verſchiedenen geſuchten Zahlen ausgedrückt werden ſollen, die erforderlichen Formen zu beſtimmen. Da tritt denn der Übelſtand ein, daß er die in dieſer neuen Aufgabe geſuchte Unbekannte ebenfalls durch das Zeichen ς' ausdrückt, ſo daß daſſelbe Zeichen in einer Aufgabe ſucceſſive ganz verſchiedene Bedeutungen hat. Auch davon werden wir in der Folge, bei der Auseinanderſetzung der Diophantiſchen Methoden, Beiſpiele beibringen.

Was die Rolle anlangt, welche bei Diophant die bekannten Größen ſpielen, ſo habe ich hier nur zu wiederholen, was ich ſchon angedeutet habe, daß nämlich an allgemeine Coefficienten (species) oder an ein allgemein ausgedrücktes abſolutes Glied der Gleichung nicht zu denken iſt, daß vielmehr Diophant nur Zahlenbeiſpiele giebt. Iſt in der Aufgabe von einer gegebenen Zahl, einem gegebenen Ver-

hältniſſe die Rede, ſo nimmt er in dem Anſatze dafür irgend einen beſtimmten Zahlenwerth an, wobei ich als einzelne Eigenthümlichkeit ſogleich bemerken will, daß Diophant unter dem gegebenen Verhältniſſe zweier Zahlen zu einander immer ſoviel verſteht, daß die eine Zahl ein Vielfaches der andern ſei. Als ferner der Auctor in dem ſoeben ausgeführten Beiſpiele dahin gekommen war, die Unbekannte, x, ſo zu beſtimmen, daß der Ausdruck $6x + 1$ eine Quadratzahl werde, ſo begnügt er ſich zu ſagen: „es ſei gleich 121;“ da er doch mit demſelben Rechte $6x + 1$ irgend einer andern Quadratzahl hätte gleich ſetzen können, allenfalls, wenn er das Reſultat in ganzen Zahlen wünſchte, mit der Beſchränkung, daß die Wurzel der anzunehmenden Quadratzahl die Form $6n + 1$ habe; aber dergleichen weitere Anwendungen ſeiner Methode überläßt er dem Leſer. Diophant iſt zufrieden, wenn er für die geſuchte Zahl, oder wenn deren mehre ſind, für jede derſelben einen Zahlenwerth gefunden hat, welcher den Bedingungen der Aufgabe entſpricht; und dieſe Zufriedenſtellung ſeiner ſelbſt mit einer einzigen Auflöſung, wie ſie die Aufgabe dem Worte nach auch nur verlangt, geht als Grundcharakter durch ſein ganzes Werk hindurch. Nichtsdeſtoweniger aber liegt in der Art und Weiſe, wie er ſein Zahlenbeiſpiel entwickelt und zum Reſultate gelangt, immer zugleich ein ganz klarer Wegweiſer, wie man durch Variationen in den beliebig angenommenen Zahlen ſich ſelbſt nach derſelben Methode andere Zahlenwerthe entwickeln könne, welche der Aufgabe genügen. In dieſer Hinſicht iſt Diophant's Vortrag durchaus muſterhaft; ſeine ganze Aufmerkſamkeit iſt auf die Veranſchaulichung der Methode gerichtet, wozu ihm das Zahlenbeiſpiel nur als Mittel dient; daher dieſe häufigen Zurückweiſungen auf den Gang der Rechnung und auf die Art, wie man zu dieſem oder jenem Reſultate gelangt iſt; daher das Abbrechen der Entwickelung, ſobald die Methode ſelbſt klar geworden, und die wirkliche Auffindung der geſuchten Zahlenwerthe nur noch von gewöhnlichen Rechnungen abhängt [18]). Sonach liegt in ſeiner partiellen Auflöſung immer zugleich der Wink für die Auffindung beliebig vieler anderer

18) Beiſpiele davon ſ. III, 9. V, 14. 18. 19. 20. 21. u. a., wo Diophant es dem Leſer überläßt, den gefundenen Werth für ς' in die davon abhängigen Ausdrücke der geſuchten Zahlen einzuſetzen. Bloß angedeutet iſt der Gang der Auflöſung von V, 15. 16. 17. 23. u. a.

Zahlenwerthe, obgleich er ſelbſt ſelten ausdrücklich auf dieſe Unendlichkeit der Auflöſungen hinweiſt [19]). Ich habe ſchon öfter darauf hingedeutet, daß die Algebra in dieſer an Zahlenbeiſpielen haftenden Darſtellungsmethode nicht bloß bei Diophant, ſondern auch bei den Indern, bei den Arabern, bei den alten Italienern und überhaupt bei allen Mathematikern vor Vieta erſcheint, und daß dieſem großen Genius das Verdienſt gebührt, durch Einführung der Buchſtabencoefficienten der Algebra eine univerſellere Form gegeben zu haben. Indeß muß ich hier ein für allemal bemerken, daß der Mangel allgemeiner Formeln bei einem Mathematiker nicht auf den Mangel allgemeiner Regeln und Methoden ſchließen läßt. Die Alten hatten allgemeine Regeln für die Behandlung ihrer Gleichungen ſo gut wie wir, ſie drückten dieſelben aber nicht in Buchſtabenformeln, ſondern in Worten aus. So giebt auch Diophant, deſſen Methoden zwar der großen Mehrzahl nach nicht dieſen univerſellen Charakter haben, doch eine ganz allgemeine Regel für die ſogenannte doppelte Gleichung, das heißt, für das Verfahren, welches anzuwenden iſt, wenn man zwei Ausdrücke wie $x \pm a$ und $x \pm b$ für einen Werth von x zugleich zu Quadraten machen ſoll. Er ſagt: nimm die Differenz beider Ausdrücke und zerlege ſie in zwei Factoren; ſetze dann entweder das Quadrat des halben Unterſchiedes beider Factoren dem kleineren, oder das Quadrat der halben Summe derſelben dem größeren jener Ausdrücke gleich, ſo erhält man einen Werth von x, der beide Ausdrücke zu Quadraten macht [20]). Die Wahrheit der Regel iſt dann aber an einem Zahlenbeiſpiele erläutert,

19) Z. B. IV, 8. am Schluſſe: τοῦτο δὲ ἀπειραχῶς δείκνυται. Auch verweiſt er einmal in der Auflöſung von VI, 12. auf unzählige Zahlen, welche einer Bedingung entſprechen; es kommt hier nämlich darauf an, x ſo anzunehmen, daß $6x^2 + 3$ ein Quadrat wird; da ſagt er: ζητήσομεν ἄρα ἀριθμόν τινα, ὅπως οἱ ἓξ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι μετὰ μο̄ γ̄ ποιῶσι τετράγωνον. ἔστι δὲ ἡ μονὰς ᾱ καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί. Es könnte hier faſt den Anſchein haben, als habe Diophant hier ſeine Zuflucht zur Empirik genommen, da die Methode ihn im Stiche gelaſſen. Indeß der dieſer Aufgabe unmittelbar folgende Lehrſatz lehrt ſogleich in der Gleichung $Ax^2 + B = y^2$ unendlich viele rationale Werthe für x finden, wenn $A + B$, wie in dem Beiſpiel, eine Quadratzahl iſt.

20) II, 12. Wir würden die Regel ſo ausdrücken: Wenn $x + a = y^2$, $x + b = z^2$, ſo iſt $y = \frac{m^2(a-b)+n^2}{2mn}$, $z = \frac{m^2(a-b)-n^2}{2mn}$.

welches ſowohl bei Diophant als bei allen genannten Mathematikern bis auf Vieta hin die Stelle eines wiſſenſchaftlichen Beweiſes vertritt. Diophant kennt keinen andern Beweis als die Probe, das heißt, er beweiſt nicht die Zuläſſigkeit der Methode, ſondern er ſchließt auf deren Richtigkeit aus der Richtigkeit des ſpeciellen Reſultates, welches ſie geliefert hat.

Wir kommen endlich auf die Form der Wurzeln in den Diophantiſchen Gleichungen. Wenn wir von den Auflöſungen der unbeſtimmten quadratiſchen Gleichungen ſprechen, ſo verſtehen wir darunter nie die allgemeine Auflöſung, derzufolge eine der beiden Unbekannten durch die andere und durch die gegebenen Zahlen ausgedrückt wird; in dieſem Sinne würde die Behandlung der unbeſtimmten Gleichungen ſich von der der beſtimmten Gleichungen in gar nichts unterſcheiden; nichts iſt leichter als, wenn die Gleichung $y^2 + 2ay - 2xy = b + ax - cx^2$ gegeben wäre, zu ſagen: alſo iſt $y = x - a \pm \sqrt{a^2 + b - ax - (c-1)x^2}$. Sondern die Sache iſt hier immer die, für eine der beiden Unbekannten einen ſolchen Werth oder ſolche Werthe in rationalen Zahlen zu finden, daß auch der Werth der zweiten Unbekannten rational werde; in dem angeführten Beiſpiele würde es alſo darauf ankommen, für x ſolche Werthe zu beſtimmen, daß die Größe hinter dem Wurzelzeichen ein wirkliches Quadrat würde, damit wir den Ausdruck für y in rationaler Form erhielten. Dieſe Bedingung drückt der Grieche einfach aus durch ſein ἀριθμός; die irrationale Größe iſt ihm keine Zahl; daher ſagt ſchon Euklides [21]): τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, „ſymmetriſche (d. h. nach unſrer Redeweiſe, wie wir oben geſehen haben, rationale) Größen verhalten ſich zu einander wie Zahlen.“ Wenn alſo Diophant in ſeinen Aufgaben ſagt: εὑρεῖν ἀριθμὸν oder ἀριθμοὺς, ſo verſteht ſich ſeiner Meinung nach von ſelbſt, ohne daß er nöthig hätte einen weitern Zuſatz zu machen, daß er rationale Zahlen meine. Und dieſes gilt nicht nur von ſeinen unbeſtimmten, ſondern auch von ſeinen beſtimmten Aufgaben. So ſtellt er z. B. I, 30. die Forderung, man ſoll zwei Zahlen finden, deren Summe und deren Product gegebenen Zahlen gleich ſind. Nennt man hier die Summe der Zahlen s, ihr Product p, ſo werden bekanntlich die beiden Zah-

21) Elem. X, 5.

Digitized by Google

len im Allgemeinen $\frac{1}{2}s + \sqrt{(\frac{1}{2}s)^2 - p}$ und $\frac{1}{2}s - \sqrt{(\frac{1}{2}s)^2 - p}$, Ausdrücke, welche für die geſuchten Zahlen irrationale Werthe geben, wenn nicht $(\frac{1}{2}s)^2 - p$ eine Quadratzahl iſt. Darum fügt Diophant hier, und ebenſo in allen ähnlichen Fällen, als nothwendige Bedingung der Auflöſung hinzu: *δεῖ δὴ τῶν εὑρισκομένων τὸν ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος τοῦ συναμφοτέρου τετράγωνον τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ*, „Es muß das Quadrat der halben Summe der Zahlen deren Product um ein Quadrat übertreffen" das heißt eben, $(\frac{1}{2}s)^2 - p$ muß ein Quadrat ſein. Dadurch erklärt Diophant auch in beſtimmten Aufgaben jede irrationale Auflöſung für unzuläſſig. Xylander hatte ſich nicht wenig auf ſeine Gewandtheit in der Behandlung der von Euklides gelehrten Irrationalgrößen eingebildet und hielt gerade das für eine Berechtigung ſich an die Bearbeitung des großen Arithmetikers Diophant zu wagen; er ſah ſich daher ſehr überraſcht, als er fand, daß dieſer Auctor jene Größen gerade gefliſſentlich vermeiden lehrte.

Ferner betrachtet Diophantus die negative Form der Wurzel als unſtatthaft, wie die meiſten Determinationen des erſten Buchs beweiſen. Dieſe Vernachläſſigung negativer Wurzeln darf uns bei Diophant um ſo weniger wundern, da überhaupt aufgeklärte Anſichten über die Bedeutung derſelben ſich erſt im ſiebzehnten Jahrhundert entwickelten. Nur die Bemerkung will ich hier noch machen, daß die Begriffe von negativen, irrationalen und imaginären Zahlen bei Diophant ganz gleichbedeutend ſind, das heißt, daß eine Wurzel in negativer oder irrationaler Geſtalt dieſem Mathematiker für eine Wurzel in unmöglicher Geſtalt gilt; er erklärt die Auflöſung von Gleichungen, die auf eine negative oder irrationale Wurzel führen, für *ἀδύνατος*. Darum erklärt er IV, 28. die Auffindung von x ſo daß die Formel $8x^3 - x^2 + 8x - 1$ ein Kubus werde, für *ἀδύνατον*, weil die nach ſeinen Mitteln einzig mögliche Art, dieſe Formel zu behandeln, indem man nämlich, um $8x^3$ und -1 verſchwinden zu laſſen, die Wurzel des Kubus gleich $2x - 1$ ſetzt, ein negatives Reſultat giebt, nämlich $x = -\frac{2}{11}$. Ähnlich nennt er V, 2. die Gleichung $4 = 4x + 20$ *ἄτοπος*, weil ſie das Reſutat $x = -4$ geben würde. In den meiſten Fällen, wenn eine Aufgabe auf eine dieſer drei Unſtatthaftigkeiten führen könnte, fügt Diophant derſelben eine Determination, *προσδιορισμός*, hinzu. Dieſe Determinationen, auf welche als die hauptſächlichſten Fundgruben

ſeiner Kenntniß der Zahlentheorie wir noch einmal zurückkommen werden, haben demnach bei Diophant einen dreifachen Zweck:

1. Verhütung eines negativen Reſultats; in dieſe Rubrik gehören die Determinationen zu den Aufgaben **I**, 5. 6. 8. 9. 14. 16. 17. 20. 23. 24. **II**, 6.

2. Verhütung eines irrationalen Reſultats; hieher gehören **I**, 30. 31. 33. **IV**, 38. 40. von denen aber die beiden letzten zu enge ſind.

3. Verhütung der Unmöglichkeit der Ausführung; es iſt hier nicht von imaginären Formen im modernen Sinne des Worts, das heißt, nicht von Quadratwurzeln aus negativen Größen die Rede, welche ſchon durch die zweite Klaſſe von Determinationen zugleich mit verhütet werden, ſondern die beiden hieher gehörigen Determinationen zu **V**, 12. und 14. beziehen ſich auf die Zerlegbarkeit einer Zahl in zwei oder drei Quadratzahlen, gehören aber inſofern nicht unter die zweite Rubrik, weil man das Quadrat einer Irrationalzahl, $\sqrt{a}$, nicht füglich eine Quadratzahl nennen kann; die Unmöglichkeit ſteckt alſo nicht in der Form der Wurzel, ſondern in dem Sinne, den die Worte der Aufgabe in ſich ſchließen. Ähnliche Determinationen zu den Sätzen **V**, 13. 15. 16. hat Diophant vernachläſſigt, obgleich ſie eben ſo nöthig geweſen wären.

Schließlich bemerke ich noch, daß Diophant Brüche von ſeinen Auflöſungen nicht ausſchließt, wie man aus Boſſut's Worten zu folgern geneigt ſein könnte [22]. Die Beſchränkung der Auflöſung der unbeſtimmten quadratiſchen Gleichungen auf ganze Zahlen iſt ein Verdienſt Fermat's und einiger ſeiner Zeitgenoſſen; von den dazu nöthigen Hülfsmitteln und Methoden ſcheint Diophant keine Ahnung gehabt zu haben; ja er macht dieſe Beſchränkung nicht einmal bei

---

22) Hist. T. I. p. 8. 9. Qu'on propose, par exemple, les questions suivantes: *Partager un nombre carré en deux autres nombres carrés etc. etc.;* rien n'est plus facile à résoudre que ces questions, si l'on permet d'employer des nombres quelconques; mais si l'on impose la condition que les nombres cherchés seront rationels; *si l'on veut aussi exclure les nombres fractionnaires:* alors la solution demande de l'adresse. Diophante a trouvé la manière de soumettre *toutes les questions de cette nature* à des règles certaines et exemptes de toute espèce de tâtonnement.

den Gleichungen vom erſten Grade geltend; denn daß er zuweilen, wenn er eine unbeſtimmte Aufgabe durch willkührliche Annahme einer der Unbekannten in eine beſtimmte verwandelt hat, am Ende in den gewonnenen Reſultaten die Nenner wegwirft [23]), gehört nicht hieher.

Als Anhang zu dieſem dem Formellen gewidmeten Kapitel diene hier noch eine Notiz, die ich hinzufüge, um dem Leſer das Vergleichen meiner Citate aus Diophant nicht zu verleiden. Zwiſchen den Aufgaben 12. und 13. des ſechſten Buchs befindet ſich ein Lemma, welches Bachet in ſeiner Ausgabe nicht numerirt hat; Schulz dagegen hat demſelben in ſeiner Überſetzung die Zahl 13. gegeben, woher es kommt, daß von dieſer Zahl an die Nummern in beiden Ausgaben nicht mehr übereinſtimmen. Ich citire nach Bachet; daher haben diejenigen Leſer, welche die Überſetzung vergleichen, von VI, 13—26 zu der Nummer des Satzes 1 zu addiren.

---

23) Z. B. I, 26. 27. 28. III, 16. und öfter.

Achtes Kapitel.

Diophant's Behandlung der Gleichungen.

Bei der Darſtellung der Diophantiſchen Kunſt müſſen wir weſentlich von einander unterſcheiden den Mechanismus der Gleichungen und die analytiſche Behandlung der Aufgaben; jener iſt die Kunſt, aus einer gegebenen Gleichung die Werthe ihrer Wurzeln zu finden, und iſt rein Sache des Calculs, der ſich auf ganz beſtimmte Regeln zurückführen läßt; dieſe dagegen iſt die Kunſt, aus einer gegebenen Aufgabe eine Gleichung zu bilden, oder mit andern Worten, die Auflöſung der Aufgabe auf die mechaniſche Auflöſung einer Gleichung zurückzuführen; dieſe letztere bleibt immer Sache der Überlegung und des Genies, und gerade in ihr offenbart ſich Diophant's größte Stärke. Obgleich nun in der Anwendung beide Künſte, von denen die Auflöſung einer Aufgabe abhängt, in der umgekehrten Reihenfolge ſtattfinden, ſo nehme ich doch hier den äußern Mechanismus der Gleichungen, welcher der Sache nach die ſpätere Operation iſt, voraus, theils weil ſie die einfachere, geregeltere iſt, theils weil gerade ihre größere oder geringere Ausdehnung den Platz beſtimmt, welchen wir einem Schriftſteller im Gebiete der Wiſſenſchaft anzuweiſen haben. Dazu kommt noch, daß ſie in der That der weſentlichere Theil der Algebra iſt; denn jede Aufgabe läßt ſich auf eine Gleichung reduciren, aber nicht jede Gleichung läßt ſich auflöſen; und wohlweislich wählt jeder mathematiſche Schriftſteller nur ſolche Aufgaben, die auf Gleichungen führen, deren Auflöſung in ſeinen Kräften ſteht.

Diophant hatte nicht die Abſicht, ein Lehrbuch der Algebra zu ſchreiben. Darum finden wir die einzelnen Regeln und Beſchränkungen für die Auflöſung gewiſſer Arten von Gleichungen bei ihm nicht in einer ſyſtematiſchen Ordnung bei einander, ſondern wir müſſen uns dieſelben aus dem ganzen Umfange ſeines Werkes mühſam

zuſammenſuchen, um die zerſtreuten Brocken in wiſſenſchaftlicher Zuſammenſtellung dem Leſer zu einer genügenden Anſchaulichkeit zu bringen.

I. Beſtimmte Gleichungen.

Diophant hat die Auflöſung der beſtimmten Gleichungen der erſten beiden Grade vollkommen in ſeiner Gewalt; ein einziges Beiſpiel von einer kubiſchen Gleichung enthält einen ſehr ſpeciellen Fall.

1. Ungemiſchte Gleichungen.

Unter dieſem Namen faſſe ich alle Gleichungen zuſammen, welche nur eine Potenz der Unbekannten enthalten, weil die Auflöſung derſelben immer dieſelbe bleibt, welches auch der Exponent der Unbekannten ſein mag. Auch macht Diophant ſelbſt keinen Unterſchied zwiſchen den Gleichungen erſten Grades und den reinen Gleichungen höherer Grade; ſondern er giebt ohne Rückſicht auf den Exponenten der Unbekannten folgende allgemeine Regel, nach welcher alle Gleichungen der Art aufzulöſen ſind: „Wenn man bei einer Aufgabe auf eine Gleichung kommt, welche auf beiden Seiten dieſelbe Potenz der Unbekannten, aber in verſchiedener Anzahl (mit verſchiedenen Coefficienten) enthält, ſo muß man Gleiches von Gleichem abziehen, bis ein Glied einem Gliede gleich wird. Wenn aber auf einer oder auf beiden Seiten der Gleichung einzelne Glieder negativ ſind (*ἐνελλείπειν*), ſo muß man die negativen Glieder auf beiden Seiten addiren, bis auf beiden Seiten alle Glieder poſitiv geworden ſind; und dann muß man ebenfalls Gleiches von Gleichem abziehen, bis auf jeder Seite der Gleichung ein Glied übrig bleibt [1].“ Nach Anwendung dieſer beiden Operationen, welche genau daſſelbe ſind, was die Araber mit den Namen aljebr und almukâbalah bezeich-

1) **Def. XI.** Μετὰ δὲ ταῦτα ἐὰν ἀπὸ προβλήματός τινος γένηται ὕπαρξις εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς μὴ ὁμοπληθῆ δὲ ἀπὸ ἑκατέρων τῶν μερῶν, δεήσει ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἓν [Ed. ἑνὸς] εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται· ἐὰν δέ πως ἐν ὁποτέρῳ ἐνυπάρχῃ, ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐνελλείψῃ τινὰ εἴδη, δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὰ εἴδη ἐνυπάρχοντα

nen, iſt jede ungemiſchte Gleichung auf die Form $ax^m = b$ reducirt und als aufgelöſt zu betrachten.

Dieſen Gleichungen nun, oder vielmehr den Aufgaben, welche auf Gleichungen dieſer Art führen, ſcheint nach Diophant's eigener Andeutung am Ende der Einleitung das erſte Buch urſprünglich gewidmet geweſen zu ſein. Auch noch in der jetzigen Geſtalt des Werks führen die meiſten Aufgaben dieſes Buchs auf beſtimmte Gleichungen des erſten Grades, einige (29. 34—41.) in der Form $x^2 = ax$, drei (30. 31. 33.) auf die reine quadratiſche Gleichung, was Alles ganz in der Ordnung iſt. Vielleicht nur ſcheinbar iſt die Abweichung von dieſer vorgeſetzten Ordnung, daß die Aufgaben 24—28 unbeſtimmt ſind; denn ſie werden dadurch, daß eine der geſuchten Zahlen gleich von vorne herein willkührlich angenommen wird, ſogleich auf beſtimmte Gleichungen reducirt. Dagegen haben ſich Aufgaben, welche auf beſtimmte reine Gleichungen führen und die alſo in das erſte Buch gehörten, in die folgenden Bücher verirrt, z. B. die Aufgabe II, 18. 19., welche ihrem Inhalte nach unmittelbar hinter I, 25. ſtehen ſollte; ferner die Aufgaben IV, 1. 2. 16. 38. 40., welche auf die Gleichung $Ax^2 = B$ führen; und IV, 42., welche, obgleich mit Hilfe zuſammengeſetzter quadratiſcher Ausdrücke, doch auf die Endgleichung $Ax^2 = Bx$ zurückgeführt wird. Endlich gehören in ihrer jetzigen, aber ganz gewiß verſtümmelten Geſtalt hieher die Aufgaben II, 1—5.

Die große Mehrzahl der Aufgaben des erſten Buchs iſt aber der Art, daß darin mehr als eine Unbekannte geſucht wird, und es ſind davon nur ſieben Aufgaben (7—11. 29. 43.) ausgenommen. Es hat nun, wenn nur zwei Zahlen aus zwei Datis geſucht werden, in der Regel keine Schwierigkeit, mit Hilfe einer der gegebenen Bedingungen beide Unbekannte durch daſſelbe Symbol auszudrücken. Werden aber mehr als zwei Unbekannte geſucht, ſo legt Diophant einen ganz eigenthümlichen Scharfſinn an den Tag durch die Gewandtheit, mit welcher er ſämmtliche Unbekannte auf die einfachſte

---

γένηται· καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν ἓν εἶδος καταλειφθῇ· πεφιλοτεχνήσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποστάσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ. Die Tautologie, welche der letzte Satz enthält, beruht vielleicht auf einer fehlerhaften Leſeart, und auf einem theilweiſen Zuſammenſchmelzen deſſelben mit dem vorletzten.

Weiſe als Functionen des einzigen ihm zu Gebote ſtehenden Symbols darſtellt. Indeß gehört die Erläuterung dieſer ſeiner Methoden, ſo wie der Art, wie er gemiſchte quadratiſche Gleichungen durch eine geſchickte Annahme zu vermeiden weiß, in das folgende Kapitel. In Betreff des letztern Punctes füge ich nur hinzu, daß es begreiflicher Weiſe nicht immer möglich iſt, das Reſultiren einer gemiſchten quadratiſchen Gleichung zu vermeiden, und daß es grundfalſch iſt, wenn von einigen flüchtigen Leſern oder Nachbetern behauptet wird, Diophant löſe keine andern als reine quadratiſche Gleichungen [2]). Daß er die Auflöſung der gemiſchten quadratiſchen Gleichungen gekannt habe, davon wollen wir uns ſogleich vollkommen überzeugen.

2. Gemiſchte quadratiſche Gleichungen.

Da einerſeits, wie ich ſchon oben erwähnt habe, Diophant nirgend die in der elften Definition verſprochene Auflöſung der gemiſchten quadratiſchen Gleichungen lehrt, andrerſeits er aber in ſeinem Vortrage durchweg die Eigenthümlichkeit befolgt, zu der Gleichung, auf welche ihn die Annahme geführt hat, allemal ſogleich und ohne weitere Deduction die Wurzel anzugeben, ſo würden wir nicht im Stande ſein zu beurtheilen, ob er die geregelte Formel für die Wurzeln dieſer Gleichungen gekannt habe, oder ob ſeine Auflöſung bloß auf Verſuchen beruhe, wenn nicht ein anderer Umſtand, den wir

---

2) So ſchreibt Reimer (Boſſut's Geſch. d. Mathem. I. S. 55): „Aber Diophant vermeidet dieſe (die gemiſchten quadrat. Gleich.) mit abſichtlicher Kunſt und weiß hier immer reine quadratiſche Gleichungen zu erhalten. Was ihm alſo von der Auflöſung zuſammengeſetzterer Gleichungen bekannt geweſen iſt, *läßt ſich nicht angeben*; zumal da die letzten ſieben Bücher ſeines Werks, die wahrſcheinlich die verwickeltſten Aufgaben enthielten, verlohren gegangen ſind.“ — Ähnlich Klügel (Mathem. Wörterbuch Th. I. S. 31): „Da er aber die unbekannten Größen ſo wählt, und die Auflöſung ſo einrichtet, daß er alle Bedingungen in Gleichungen vom erſten Grade oder höchſtens einfache quadratiſche Gleichungen bringt, *ſo kann man nicht wahrnehmen*, was ihm von der Auflöſung zuſammengeſetzter Gleichungen, der eigentlichen Algebra, bekannt geweſen ſei.“ Indeß widerſpricht Klügel ſich ſelbſt, indem er ebend. S. 177. 178. ſagt: „Sein großes Werk, wovon nur die erſte Hälfte vorhanden iſt, enthält die Lehre von den Gleichungen des erſten und zweiten Grades.“ Ein Ausſpruch iſt ſo unwahr, wie der andere. Diophant's Werk trägt nicht die Lehre von den Gleichungen vor.

ſogleich erwähnen wollen, uns hier zu Hilfe käme. Zuvor aber einige Beiſpiele der erſten Art. In der Aufgabe IV, 23. leſen wir als Reſultat einer Operation: δύναμις ἄρα α̅ ἴση ςς^{οῖς} δ̅ λείψει μ^{ο̃} δ̅, καὶ γίνεται ὁ ς^{ό} β̅; das heißt, in unſere Sprache überſetzt: „es iſt alſo $x^2 = 4x - 4$ und x wird $= 2$." Ähnlich ſchreibt er VI, 6.: καὶ γίνεται . . . δ^{ῦ} π̅δ̅ ςς^{οὶ} ζ̅. ταῦτα ἴσα μ^{ο̃} ζ̅, ὅθεν ὁ ἀριθμὸς εὑρίσκεται α̅^{δ̃}; das heißt: $84x^2 + 7x = 7$, woraus man findet $x = \frac{1}{4}$. Ebenſo VI, 7.: $84x^2 - 7x = 7$, „und die Zahl wird $\frac{1}{3}$;" ferner VI, 9.: $630x^2 - 73x = 6$, „woraus die Zahl gefunden wird $\frac{6}{35}$." Ja immer giebt er den Werth der Unbekannten gar nicht einmal an, ſondern begnügt ſich bemerklich zu machen, daß die Auflöſung möglich ſei, d. h., daß das Reſultat rational werde; z. B. VI, 8. $630x^2 + 73x = 6$, καὶ γίνεται ὁ ς^{ὸ} ῥητός, „und die Zahl wird rational;" wo es eben ſo einfach geweſen wäre zu ſagen: und die Zahl wird $\frac{1}{18}$.

Soweit könnte Diophant's Auflöſung auf bloßer Empirik beruhen. Aber ein anderes Beiſpiel möge uns beweiſen, daß er auch die Wurzel näherungsweiſe zu finden wußte, wenn ſie nicht rational ausfällt. In der Aufgabe V, 33. kommt es darauf an, x ſo anzunehmen, daß x größer als $\frac{x^2 - 60}{8}$ und kleiner als $\frac{x^2 - 60}{5}$, oder, was daſſelbe iſt, daß $x^2 - 60$ größer als $5x$ und kleiner als $8x$ werde [3]). Nun heißt es: ἐπεὶ οὖν δ^{ῦ} α̅ λείψει μ^{ο̃} ξ̅ μείζων ἐστὶν ςς^{ῶ} ε̅, κοιναὶ προσκείσθωσαν μ^{ο̃} ξ̅, ὥστε καὶ δ^{ῦ} α̅ μείζων ἐστὶν ςς^{ῶ} ε̅ μ^{ο̃} ξ̅· ὥστε καὶ δύναμις α̅ ἴση ἐστὶν ςς^{ῶ} ε̅ καὶ ἀριθμῷ τινὶ μείζονι μ^{ο̃} ξ̅· ὥστε δεήσει τὸν ἀριθμὸν μείζονα εἶναι ἢ μὴ ἐλάσσονα μ^{ο̃} ι̅α̅. Πάλιν ἐπεὶ ἡ δύναμις α̅ λείψει μ^{ο̃} ξ̅ ἐλάσσων ἐστὶν ςς^{ῶ} η̅, κοιναὶ προσκείσθωσαν μ^{ο̃} ξ̅, ὥστε δ^{ῦ} α̅ ἴση ἐστὶν ςς^{ῶ} η̅ καὶ ἀριθμῷ τινὶ ἐλάττονι μ^{ο̃} ξ̅, ὅθεν δεῖ τὸν ςς^{ὸν} εὑρίσκεσθαι μὴ μείζονα μ^{ο̃} ι̅β̅. Das heißt kurz: Da $x^2 - 60 > 5x$, oder $x^2 > 5x + 60$, ſo iſt x nicht kleiner 11. Da ferner

3) Ich werde hier und im Folgenden, ſobald es ſich nicht um die Diophant eigenthümliche Darſtellungsweiſe, ſondern nur um die Sache handelt, der beſſern Anſchaulichkeit wegen die Gleichungen und Formeln immer in der uns geläufigen Weiſe bezeichnen, und mich der Diophantiſchen Zeichen nur bedienen, wenn es darauf ankommt, ſeine eigenthümliche Denk= und Vorſtellungsweiſe wiederzugeben.

$x^2 - 60 < 8x$ oder $x^2 < 8x + 60$, ſo iſt x nicht größer als 12. Unterſuchen wir die Wurzeln beider Gleichungen genauer, ſo finden wir aus der erſten $x > \frac{5 + \sqrt{265}}{2}$ oder $x > 10{,}6394$, aus der zweiten $x < 4 + \sqrt{76}$ oder $x < 12{,}7178$. Demnach kann allerdings, Diophant's Reſultate zuwider, x kleiner als 11 und größer als 12 werden; aber ich muß bemerken, daß Diophant unter dem Ausdrucke, die Zahl darf nicht größer ſein als z. B. 12, immer ſoviel verſteht als, ſie darf nicht ſo groß als die nächſt größere ganze Zahl, alſo nicht 13 ſein. Wir ſehen alſo aus dieſem Beiſpiele, daß Diophant Mittel in Händen hatte, auch die irrationalen Wurzeln quadratiſcher Gleichungen, welche ſich nicht verſuchsweiſe finden laſſen, durch Näherung anzugeben.

Aber wir wiſſen nicht bloß, daß Diophant die quadratiſchen Gleichungen aufzulöſen verſtand, wir können ſogar ganz genau die Formel oder vielmehr die Regel angeben, nach welcher er die Wurzel bildete; natürlich iſt dieſe Regel nicht verſchieden von derjenigen, welche wir anwenden, und ſie weicht nur in unweſentlichen Puncten von der unſrigen ab. Wenn uns nämlich eine Gleichung von der Form $mx^2 + px = q$ gegeben iſt, ſo pflegen wir die ganze Gleichung, bevor wir ſie auflöſen, durch m zu dividiren; dann erſt wenden wir die Regel an: addire zu dem abſoluten Gliede das Quadrat des halben Coefficienten der Unbekannten, ziehe aus dieſer Summe die Quadratwurzel, von der Quadratwurzel ſubtrahire den halben Coefficienten der Unbekannten, ſo iſt die Differenz die Unbekannte. Indem ſich nun die Wurzel x darſtellt in der Form $-\frac{p}{2m}$ $\pm \sqrt{\frac{p^2}{4m^2} + \frac{q}{m}}$, ſo fällt in die Augen, daß man hier häufig mit Brüchen zu rechnen hat. Wahrſcheinlich um dieſe Beſchwerlichkeit zu vermeiden, ſcheint Diophant die gegebene Gleichung nicht durch m dividirt, ſondern mit m multiplicirt zu haben; indem man nun hat $m^2x^2 + pmx = qm$, kann man mx als die Unbekannte anſehen, woraus ſich dann ergiebt $mx = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mq}$ und $x = \frac{\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mq}}{m}$. Es leuchtet nicht ganz klar ein, ob Diophant dieſen Weg eingeſchlagen hat; Thatſache aber iſt, daß er die Wurzel immer in der zuletzt hingeſchriebenen Geſtalt betrachtet, die allerdings für die Praxis in den meiſten Fällen bequemer iſt

als die zuerſt gegebene. Nur muß ich geſtehen, daß ich, von Diophant's Standpunct betrachtet, in die Formel, wie ich ſie hingeſchrieben, einen Fehler hineingebracht habe. Diophant betrachtet nämlich durchaus nur eine Wurzel der quadratiſchen Gleichung, indem er den negativen Werth der Quadratwurzel nicht zu kennen ſcheint. Dieſe Beſchränkung darf uns nicht wundern in ſolchen Fällen, wenn eine der beiden Wurzeln negativ wird, alſo in den Gleichungen von der Form $x^2 \pm px = + q$; die Erſcheinung iſt aber auffallend in dem dritten Falle $x^2 - px = - q$, in welchem beide Wurzeln, wenn ſie reell ſind, poſitiv werden; in dieſem Falle betrachten auch ſchon die Araber [4]), ſowie die älteſten Italiener [5]) beide Wurzeln. Weicht alſo hierin Diophant von ſeinen Nachfolgern ab, ſo finden wir auf einer andern Seite ſogleich wieder einen Berührungspunct zwiſchen Beiden. Ich habe im zweiten Kapitel S. 48. geſagt, daß die Araber die quadratiſchen Gleichungen vor der Auflöſung auf eine kanoniſche Form bringen, in welcher alle Glieder poſitiv ſind. In denjenigen Fällen nun, in welchen die Gleichung eine rationale Auflöſung giebt, ſcheint Diophant keine Rückſicht auf irgend eine ſolche Form derſelben zu nehmen, ſondern zieht geradezu aus der Geſtalt, welche ſich zunächſt aus der Rechnung ergiebt, die Wurzel, wie die obigen Beiſpiele $x^2 = 4x - 4$, $84x^2 - 7x = 7$, $630x^2 - 73x = 6$ beweiſen. In den Fällen dagegen, wenn er über die Form der Wurzel eine Unterſuchung anſtellen oder die irrationale Wurzel finden will, ſieht er ſich veranlaßt, die Gleichung auf eine beſtimmte regelrechte Geſtalt zu reduciren, und zwar ordnet er dieſelbe ebenſo wie nach ihm die Araber, daß er nämlich alle

4) **Mohammed ben Musa** p. 7. „Wenn eine Aufgabe dich auf dieſen Fall ($x^2 + q = px$) führt, ſo verſuche ihre Auflöſung durch Addition; wenn aber dieſe nicht paſſend iſt, ſo iſt's die durch Subtraction gewonnene ohne Zweifel; dieſer Fall geſtattet nämlich ſowohl die Addition als die Subtraction, was in den andern Fällen nicht ſtattfindet.“ Vergl. **Behâ-eddin** p. 354—357. **Nejmeddîn Khân** p. 459 sqq.

5) Z. B. ſchon Leonardo Bonacci von Piſa. Nach Coſſali (Orig. I, 3.) ſagt er über den Fall $x^2 + q = px$ Folgendes: Wenn $\frac{1}{4}p^2 < q$, ſo iſt die Gleichung unmöglich, wenn $\frac{1}{4}p^2 = q$, ſo iſt $x = \frac{1}{2}p$ (beide Bemerkungen finden ſich auch bei Moh. ben Muſa a. a. O.), wenn $\frac{1}{4}p^2 > q$, ſo iſt $x = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$ oder auch $x = \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$. **Et sic si non solvetur quaestio cum diminitione, solvetur cum additione.**

alle Glieder poſitiv darſtellt. So haben wir oben in dem Beiſpiel V, 33. geſehen, daß er die Gleichungen oder vielmehr die Ungleichheiten $x^2 - 60 > 5x$ und $x^2 - 60 < 8x$, um die Wurzeln zu finden, zuvor auf die poſitiven Formen $x^2 > 5x + 60$, $x^2 < 8x + 60$ reducirt. Daß dieſe Form der Gleichung diejenige geweſen, für welche er die Regel der Auflöſung in einem der verlorenen Bücher gegeben hat, dafür ſprechen nicht bloß die ſchon erwähnten und noch anzuführenden Beiſpiele, ſondern auch der Ausdruck in der elften Definition, wo von den quadratiſchen Gleichungen die Rede iſt. Nachdem er geſagt hat, man ſolle die negativen Glieder auf beiden Seiten addiren und Gleiches von Gleichem ſubtrahiren bis man dahin gekommen iſt, daß ein Glied einem Gliede gleich wird, fährt er ſo fort: *ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται*, „ſpäterhin werde ich dir zeigen, wie der Fall aufzulöſen iſt, wenn zwei Species gleich einer Species übrig bleiben.“ Offenbar ſetzt der Ausdruck *καταλειφθέντων*, der auch in der vorhergehenden Regel gebraucht war, voraus, daß von einer Gleichung die Rede iſt, aus welcher auf dem eben gelehrten Wege die negativen Glieder entfernt ſind. Demnach ergiebt ſich, daß wir auch bei Diophant, da er ebenfalls den Fall $x^2 + px + q = o$ vernachläſſigt, drei Normalformen der quadratiſchen Gleichung zu unterſcheiden haben; und wirklich finden ſich die Auflöſungen jedes dieſer Fälle, jedoch für den erſten nicht ganz vollſtändig, in ſeinem Werke gelegentlich zerſtreut angegeben. Wir wollen ſie nach der Reihe durchnehmen.

Erſter Fall. $mx^2 + px = q$; $x = \frac{-\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mq}}{m}$.

Beiſpiel VI, 6. Es wird in der Aufgabe gefordert, ein rechtwinkliges Dreieck zu ſuchen, ſo daß die Summe des Inhalts und einer Kathete (Alles natürlich bloß als Zahl gedacht) einer gegebenen Zahl gleich ſei. Diophant nimmt an, die gegebene Zahl ſei 7, und das Dreieck ſei der Form nach gegeben, und habe die Seiten $3x$, $4x$, $5x$; ſo iſt ſein Inhalt $6x^2$, alſo führt die Aufgabe auf die Gleichung $6x^2 + 3x = 7$. Wollte Diophant nun dieſe Gleichung auflöſen, ſo würde er für x einen irrationalen, alſo dem Sinne der Aufgabe nach unſtatthaften Werth erhalten, darum unterſucht er, wie er ſtatt der Coefficienten 3, 4, 5, welche die Form des

Dreiecks von vorne herein als gegeben darſtellen, andere hätten annehmen müſſen, damit dieſe Gleichung eine rationale Wurzel gäbe. Er fährt darum ſo fort: Wenn man nun den halben Coefficienten von x ins Quadrat erhebt ($p = 3$, $\frac{1}{4}p^2 = \frac{9}{4}$) und dazu das Product der Zahl 7 und des Coefficienten von x^2 addirt ($mq = 42$), ſo müßte die Summe ein Quadrat werden. Das trifft aber nicht zu. [καὶ δεῖ τῶν ἀριθμῶν τῷ ἡμίσει ἐφ' ἑαυτὸ προσθεῖναι τὰς δυνάμεις (ἑπτάκις γενομένας) καὶ ποιεῖν τετράγωνον· οὐ ποιεῖται δέ]. In dieſen Worten nun iſt uns die Geſtalt des Theils der Wurzel, der ſich hinter dem Wurzelzeichen befindet, vollkommen gegeben.

Zweiter Fall. $mx^2 = px + q$; $x = \frac{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + mq}}{m}$.

Beiſpiel IV, 45. giebt uns zunächſt eine Ungleichheit, die auf dieſen Fall führt. Es ſoll nämlich $2x^2 > 6x + 18$ ſein. Diophant dividirt dieſe Gleichung nicht durch 2, weil dann der Coefficient von x, deſſen Hälfte er braucht, ungerade werden würde. Er ſagt: „Um nun hier eine Vergleichung anzuſtellen, ſo erheben wir den halben Coefficienten von x ins Quadrat, und wir erhalten 9; nun multipliciren wir den Coefficienten von x^2 mit der beſtimmten Zahl 18, das giebt 36; dazu addiren wir 9, giebt 45, und davon iſt die Wurzel nicht kleiner als 7 (das heißt, wie ich oben erwähnt habe, 6 iſt zu klein). Dazu addiren wir den halben Coefficienten von x (giebt 10), und dividiren durch den Coefficienten von x^2, ſo finden wir, daß x nicht kleiner als 5 ſein dürfe." Hier iſt uns alſo die vollſtändige Form der Wurzel gegeben, aus welcher Diophant's Verfahren unzweifelhaft einleuchtet.

Wir können aber auch für dieſen Fall eine wirkliche Gleichung beibringen. In der Aufgabe IV, 33. ſagt Diophant über die Gleichung $3x + 18 = 5x^2$: „und es findet keine Auflöſung in rationalen Zahlen ſtatt; aber 5 iſt eine um 1 vermehrte Quadratzahl; dieſe muß, mit 18 multiplicirt und um das Quadrat des halben Coefficienten von x, oder um $2\frac{1}{4}$ vergrößert, ein Quadrat geben." Dieſes Raiſonnement giebt uns wieder nur Licht über die Größe unter dem Wurzelzeichen.

Dritter Fall. $mx^2 + q = px$; $x = \frac{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - mq}}{m}$.

Beiſpiel **VI**, 24. $\frac{1}{x^2} + 196x^2 - 336x - \frac{24}{x} + 172 = 196x^2 + \frac{1}{x^2}$. „Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, ziehe Gleiches von Gleichem ab, und multiplicire Alles mit x, ſo erhält man $336x^2 + 24 = 172x$. Dieſe Gleichung aber läßt ſich nicht auflöſen, wenn nicht das Quadrat des halben Coefficienten von x ($\frac{1}{4}p^2 = 7396$), nachdem man das Product der 24 Einheiten und des Coefficienten von x^2 ($24 \cdot 336 = 8064$) davon abgezogen hat, ein Quadrat wird.“ Diophant nimmt hier keine Rückſicht darauf, daß die Wurzel nicht nur nicht rational, ſondern ſogar imaginär wird; genug daß ſie nicht rational ausfällt, um die Gleichung als unſtatthaft zu verwerfen.

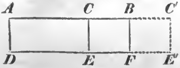
Auch für dieſen Fall ſind wir im Stande, ein an einer Ungleichheit vollſtändig durchgeführtes Beiſpiel beizubringen. **V**, 13. handelt es ſich darum, x ſo anzunehmen, daß $\frac{6x}{x^2 + 1}$ größer als $\frac{17}{12}$, alſo $17x^2 + 17$ kleiner als $72x$ wird. „Man erhebe den halben Coefficienten von x ins Quadrat, dieſes giebt 1296, davon ziehe man das Product der beſtimmten Zahl 17 und des Coefficienten von x^2 ab, alſo 289, ſo bleibt 1007. Davon iſt die Quadratwurzel nicht größer als 31 (das heißt, wie oben, die nächſte ganze Zahl, 32 wäre zu groß); dazu addire man den halben Coefficienten von x, ſo erhält man die geſuchte Zahl nicht größer als 67; endlich dividire man mit dem Coefficienten von x^2, ſo wird x nicht größer als $\frac{67}{17}$.“ Auch dieſes Beiſpiel giebt eine unzweifelhafte Gewähr für die oben aufgeſtellte Form der Wurzel.

In formeller Beziehung bemerke ich nur noch, daß Diophant den Begriff, den wir durch das Wort Coefficient bezeichnen, entweder durch πλῆθος, Anzahl, oder gar nicht ausdrückt; ſo ſagt er **IV**, 45.: *ποιοῦμεν τῶν ςς̃ τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτό*, das heißt: „wir erheben den halben Coefficienten von x (wörtlich die Hälfte der Zahlen) auf das Quadrat;“ *καὶ τὰς δ^υ β̄ ἐπὶ τὰς μ^ο ιη̄*, und multipliciren den Coefficienten von x^2, 2, in die 18 Einheiten,“ wörtlich: und multipliciren die 2 Quadrate in die 18 Einheiten. Dagegen heißt es **III**, 18.: *τὸ πλῆθος τῶν ςς̃ καὶ τῶν μονάδων.*

Die angeführten Beiſplele ſtellen alſo die Thatſache feſt, daß Diophant die allgemeine Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen

Digitized by Google

gekannt habe. Es iſt nun mehrfach die Frage aufgeworfen worden, wie man zu dieſer Auflöſung gelangt ſei. Montucla und Coſſali leiten die Erfindung aus Betrachtung geometriſcher Conſtructionen her. Allerdings läßt ſich nicht leugnen, daß die Alten ſeit Euklides und vielleicht früher ſchon die Formeln $x^2 \pm px = q$, $px - x^2 = q$, geometriſch betrachtet, auflöſen konnten. Der erſte Fall, $x^2 + px = q$, ſo dargeſtellt $x(x + p) = q$ würde geometriſch heißen: eine gegebene gerade Linie p um ein Stück x zu verlängern, ſo daß das Rechteck aus der ganzen verlängerten Linie $p + x$ und dem angeſetzten Stücke x einem gegebenen Raume q gleich werde. Der zweite Fall $x(x - p)$ unterſcheidet ſich von dem erſten blos darin, daß hier nicht die Verlängerung, ſondern die zuſammengeſetzte Linie gleich x geſetzt iſt. Der dritte Fall dagegen $px - x^2$ oder $x(p - x) = q$ befiehlt eine gegebene gerade Linie p in zwei Abſchnitte x, $p - x$ zu theilen, ſo daß das Rechteck derſelben einem gegebenen Raume q gleich ſei. Alle dieſe Aufgaben waren den alten Geometern bekannt und werden mehrfach von ihnen angewendet. Ganz direct ſchon findet ſich die geometriſche Auflöſung derſelben in der noch allgemeineren Geſtalt $mx^2 \pm px = q$, $px - mx^2 = q$ in Euklid's Elementen VI, 28. 29., wo dieſe Aufgaben, geometriſch ausgedrückt, ſo lauten: „An einer gegebenen geraden Linie, p, ein einer gegebenen geradlinigen Figur, q, gleiches Parallelogramm zu entwerfen, deſſen Überſchuß (in dem erſten) oder Ergänzung (in dem zweiten Falle) einem gegebenen Parallelogramm ähnlich iſt.“ Dieſes letzterwähnte Parallelogramm wird ein Quadrat, wenn der Coefficient m in obiger Formel 1 iſt. Der geometriſche Sinn der Aufgabe iſt folgender:



An der gegebenen Linie $AB = p$ ſoll man ein Rechteck AE, AE' ſo anlegen, daß $AE = q$, $BE \backsim mc^2$, oder $CB : BF = m : 1$ werde. Nennt man alſo AD x, ſo iſt $BC = mx$, $AC = p - mx$, $AC' = p + mx$, demnach das Rechteck $AE = x(p - mx)$, $AE' = x(p + mx)$; und es iſt klar, daß aus

dieſen beiden Euklidiſchen Aufgaben ſich unmittelbar die geometriſche Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen ergiebt. Auf dieſe Aufgaben nun will Montucla [6]) die algebraiſche Auflöſung dieſer Gleichungen zurückgeführt wiſſen. Dieſelbe geometriſche Wahrheit nur etwas anders dargeſtellt, finden wir noch an einer andern Stelle der Euklidiſchen Werke wieder, nämlich Data 58. 59., welche den Lehrſatz ausſprechen: „Wenn ein gegebener Raum *AE* an eine gegebene Linie *AB* angefügt wird, aber um eine der Geſtalt nach gegebene Figur *BE* herüberragt oder zurückbleibt, ſo ſind die Seiten *BC*, *BF* des Überſchuſſes oder der Ergänzung gegeben.“ Das heißt, wenn $x(p+mx)=q$, ſo iſt x und mx gegeben. Faſt noch directer wird uns die Hinweiſung auf die quadratiſchen Gleichungen gegeben in den Sätzen 84. 85. der Data: „Wenn zwei gerade Linien einen gegebenen Raum unter einem gegebenen Winkel einſchließen, und ihr Unterſchied oder ihre Summe gegeben iſt, ſo ſind die Linien ſelbſt gegeben.“ Das heißt, wenn $xy=q$, $x\pm y=p$, ſo ſind x und y gegeben. Dieſe Sätze der Data macht Coſſali [7]) als Fundament für die Erfindung der algebraiſchen Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen geltend. Der zuletzt angeführte Satz würde ſogar beide Wurzeln der

6) Hist. d. Math. T. I. p. 413. Lorsque j'al dit, que les *Arabes*, et avant eux *Diophante* avoient trouvé la résolution des équations du second degré, je n'ai entendu parler quo de cette résolution en forme analytique, semblable à celle que nous employons dans notre algèbre; car il faudroit avoir une idée bien fausse de la géométrie des anciens, pour penser que des problèmes qui mènent au second degré, leur fussent inaccessibles. On trouve cette résolution énoncée en d'autres termes, dans les Elémens d'Euclide, et notamment dans les propositions 27 et 28 (nach den gewöhnlichen Ausgaben 28. 29) du VI, livre, propositions qui, par cette raison, ont été mal — à — propos omises par divers éditeurs d'Euclide qui ne les ont pas entendues et en ont méconnu l'usage.

7) Origine dell Alg. T. I. p. 91. Io mi do a credere, che non possa alcuno nei Dati LVIII.LIX (di Euclide) non iscorgere sotto geometrica forma tutta l'arte della risoluzione delle equazioni di secondo grado, e non ravvisare nei Dati 84. 85 due delle applicazioni di essa anche appresso di noi ordinarie. Nello spazio pertanto dei secoli che passarono da Euclide a Diofanto qual cosa più facile, che alcuno trasportasse dal geometrico all' aritmetico i Dati 58. 59 di Euclide, e così la soluzione stabilisse delle equazioni di secondo grado?

Gleichung gegeben haben, wenn man bedenkt, daß, wenn x und y die beiden Werthe für z in der Gleichung $z^2 + pz = q$ ſind, dann $x + y = p$, $xy = q$ iſt. Da aber Diophant nur eine Wurzel der quadratiſchen Gleichung anerkennt, ſo folgt daraus wohl, daß er die Auflöſung derſelben aus dieſem Satze nicht entnommen hat. Deßungeachtet läßt Bachet ſich durch einen falſch verſtandenen Ausdruck im Texte Diophant's verleiten zu glauben, daß Diophant ſelbſt die Aufgaben, aus der gegebenen Summe oder Differenz und dem Produkte zweier Zahlen die Zahlen zu finden, als Quelle für die Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen betrachte. Die hieher gehörigen Stellen aus Diophant ſind die Aufgaben 30. 31. und 33. des erſten Buchs, folgenden Inhalts:

Aufg. 30. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe und Product gegebenen Zahlen gleich ſind. — Es muß aber, wenn man von dem Quadrat der halben Summe das Produkt abzieht, eine Quadratzahl übrig bleiben.

Aufg. 31. Zwei Zahlen zu finden, ſo daß ihre Summe und die Summe ihrer Quadrate gegebenen Zahlen gleich ſind. — Es muß aber, wenn man von der doppelten Summe der Quadrate das Quadrat der Summe abzieht, eine Quadratzahl übrig bleiben.

Aufg. 33. Zwei Zahlen zu finden, ſo daß ihr Unterſchied und ihr Product gegebenen Zahlen gleich ſind. — Es muß aber das vierfache Product nebſt dem Quadrat des Unterſchiedes zuſammen eine Quadratzahl ausmachen.

Hinter jede der drei Determinationen, welche den Zweck haben, die Auflöſung rational zu machen, ſetzt Diophant die Worte: ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν. Dieſe Worte, welche ganz einfach ſagen: „das läßt ſich aber bewerkſtelligen,“ hat Bachet inſofern falſch verſtanden, als er dem Adjectiv πλασματικόν einen tranſitiven Sinn giebt und meint, es bezeichne etwas, woraus etwas Anderes gebildet werden könne. Weil nun aber in der oben angedeuteten Weiſe die Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen nur aus den Aufgaben 30. und 33., nicht aus der Aufgabe 31. hervorgeht, ſo hielt Bachet die Worte ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν hinter der Determination zu dieſer Aufgabe für unächt, und ſchaltet ſie in Sternchen, ſein Corruptionszeichen, ein; in ſeiner Lateiniſchen Überſetzung behält er an allen drei Stellen das Griechiſche Wort bei und ſagt: **Est autem hoc Plasmaticum.** Der Wahrheit näher, wenn auch nicht ganz richtig, überſetzt Xylander: **Hoc autem ut effictum**

aliunde, was Bachet natürlich ganz verwirft. Aber hören wir ihn ſelbſt in ſeinem Commentar zur dreiunddreißigſten Aufabe: Superest ut explicem verba illa ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν, quae tum huic quaestioni, tum trigesimae et trigesimae primae adjecta sunt statim post conditionem, quaeque hoc loco dilucidanda recepi. Prius tamen monendus est lector, nec Scholiastem, nec Xilandrum mentem Diophanti assequutum esse, quod cuilibet fiet manifestum qui ea quae uterque ad trigesimam commentus est legere voluerit. Sane non vacat in eorum nugis refellendis diutius immorari. Praeterea Xilandes verba ipsa male reddidit, nam Plasmaticum, interpretatus est, effictum aliunde; cum potius significet id a quo aliud quippiam effingi et plasmari potest. Ego itaque nil aliud voluisse Diophantum ajo, quam indicare ex hujusmodi quaestionum solutione, seu ex conditionibus adjectis, vel ex canonibus inde deductis formari et plasmari quodammodo regulas illas quas vocant compositas, cum scilicet ex tribus infimis speciebus, duae uni aequales reperiuntur, seu ut loquitur Franciscus Vieta, regulas de quadrato affecto sub latere [8]). Etenim prima et secunda illarum regularum, ab hac ipsa quaestione trigesima tertia facile deducuntur. Tertia vero pendet omnino a trigesima. Quamobrem cum a trigesima prima nulla formetur hujusmodi regula, non dubito eadem verba ibi temere inculcata esse, ab ipso scilicet Scholiasta, vel imperito amanuensi ex aliis quaestionibus eo translata. Es folgt nun in tyronum gratiam eine weitläufige Auseinanderſetzung des Zuſammenhangs, in welchem jene Diophantiſchen Aufgaben mit der Auflöſung der verſchiedenen Fälle der quadratiſchen Gleichungen ſtehen, womit ich meine Leſer verſchonen will.

Dieſe Bachet'ſche Hypotheſe, ebenſo wie die Montucla'ſche und und Coſſali'ſche lehren, wie die Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen hätte gefunden werden können. Da wir aber gar keine Andeutung beſitzen, auf welchem Wege dieſe Erfindung wirklich gemacht

---

8) Regulae compositae heißen bei den alten Italienern die drei Fälle der gemiſchten quadratiſchen Gleichung; tres infimae species ſind die bekannte Zahl (Coefficient von x^0) und die erſte und zweite Potenz der Unbekannten. Über Vieta's horrible Kunſtſprache werde ich ſpäterhin im Zuſammenhange ſprechen.

worden, ſo müſſen wir die Sache dahingeſtellt ſein laſſen und uns einſtweilen mit dem negativen Reſultate begnügen: Wir wiſſen weder, ob die Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen, welche Diophant kennt, von ihm erfunden oder ob ſie ſchon früher vorhanden geweſen, noch, auf welchem Wege er oder ſeine Vorgänger zu dieſer Erfindung gelangt ſind. Es hat indeß die Annahme Manches für ſich, daß die bei Diophant erſcheinende algebraiſche Regel eine bloße Überſetzung geometriſcher Conſtructionen in die arithmetiſche Sprache ſei.

3. Kubiſche Gleichungen.

Das einzige Beiſpiel von der Auflöſung einer kubiſchen Gleichung, welches Diophant uns darbietet, iſt weit entfernt, den Italienern des ſechszehnten Jahrhunderts ihren wohlverdienten Lorbeer entreißen zu wollen. In der Aufgabe **VI**, 19. handelt es ſich darum, eine Kubikzahl zu finden, die um 2 größer als eine Quadratzahl iſt. Diophant ſetzt die Wurzel der Kubikzahl $x-1$, die Wurzel der Quadratzahl $x+1$, durch welche ſehr willkührliche Annahme er auf eine kubiſche Gleichung geführt wird, deren Auflöſung auch dem Ungeübteſten in die Augen ſpringt. Es iſt der Annahme zufolge

$$(x-1)^3 = (x+1)^2 + 2, \text{ das heißt}$$
$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3$$

Zwar disponirt Diophant dieſe Gleichung nicht weiter, ſondern fügt ihr unmittelbar die Auflöſung bei in den Worten ὅϑεν ὁ ς εὑρίσκεται μ^ο δ. Dieſes Reſultat ergiebt ſich aber wirklich ſogleich von ſelbſt, wenn wir die Gleichung auf Diophantiſche Weiſe, das heißt ſo ordnen, daß alle Glieder poſitiv werden. Wir erhalten dann

$$x^3 + x = 4x^2 + 4$$
$$\text{oder} \quad x(x^2+1) = 4(x^2+1)$$
$$\text{folglich} \quad x = 4$$

Von den beiden andern Wurzeln, $x = \pm\sqrt{-1}$, welche ſich eben ſo unmittelbar ergeben, iſt natürlich hier nicht die Rede.

In der folgenden Aufgabe, in welcher eine Kubikzahl geſucht wird, die um 2 kleiner iſt als eine Quadratzahl, ſchlägt Diophant einen andern Weg ein.

Aus einem einzigen, überdieß ſo unbedeutenden Datum ſind wir natürlich nicht im Stande, zu beurtheilen, wie weit unſerm Auctor die Behandlung höherer als quadratiſcher Gleichungen bekannt geweſen iſt.

II. Unbeſtimmte Gleichungen.

Diophant behandelt, wie ich oben ſchon einmal erwähnt habe, nirgend unbeſtimmte Gleichungen des erſten Grades. Diejenigen Aufgaben des erſten Buchs, welche auf eine ſolche Gleichung führen würden, werden von ihm dadurch, daß eine der geſuchten Zahlen von vorne herein beliebig als gegeben angenommen wird, ſogleich in beſtimmte verwandelt. Man vergleiche zu dem Ende die Aufgaben 14. und 25 — 28. des erſten Buchs. Es mag dieſer mangelnde Theil ſeiner Lehre zu den zwiſchen dem erſten und zweiten Buche wahrſcheinlich ausgefallenen Stücken gehört haben. Indeß läßt ſich eine andere Betrachtung, welche vermuthen läßt, daß Diophant dieſe Gleichungen gar nicht behandelt habe, nicht ganz verwerfen. Wie es nämlich bei den unbeſtimmten quadratiſchen Gleichungen ſich allein darum handelt, ein rationales Reſultat zu Wege zu bringen, ſo hat die Auflöſung der unbeſtimmten Gleichungen des erſten Grades nur inſofern Sinn, als es darauf ankommt, ein Reſultat in ganzen Zahlen zu finden. Wie die Auflöſung jener aufhört, eine Kunſt zu ſein, wenn man irrationale Werthe ſtatuirt, ſo geſchieht daſſelbe mit dieſen, wenn man ſich mit Brüchen begnügt. Aber eine ſolche Bevorzugung ganzer Zahlen, eine ſolche Ausſchließung der Brüche aus ſeinen Reſultaten ſcheint unſerm Auctor durchaus fremde geweſen zu ſein. Wir finden wenigſtens in dem Vorhandenen nirgend eine Spur, daß er ſich dieſe Bedingung geſtellt habe. Ich will indeß auf dieſen Schluß, der leicht das Gepräge eines logiſchen Cirkels an ſich tragen könnte, keinen weiteren Werth legen. Wir betrachten deshalb ſogleich

1. die unbeſtimmten Gleichungen des erſten Grades.

Dieſe Gleichungen erſcheinen bei Diophant immer in der Geſtalt, daß irgend eine oder zwei, nie mehre Funktionen der Unbe-

kannten von der Form $Ax^2 + Bx + C$ zu einem rationalen Quadrat gemacht werden ſollen. Demnach haben wir hier mit der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = y^2$, oder mit zwei Gleichungen derſelben Form zu thun. Es unterſcheiden ſich hier alſo ganz natürlich zwei Fälle, die einfache und die doppelte Gleichung.

a) Einfache Gleichung, *aequatio simplex.*

Je nachdem einer oder mehre der Coefficienten A, B, C entweder verſchwinden oder beſondern Bedingungen unterliegen, gewinnt die Gleichung $Ax^2 + Bx + C = y^2$ ſpecielle Geſtalten, die ich hier, ſo weit ſich bei Diophant Beiſpiele davon finden, der Reihe nach durchgehen will. Zuvor bemerke ich nur noch, daß Diophant die rechte Seite der Gleichung, $= y^2$, immer in Worten ausdrückt, ἴσον (ἴσοι etc.) τετραγώνῳ.

1. Gleichungen, deren rationale Auflöſung immer möglich iſt. Dieſer Fall tritt ein, wenn entweder A, oder C, oder beide zugleich o ſind; demnach haben wir hier folgende drei Formeln zu betrachten:

$Bx = y^2$. Diophant ſetzt in dem Beiſpiel III, 5. y^2 irgend einer Quadratzahl gleich; ſein Beiſpiel iſt $2x = y^2$; er ſetzt $y^2 = 16$, ſo wird $x = 8$. Man könnte auch $y = mx$ ſetzen, ſo würde $x = \frac{B}{m^2}$.

$Bx + C = y^2$. Für y^2 wird irgend eine beſtimmte Quadratzahl, m^2, ſubſtituirt; dann wird $\frac{m^2 - C}{B}$. Beiſpiele: III, 7. 8. 10. 11. 19. Die rationale Auflöſung dieſer Gleichung wird im Allgemeinen immer möglich ſein; daß aber x in vielen Fällen, z. B. $3x + 2 = y^2$ u. a. keine ganze Zahl ſein kann, deutet Diophant nirgend an, weil ganze Zahlen nicht das ſind, was er ſucht. Seine einzige Fürſorge bei dieſer Gleichung iſt die, daß x poſitiv werde, was in jedem beſtimmten Zahlenbeiſpiel und nach den verſchiedenen Vorzeichen von B und C ſich immer leicht bewerkſtelligen läßt.

$Ax^2 + Bx = y^2$. Für y ſetzt Diophant x mit irgend einem Zahlencoefficienten, $\frac{m}{n}x$, ſo erhält er $Ax + B = \frac{m^2}{n^2}x$, alſo $x = \frac{Bn^2}{m^2 - An^2}$. Auf daſſelbe Reſultat führt die Leslie'ſche Zerlegungsmethode, nach welcher man $x = \frac{m}{n}y$, $Ax + B = \frac{n}{m}y$ ſetzt;

eine Methode, die in vielen Fällen die Auflöſung der unbeſtimmten quadratiſchen Gleichungen ſehr vereinfacht, von der ſich aber bei Diophant keine Spuren finden. Beiſpiele für dieſen Fall ſiehe **II**, 22. 34. **IV**, 23. 34.

2. Gleichungen, deren rationale Auflöſung nur unter gewiſſen Bedingungen möglich iſt. Es kann hier nicht meine Abſicht ſein, alle Fälle und Bedingungen zu unterſuchen, in und unter welchen die Gleichung $Ax^2 + Bx + C = y^2$ möglich oder unmöglich iſt. Dieſe Unterſuchungen gehören in ein Lehrbuch über die unbeſtimmte Algebra, nicht in einen hiſtoriſchen Bericht über Diophantus. Indem ich alſo den Leſer, welcher ſich über den jetzigen Standpunct dieſer Methoden unterrichten will, an die neueren Lehrbücher und in hiſtoriſcher Beziehung namentlich an die Schriften von Euler, Leslie, Lagrange, Legendre u. A. verweiſe[9]), begnüge ich mich hier dasjenige aufzuſtellen, was bei Diophant ſich vorfindet. Wenn wir alſo die Form $Ax^2 = y^2$, welche nur möglich iſt, wenn A Quadratzahl iſt, übergehen, bleiben uns noch zwei Formen der Gleichung zu betrachten übrig.

$Ax^2 + C = y^2$. Die rationale Auflöſung dieſer Gleichung iſt nach Diophant in folgenden Fällen möglich. 1) Wenn A poſitiv und Quadratzahl, alſo $a^2x^2 + C = y^2$ iſt. Diophant ſetzt $y = ax \pm m$, woraus ſich ergiebt $x = \pm \frac{C - m^2}{2am}$. Beiſpiele für $A = 1$ finden ſich **II**, 12. 13. 14. 29. 30. **III**, 12. 13. Für andere quadratiſche Werthe von A **II**, 29. **III**, 13. 29. **IV**, 17. 18. 46. — 2) Wenn C poſitiv und Quadratzahl, alſo $Ax^2 + c^2 = y^2$ iſt. Diophant ſetzt $y = mx \pm c$, alſo $x = \pm \frac{2mc}{A - m^2}$. Beiſpiele **IV**, 8. 33. Die Auflöſung dieſes Falles in ganzen Zahlen war die herausfordernde Aufgabe, welche im Jahre 1657 Fermat den Engliſchen Mathematikern ſtellte, und welche den Hauptgegenſtand des von Wallis herausgegebenen und im zweiten Bande ſeiner Werke wieder abgedruckten Commercium episto-

---

9) Als ſehr belehrend muß ich hier auch noch eine kleine Schrift meines verehrten und gelehrten Lehrers, des Herrn Profeſſor F. Buchner, nennen: Beitrag zur Auflöſung der unbeſtimmten Aufgaben des zweiten Grades. Elbing (1838). 4., welche mit häufigen Hinweiſungen auf die Geſchichte dieſe Lehre in ſehr intereſſanter Weiſe behandelt.

licum ausmacht. Künftig mehr über dieſen Gegenſtand. — 3) **Wenn eine Auflöſung der Gleichung bekannt iſt, laſſen ſich beliebig viele andere finden.** So ganz allgemein ſpricht Diophant dieſen Satz nur für einen beſchränkten Fall aus, wenn nämlich C negativ iſt und die Gleichung alſo die Form hat $Ax^2 - C = y^2$. Für dieſen Fall ſagt er VI, 16.: „Wenn zwei Zahlen gegeben ſind, und man hat eine Quadratzahl, welche mit einer der gegebenen Zahlen multiplicirt ein Quadrat giebt, wenn man die andern von dem Produkte abzieht, ſo läßt ſich auch noch eine andere und zwar größere Quadratzahl finden, welche daſſelbe leiſtet." Iſt nämlich der Fall $Ap^2 - C = q^2$ bekannt, ſo ſetzt Diophant $x = x_1 + p$; dadurch wird $Ax^2 - C = Ax_1^2 + 2Apx_1 + Ap^2 - C$ das iſt $Ax_1^2 + 2Apx_1 + q^2 = y_1^2$. Demnach iſt auf dieſe Weiſe die Auflöſung dieſes Falles auf einen auflösbaren Fall der allgemeinen Formel $Ax^2 + Bx + C = y^2$ reducirt, den wir unten erwähnen wollen. Es iſt zu verwundern, daß Diophant dieſe Regel nicht weiter angewandt hat, da ſie nicht nur für die allgemeinere Form $\pm Ax^2 \pm C = y^2$, ſondern auch für die ganz allgemeine Gleichung $Ax^2 + Bx + C = y^2$ gilt. In ſpeciellerer Form erſcheint der Satz VI, 12., wenn in der Gleichung $Ax^2 + C = y^2$ A und C poſitiv ſind. Es heißt nämlich in dem Lemma daſelbſt: „Wenn zwei Zahlen gegeben ſind, deren Summe ein Quadrat iſt, ſo laſſen ſich unzählig viele Quadratzahlen finden, deren jede mit einer gegebenen Zahlen multiplicirt ein Quadrat giebt, wenn man die andere gegebene Zahl hinzuaddirt." Dieſes iſt aber nichts anderes als der ſpecielle Fall, wenn der eine bekannte Werth von x die Einheit iſt. Ja im weiteren Sinne kann man auch noch den unter 2) angeführten Fall hieher zählen, weil daſelbſt $x = o$ als die bekannte Auflöſung betrachtet werden kann. Noch auffallender aber, als die unnütze Beſchränkung der VI, 16. ausgeſprochenen Regel iſt der Umſtand, daß Diophant die Anwendbarkeit derſelben öfters überſehen hat. So erklärt er III, 12. die Auflöſung der Gleichung $52x^2 + 12 = y^2$ für unmöglich, **weil 52 keine Quadratzahl iſt**, da doch $52 + 12$ d. i. 64 eine Quadratzahl iſt, welche Bedingung nach VI, 12. zur Auflöſung der Gleichung vollkommen hinreicht, und es leicht iſt, aus dem Werthe $x = 1$, welcher $y = 8$ macht, andere herzuleiten, z. B. $x = \frac{1}{2}$, $y = 5$, oder $x = \frac{11}{6}$, $y = \frac{41}{3}$, oder $x = \frac{11}{3}$, $y = \frac{80}{3}$, oder $x = \frac{1}{23}$, $y = \frac{80}{23}$. In der folgenden Auf-

gabe **III**, 13. erklärt Diophant die Auflöſung der Gleichung $266x^2-10=y^2$ für unmöglich, da doch hier ebenfalls $x=1$ eine rationale Auflöſung giebt, weil $266-10=256=(16)^2$ iſt. Wirklich unmöglich dagegen iſt die Auflöſung der Gleichung $60x^2+2520=y^2$, **VI**, 13., wenn gleich der Grund, aus welchem Diophant ſie erwirft, daß nämlich $60+2520$ kein Quadrat iſt, zu beſchränkt iſt. — Noch eine intereſſante Bemerkung, welche Diophant **VI**, 15. macht, kann ich nicht unerwähnt laſſen, die nämlich, daß die Gleichung $Ax^2-c^2=y^2$ unmöglich iſt, wenn A nicht die Summe zweier Quadrate iſt. (S. Legendre Théorie des Nombres p. 60.) Es bleibt uns nun nur noch die vollſtändige Formel .

$Ax^2+Bx+C=y^2$ zu betrachten übrig. Euler hat gezeigt, wie man durch Einführung einer andern Variablen $x=z-\frac{B}{2A}$ dieſe Gleichung auf die zuletzt betrachtete, in welcher das zweite Glied fehlt, zurückführen könne, indem die Transformation ergiebt $Az^2+\frac{4AC-B^2}{4A}=y^2$. Diophant aber behandelt dieſe Form mit der vorigen unabhängig und nicht ſo vollſtändig als jene. Nach ihm iſt die Auflöſung nur möglich 1) Wenn A poſitiv und Quadratzahl, alſo $a^2x^2+Bx+C=y^2$ iſt; dann ſetzt er $y=ax+m$, woraus $x=\frac{C-m^2}{2am-B}$ ſich ergiebt. Von dieſem Falle finden ſich in ſeinem Werke ſehr viele Beiſpiele **II**, 20. 21. 23. 24. 33. **III**, 9. 16. 18. **IV**, 15. 21. **V**, 3. 4. 18. 20. u. ſ. w. — 2) Wenn C poſitiv und Quadratzahl, alſo $Ax^2+Bx+c^2=y^2$ iſt; er ſetzt dann $y=mx+c$, ſo wird $x=\frac{2mc-B}{A-m^2}$. Beiſpiele: **II**, 17. **IV**, 9. 10. 12. 14. 45. u. ſ. w. — 3) Wenn $\frac{1}{4}B^2-AC$ poſitiv und Quadratzahl iſt. Diophant ſpricht dieſe Bedingung nicht offen aus, ſondern erſchleicht nur, auf das zufällige Eintreffen derſelben geſtützt, eine Auflöſung. Er will nämlich **IV**, 33. die Formel $3x+18-x^2$ zu einem Quadrate machen. Er ſetzt $3x+18-x^2=4x^2$, alſo iſt die quadratiſche Gleichung $3x+18=5x^2$ aufzulöſen; aber οὐκ ἔστιν ἡ ἴσωσις ῥητή. Nun ſind die $5x^2$ eine um 1 vermehrte Quadratzahl (5 iſt nämlich entſtanden aus dem Coefficienten von x^2 in der gegebenen Formel und dem Coefficienten des angenommenen Quadrats $4x^2$); es ſollte alſo

dieſes, mit den 18 Einheiten multiplicirt und zu dem Quadrat des halben Coefficienten von x, nämlich $\frac{9}{4}$ addirt, ein Quadrat ſein. Darum ſind wir nun darauf hingeführt, eine Quadratzahl zu ſuchen, welche zu 1 addirt und achtzehnmal genommen, wenn man $\frac{9}{4}$ addirt, ein Quadrat giebt. Die geſuchte Quadratzahl ſei z^2 (Diophant nimmt wieder daſſelbe Zeichen $\delta^{\upsilon}\overline{\alpha}$), ſo erhalten wir actis agendis die Formel $18z^2 + \frac{81}{4}$, welche ein Quadrat werden ſoll; oder es ſoll $72z^2 + 81 = w^2$ ſein. Diophant ſetzt nur $w = 8z + 9$, woraus er findet $z = 18$. Nun kehrt er zu der urſprünglichen Aufgabe zurück und ſetzt $3x + 18 - x^2$ nicht $= 4x^2$, ſondern $= 324x^2$, alſo $3x + 18 = 325x^2$, καὶ γίνεται ὁ ς̀ $\overline{o\eta}^{\tau\kappa\varepsilon}$ d. i. $x = \frac{78}{325}$. Nachdem ich ſo Diophants Beiſpiel ausführlich durchgenommen habe, wollen wir einmal die Methode allgemein betrachten. Sei $Ax^2 + Bx + C = m^2x^2$, ſo wird $x = \frac{-\frac{1}{2}B \pm \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - AC + Cm^2}}{A - m^2}$; das heißt, damit x rational werde, muß man m ſo annehmen, daß $\frac{1}{4}B^2 - AC + Cm^2$ ein Quadrat wird. Dieſe Bedingung läßt ſich erfüllen, wenn $\frac{1}{4}B^2 - AC$ ein Quadrat iſt, aber außerdem in allen andern Fällen, in welchen, wenn wir $\frac{1}{4}B^2 - AC = D$ ſetzen, die Formel $Cm^2 + D = y^2$ rationale Auflöſungen zuläßt. Es iſt alſo hier die allgemeine Form der unbeſtimmten quadratiſchen Gleichung auf die Auflöſung des Falles reducirt, in welchem das zweite Glied fehlt, und zwar auf einem anderen Wege, als der iſt, den Euler eingeſchlagen hat; wir finden alſo in dieſem ſpeciellen Beiſpiele bei Diophant gewiſſermaßen den Keim, welcher unter Eulers Händen ſich entwickelt hat. Ebenſo hätte man auch noch auf eine dritte Weiſe dieſe Reduction vornehmen können, wenn man $Ax^2 + Bx + C = m^2$ geſetzt hätte; dann würde $x = \frac{-\frac{1}{2}B \pm \sqrt{\frac{1}{4}B^2 - AC + Am^2}}{A}$. Es läßt ſich alſo, wenn wir wieder $\frac{1}{4}B^2 - AC$ der Kürze wegen mit D bezeichnen, die Formel $Ax^2 + Bx + C$ ſowohl auf $Am^2 + D$, als auf $Cm^2 + D$ reduciren. Da es aber nicht in meinem Plane liegt, dieſe Theorie weiter zu führen als Diophant gethan hat, ſo ſei das Geſagte genug.

b) Doppelte Gleichung, *aequatio duplicata.*

Unter dem Namen **doppelte Gleichung**[10]) verſteht Diophant die Aufgabe, für die Unbekannte x einen ſolchen Werth zu finden, daß zwei Funktionen derſelben zugleich Quadrate werden. Demnach haben wir zwei Gleichungen $Ax^2+Bx+C=y^2$, $A_1x^2+B_1x+C_1=y_1^2$ in rationalen Zahlen zu löſen. Diophant's Unterricht über die Behandlung dieſer Gleichungen iſt nicht vollſtändig und wir müſſen uns die einzelnen Winke und Vorſchriften, welche er hie und da giebt, aus den einzelnen Orten, an denen ſie ſich zerſtreut befinden, zuſammenſuchen. Die erſte Bedingung iſt natürlich die, daß jede der beiden Funktionen an und für ſich ein Quadrat werden könne. Wir haben geſehen, daß das immer der Fall iſt, wenn das erſte Glied, welches x^2 enthält, in der Funktion fehlt. Für dieſen Fall giebt Diophant eine allgemeine Regel, nebſt den nöthigen Beſchränkungen. Die Regel findet man in der Aufgabe II, 12.; die Bedingungen, von denen die Möglichkeit ihrer Anwendung abhängt, in den Sätzen III, 18. IV, 35. 45. zerſtreut. Wir wollen das daſelbſt Vereinzelte hier kurz zuſammenfaſſen. Damit die gleichzeitige rationale Auflöſung der Gleichungen $Bx+C=y^2$, $B_1x+C_1=y_1^2$ möglich ſei, iſt nothwendig, entweder

1. daß B und B_1 ſich zu einander verhalten, wie zwei Quadratzahlen, oder mit einem andern Ausdrucke, daß B und B_1 ähnliche Flächenzahlen ſeien. III, 18. IV, 35. Ein ſpecieller Fall iſt, wenn $B=B_1$, z. B. II, 12. 14. III, 14. 18. IV, 35. Oder
2. daß C ſowohl als C_1 jedes für ſich ſchon Quadratzahl ſei. IV, 45.

Der Zweck der einen wie der andern Bedingung iſt der, daß man durch Multiplication mit einem **quadratiſchen Factor** entweder die Coefficienten von x, oder die abſoluten Glieder in beiden Functionen einander gleich machen könne, damit ſie bei der Subtraction ſich gegenſeitig wegheben. Trifft nun eine dieſer beiden Bedingungen zu und hat man durch Multiplication mit quadratiſchen

10) Es finden ſich im Griechiſchen Texte dafür drei Ausdrücke: διπλοϊσότης II, 12.; διπλῆ ἰσότης II, 12. III, 14. 18. 20. IV, 24. 35. 45., und διπλῆ ἴσωσις II, 14. III, 15. 17.

Factoren entweder die Coefficienten von x oder die abſoluten Glieder einander gleich gemacht, ſo iſt Diophant's Regel II, 12. folgende:

Nimm die Differenz beider Ausdrücke und ſuche zwei Zahlen, deren Product dieſer Differenz gleich iſt, ſo iſt das Quadrat der halben Summe derſelben gleich dem größern Ausdrucke, das Quadrat der halben Differenz gleich dem kleineren.

Wir wollen dieſe Regel an den einzelnen Fällen erläutern, mit beſonderer Berückſichtigung die von Diophant gegebenen Beiſpiele.

Erſter Fall. Wenn B und B_1 ſich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten. Sie alſo $B = bm^2$, $B_1 = bm_1^2$, ſo haben wir die beiden Gleichungen

$$bm^2x + C = y^2, \quad bm_1^2x + C_1 = y_1^2.$$

Multipliciren wir die erſte Gleichung mit m_1^2, die zweite mit m^2, ſo erhalten wir $bm^2m_1^2x + Cm_1^2 = m_1^2y^2$, und $bm^2m_1^2x + C_1m^2 = m^2y_1^2$. Die Differenz iſt $Cm_1^2 - C_1m^2 = m_1^2y^2 - m^2y_1^2 = (m_1y + my_1)(m_1y - my_1)$. Zerlegt man alſo den Ausdruck $Cm_1^2 - C_1m^2$ in zwei Factoren, P, Q, und ſetzt $m_1y + my_1 = P$, $m_1y - my_1 = Q$, ſo wird $m_1y = \frac{1}{2}(P+Q)$, $my_1 = \frac{1}{2}(P-Q)$. Subſtituiren wir nun einen dieſer Werthe für m_1y oder für my_1 in die betreffenden Gleichungen, ſo erhalten wir die Werthe für x. Es wird alſo ſein $bm^2m_1^2x + Cm_1^2 = \frac{1}{4}(P+Q)^2 = \frac{1}{4}P^2 + \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{4}Q^2$. Aber $PQ = Cm_1^2 - C_1m^2$,

folglich $x = \frac{\frac{1}{4}(P^2+Q^2) - \frac{1}{2}(Cm_1^2 + C_1m^2)}{bm^2m_1^2}$; und daſſelbe Reſultat hätten wir erhalten, wenn wir in die Gleichung $bm^2m_1^2x + C_1m^2 = m^2y_1^2$ für die letzte Größe ihren Werth $\frac{1}{4}(P-Q)^2$ ſubſtituirt hätten. Da Diophant Brüche nicht ausſchließt, ſo läßt ſich die Größe $Cm_1^2 - C_1m^2$ allemal auf unzählige Weiſe in zwei Factoren zerlegen, und er hat nur darauf zu achten, daß nicht $\frac{1}{4}(P+Q)^2$ kleiner als Cm_1^2 oder $\frac{1}{4}(P-Q)^2$ kleiner als C_1m^2 werde, um negative Werthe von x zu vermeiden. Sind die Coefficienten B und B_1 beide negativ, ſo macht das in der Behandlung keinen Unterſchied; iſt aber einer von ihnen poſitiv und der andere negativ, ſo können ſie ſich natürlich nie wie Quadratzahlen verhalten, und die Auflöſung iſt dann wenigſtens auf dieſem Wege nicht möglich. Sind B und B_1 nicht bloß ähnliche Zahlen, ſondern ſchon beide ſelbſt

Digitized by Google

ſelbſt Quadratzahlen, ſo macht das weiter keinen Unterſchied, als daß man in der Formel $b = 1$ zu ſetzen hat. Iſt dagegen ſchon von Hauſe aus $B = B_1$, ſo iſt weiter keine Veränderung mit den gegebenen Gleichungen nöthig. Die Subtraction ergiebt dann geradezu $C - C_1 = y^2 - y_1^2$. Iſt hier wieder $C - C^1 = PQ$, ſo wird $y = \frac{1}{2}(P + Q)$, $y_1 = \frac{1}{2}(P - Q)$, alſo $Bx + C = \frac{1}{4}(P + Q)^2$, $x = \frac{\frac{1}{4}(P^2 + Q^2) - \frac{1}{2}(C + C_1)}{B}$. So hat Diophant II, 12. die Aufgabe geſtellt, für einen und denſelben Werth von x die Ausdrücke $x + 3$ und $x + 2$ zu Quadraten zu machen. Hier iſt $B = B_1 = 1$, $C = 3$, $C_1 = 2$; alſo $y^2 - y_1^2 = 1$. Unter den unzähligen Zahlen, deren Product 1 iſt, wählt Diophant die Zahlen 4 und $\frac{1}{4}$; es iſt alſo $2y = 4 + \frac{1}{4}$, $2y_1 = 4 - \frac{1}{4}$, $y = \frac{17}{8}$, $y^1 = \frac{15}{8}$. Setzt man alſo $x + 3 = \frac{289}{64}$, ſo wird $x = \frac{97}{64}$; und ſetzt man $x + 2 = \frac{225}{64}$, ſo wird ebenfalls $x = \frac{97}{64}$. So macht Diophant II, 14. die Ausdrücke $x - 6$ und $x - 7$, III, 14. die Ausdrücke $10x + 54$ und $10x + 6$ zu Quadraten, u. ſ. f.; III, 19. dagegen befiehlt uns, die Ausdrücke $\frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$ und $\frac{5}{8}x - \frac{13}{8}$ zu Quadraten zu machen; hier verhält ſich $\frac{5}{2} : \frac{5}{8} = 4 : 1$; multiplicire ich alſo die erſte Gleichung $\frac{5}{2}x - \frac{7}{2} = y^2$ mit 1, die zweite $\frac{5}{8}x - \frac{13}{8} = y_1^2$ mit 4, oder, um ganze Zahlen zu Coefficienten zu erhalten, die erſte mit 4, die zweite mit 16, ſo werden die Coefficienten von x in beiden Gleichungen dieſelbe, und ich erhalte $10x - 14 = 4y^2$, $10x - 26 = 16y_1^2$; demnach $4y^2 - 16y_1^2 = (2y + 4y_1)(2y - 4y_1) = 12$. Nun ſetzt Diophant $2y + 4y_1 = 6$, $2y - 4y_1 = 2$, ſo wird $2y = 4$, $4y_1 = 2$, alſo $10x - 14 = 16$, $x = 3$. Es iſt leicht einzuſehen, warum die Bedingung geſtellt war, daß B und B_1 ſich wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten ſollen; damit man nämlich, nachdem man durch die Multiplication die Coefficienten von x einander gleich gemacht hat, nach der Subtraction rechts die Differenz zweier Quadrate erhalte.

Zweiter Fall. Wenn C und C_1 jedes für ſich Quadratzahl iſt. Sei alſo

$$Bx + c^2 = y^2, \quad B_1x + c_1^2 = y_1^2.$$

Multiplicirt man die erſte Gleichung mit c_1^2, die zweite mit c^2, ſo erhält man

$$Bc_1^2x + c^2c_1^2 = c_1^2y^2, \quad B_1c^2x + c^2c_1^2 = c^2y_1^2.$$

Die Subtraction ergiebt

$$(Bc_1^2 - B_1c^2)x = c_1^2y^2 - c^2y_1^2 = (c_1y + cy_1)(c_1y - cy_1).$$

Hier haben wir die Größe $(Bc_1^2-B_1c^2)x$ in zwei Factoren zu zerlegen; ſie ſeien Px und Q, ſo iſt $c_1y=\frac{1}{2}(Px+Q)$, $cy_1=\frac{1}{2}(Px-Q)$. Subſtituirt man nun zum Beiſpiel den erſten dieſer Werthe in die erſtere der obigen Gleichungen, ſo erhält man

$$Bc_1^2x+c^2c_1^2=\tfrac{1}{4}P^2x^2+\tfrac{1}{2}PQx+\tfrac{1}{4}Q^2,$$

oder, wenn man für PQ ſeinen Werth $Bc_1^2-B_1c^2$ ſubſtituirt und die Gleichung nach x ordnet,

$$\tfrac{1}{4}P^2x^2-\tfrac{1}{2}(Bc_1^2+B_1c^2)x+\tfrac{1}{4}Q^2-c^2c_1^2=0.$$

Dieſes Reſultat zeigt, daß die allgemeine Zerlegung des Ausdrucks $Bc_1^2-B_1c^2$ in irgend zwei Factoren nicht zu dem erwünſchten Ziele führt, indem wir eine Geichung erhlten, in welcher x^2 und x vorkommt, und die alſo im Allgemeinen irrationale Werthe für x geben wird. Es finden hier zwei Auswege ſtatt, auf denen man ſich aus der Schwierigkeit ziehen kann. Diophant wählt den kürzeren, und nimmt die Factoren P und Q ſo an, daß $\frac{1}{4}Q^2=c^2c_1^2$, alſo $Q=2cc_1$ wird. Dann hebt ſich in der letzten Gleichung das abſolute Glied auf, man kann den Reſt durch x dividiren und erhält eine Gleichung vom erſten Grade, aus welcher ſich x ohne Schwierigkeit beſtimmen läßt; es iſt nämlich $x=\frac{2(Bc_1^2+B_1c^2)}{P}$ $=\frac{8c^2c_1^2(Bc_1^2+B_1c^2)}{(Bc_1^2-B_1c^2)^2}$. Indeß habe ich nur ein Beiſpiel gefunden, in welchem Diophant dieſe Methode anwendet, nämlich IV, 45.; hier tritt aber der beſondere Umſtand ein, daß $c^2=c_1^2$ iſt, wodurch die Auflöſung ſich etwas abkürzt, wie wir unten ſehen werden. Es iſt klar, daß dieſe Methode nur eine Auflöſung giebt. Um vielleicht eine andere, weniger beſchränkende Bedingung für die Factoren P und Q zu erhalten, löſen wir die gefundene quadratiſche Gleichung nach x auf; daraus ergiebt ſich

$$x=\frac{Bc_1^2+B_1c^2\pm 2cc_1\sqrt{BB_1+P^2}}{P^2}.$$

Wir erhalten demnach außer der obigen ſehr partiellen noch die auf unzählige Weiſen erfüllbare Bedingung, daß BB_1+P^2 ein Quadrat ſein müſſe. Ein ſpezieller Fall iſt nun der, wenn $c^2=c_1^2$ iſt. Dann haben wir $Bx+c^2=y^2$, $B_1x+c^2=y_1^2$, und wir können ohne vorhergehende Multiplication geradezu die Differenz dieſer beiden Gleichungen nehmen, welche giebt $(B-B_1)x=y^2-y_1^2$. Sei nun auch $y+y_1=Px$, $y-y_1=Q$, ſo iſt $y=\frac{1}{2}(Px+Q)$, $y_1=\frac{1}{2}(Px-Q)$, alſo $Bx+c^2=\frac{1}{4}P^2x^2+\frac{1}{2}PQx+\frac{1}{4}Q^2$, geordnet $P^2x^2-2(B+B_1)x=c^2-\frac{1}{4}Q^2$,

alſo $x = \frac{B + B_1 \pm 2\sqrt{BB_1 + c^2P^2}}{P^2}$. Die partielle Diophantiſche Methode giebt alſo hier die Bedingung, daß $Q = 2c$, die allgemeinere, daß $BB_1 + c^2P^2$ ein Quadrat ſein müſſe. Diophant giebt uns für dieſen Fall IV, 45. das Beiſpiel $8x + 4 = y^2$, $6y + 4 = y_1^2$, folglich $y^2 - y_1^2 = 2x$; demnach iſt hier $PQ = 2$, und da $Q = 2c = 4$, ſo iſt $P = \frac{1}{2}$, demnach $\frac{1}{4}x^2 - 28x = o$, $x = 112$. Unſere Formel giebt uns die Bedingung, daß $4P^2 + 48$, oder durch 4 dividirt $P^2 + 12$ ein Quadrat ſein ſolle; daraus finden wir für P die allgemeine Formel $\frac{12m^2 - n^2}{2mn}$, oder $\frac{4p^2 - 3q^2}{2pq}$, oder $\frac{3r^2 - s^2}{rs}$. Daraus ergiebt ſich $x = \frac{8mn(12m^2 + 7mn + n^2)}{(12m^2 - n^2)^2}$, $y = \frac{24m^2 + 16mn + 2n^2}{12m^2 - n^2}$, $y_1 = \frac{24m^2 + 12mn + 2n^2}{12m^2 - n^2}$. Da Diophant ſein direct gefundenes Reſultat nicht brauchen kann, ſo gelangt er auf vielen Umwegen, die wir ſpäterhin wollen kennen lernen, zu einem zweiten, welches ihm $y_1 = \frac{11}{43}$, $x = \frac{455}{262}$ giebt, ein Reſultat, welches wir nach der entwickelten Formel ſehr bald gefunden hätten, wenn wir $m = 5$, $n = 6$ geſetzt hätten.

Noch eine eigenthümliche Auflöſung eines zu dieſem Falle gehörenden Beiſpiels muß ich hier erwähnen. Diophant betrachtet **III**, 17. die beiden Gleichungen $10x + 9 = y^2$, $5x + 4 = y_1^2$. Da 9 und 4 Quadratzahlen ſind, ſo wäre die Auflöſung nach der vorigen Methode leicht zu bewerkſtelligen geweſen. Aber Diophant ſchlägt einen andern Weg ein: Er ſubtrahirt geradezu beide Gleichungen von einander, das giebt $5x + 5 = 5(x + 1) = y^2 - y_1^2$; nun ſetzt er $y + y_1 = x + 1$, $y - y_1 = 5$, woraus folgt $y = \frac{1}{2}x + 3$, $y_1 = \frac{1}{2}x - 2$; alſo $10x + 9 = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9$, $x = 28$. Wir ſehen, daß die durch den Augenſchein ſich darbietende Zerlegung des Ausdrucks $5x + 5$ in die Factoren 5 und $x + 1$ zufällig ſo günſtig iſt, daß nach der Subſtitution ſich das abſolute Glied weghebt, mit andern Worten, das $5 + 1 = 2 \cdot 3$ iſt. Betrachten wir das Verfahren allgemein an den Gleichungen $Bx + c^2 = y^2$, $B_1x + c_1^2 = y_1^2$; die Differenz iſt $(B - B_1)x + (c^2 - c_1^2) = y^2 - y_1^2$. Hat nun die linke Seite die Factoren p und $mx + n$, und ſetzt man $y + y_1 = mx + n$, $y - y_1 = p$, ſo wird $y = \frac{1}{2}mx + \frac{1}{2}(n + p)$, $y_1 = \frac{1}{2}mx + \frac{1}{2}(n - p)$. Demnach iſt

$$Bx + c^2 = \frac{1}{4}m^2x^2 + \frac{1}{2}m(n + p)x + \frac{1}{4}(n + p)^2,$$
$$B_1x + c_1^2 = \frac{1}{2}m^2x^2 + \frac{1}{2}m(n - p)x + \frac{1}{4}(n - p)^2.$$

Damit in dieſen beiden Gleichungen die nicht mit x behafteten Glieder ausfallen, iſt es nöthig, daß $n+p=2c$, $n-p=2c_1$, alſo $n=c+c_1$ $p=c-c_1$ ſei. Nun bleibt noch m zu beſtimmen übrig. Es war aber $(B-B_1)x+c^2-c_1{}^2=p(mx+n)$ $=(c-c_1)mx+c^2-c_1{}^2$, demnach $m=\frac{B-B^1}{c-c_1}$. Aber da $\frac{1}{4}(n-p)^2=c_1{}^2$ war, ſo hätte man auch $p-n=2c_1$, alſo $p=c+c_1$, $n=c-c_1$ ſetzen können; woraus ſich ergiebt $m=\frac{B-B_1}{c+c_1}$. Demnach giebt dieſe Methode zwei Auflöſungen, von denen Diophant die zweite gewählt hat, weil die erſte ihm ein negatives Reſultat, nämlich $x=-\frac{4}{5}$ gegeben hätte.

Die allgemeine Methode, aus einer bekannten Auflöſung unzählige andere hinzuleiten, welche Diophant auf ſpecielle Fälle der einfachen Gleichung anwendet, ſcheint ihm bei den doppelten Gleichungen nicht bekannt geweſen zu ſein. Meines Wiſſens hat ſie **Fermat** zuerſt gelehrt, indem er, wenn a dieſer bekannte Werth von x iſt, x_1+a für x in die Gleichung ſubſtituirt, wodurch er namentlich aus einem negativen Werthe von x, den die gewöhnliche Auflöſung gab, poſitive ableitet [11]). Nichts deſtoweniger aber werden wir in dem folgenden Kapitel ſehen, daß Diophant mit Hilfe eigenthümlicher Methoden aus dieſen doppelten Gleichungen andere Werthe für die Unbekannte ableitet, wenn der auf directem Wege gefundene ihm nicht genügt. Ich bemerke hier nur noch, daß der Auctor **III**, 18. die Auflöſung der Gleichungen $4x+3=y^2$, $\frac{13}{2}x+\frac{11}{2}=y_1{}^2$ und **IV**, 35. $8-x=y^2$, $8-3x=y_1{}^2$ für unmöglich erklärt, weil weder die eine noch die andere der angeführten Bedingungen ſtatt findet. Die Unauflösbarkeit beider Paare von Gleichungen läßt ſich leicht nachweiſen. Betrachten wir z. B. das zweite Paar, ſo iſt deren Differenz $2x=y^2-y_1{}^2$. Sei nun $2=PQ$, und $y+y_1=Px$, $y-y_1=Q$, alſo $y=\frac{1}{2}(Px+Q)$, $y^2=\frac{1}{4}P^2x^2+x+\frac{1}{4}Q^2=8-x$, alſo $\frac{1}{4}P^2x^2+2x=8-\frac{1}{4}Q^2$, oder $P^2x^2+8x=32-Q^2$, ſo iſt $x=\frac{-4+\sqrt{16+32P^2-P^2Q^2}}{P^2}$ $=\frac{-4+2\sqrt{3+8P^2}}{P^2}$. Aber $3+8P^2$ kann nie Quadrat werden,

11) **Obersv. in Dioph. VI, 24.**

Digitized by Google

weil kein Quadrat durch 8 dividirt 3 zum Reſt laſſen [12]). Bei dem erſten Paare können weder die Coefficienten von x, noch die abſoluten Glieder einander gleichgemacht werden. Es würde alſo nur übrig bleiben, die Differenz $\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}$ in zwei Factoren p und $mx+n$ zu zerlegen und dieſe ſo zu beſtimmen, daß x rational werden könnte; aber auch dieſe Operation führt zu keinem Reſultate, wie Jeder ſich überzeugen kann, der die Rechnung durchführen will.

Für die übrigen Fälle der doppelten Gleichung ſind Diophant's Andeutungen und Regeln nicht ſo vollſtändig und liegen auch nicht ſo offenbar in ſeinem Verfahren ausgeſprochen, daß ſich etwas Beſtimmtes darüber ſagen ließe. Die Beiſpiele, welche ſich für die zuſammengeſetzteren Formen bei ihm finden, ſind meiſtens der Art, daß die Auflöſung keine Schwierigkeit darbietet. Ich will mich daher damit begnügen, die einzelnen Beiſpiele hier anzuführen; es ſind folgende:

$Ax^2+Bx=y^2$, $A_1x^2+B_1x+C=y_1{}^2$. Für dieſe Form finden wir nur ein Beiſpiel, in welchem A und A^1 einander gleich und jedes Quadratzahl iſt; es iſt III, 15. $4x^2+15x=y^2$, $4x^2-x-4=y_1{}^2$. Die Differenz beider Gleichungen iſt $16x+4=y^2-z^2$. Bei der Zerlegung in die Factoren p und $mx+n$ iſt darauf zu achten, daß $\frac{1}{4}m^2=4$, alſo $m=4$ werde, Diophant ſetzt $y+y_1=4x+1$, $y-y_1=4$, ſo wird $y=2x+\frac{5}{2}$; $y_1=2x-\frac{3}{2}$. Jeden dieſer Werthe in eine der gegebenen Gleichungen ſubſtituirt läßt das quadratiſche Glied verſchwinden, und ergiebt in einer einfachen Gleichung $x=\frac{5}{4}$.

$Ax^2+Bx+C=y^2$, $A_1x^2+B_1x+C_1=y_1{}^2$. Dieſer Form gehören zwei Beiſpiele an, in denen aber A und A_1 zwei einander gleiche Quadratzahlen ſind und außerdem $C=C_1$ iſt. III, 20. finden wir $4x^2+4x-1=y^2$, $4x^2+3x-1=y_1{}^2$. Die Differenz giebt $y^2-y_1{}^2=x$. Dieſe muß wieder ſo zerlegt werden, daß y ſowohl als y_1 das Glied $2x$ enthält; demnach $y+y_1=4x$, $y-y_1=\frac{1}{4}$, alſo $y=2x+\frac{1}{8}$, $y_1=2x-\frac{1}{8}$; dann wird $x=\frac{65}{124}$. Dem ganz ähnlich iſt das Beiſpiel III, 21., wo $4x^2+3x-1$

---

12) S. Euler unbeſt. Anal. Kap. 5., wo bewieſen wird, daß dieſe Bedingung, die eigentlich nur Sinn hat, wenn P eine ganze Zahl iſt, auch für Brüche gilt.

$=y^2$, $4x^2-x-1=y_1^2$. Die Differenz iſt $y^2-y_1^2=4x$, und muß in die Faktoren $4x$ und 1 zerlegt werden; daraus ergiebt ſich $x=\frac{5}{4}$.

$Ax^2+Bx+C=y^2$, $A_1x^2+C_1=y_1^2$. Ein Beiſpiel mit denſelben Zufälligkeiten behaftet, wie die in dem vorigen Falle, iſt Alles, was Diophant uns bietet. Wir finden IV, 24. $x^2+x-1=y^2$, $x^2-1=y_1^2$; alſo $y^2-y_1^2=x$; die Zerlegung muß ſo geſchehen, daß y und y_1 das Glied x enthalten; demnach iſt $y+y_1=2x$, $y-y_1=\frac{1}{2}$, $y=x+\frac{1}{4}$, und $x=\frac{17}{8}$.

$Ax^2+C=y^2$; $B_1x+C_1=y_1^2$. In allen drei Beiſpielen dieſer Form iſt $A=1$ und $C=C_1$, ſo daß die Differenz immer ohne weitere Zurüſtung die Form $x^2 \pm B_1x$ erhält. V, 1. $x^2-12=y^2$, $\frac{13}{2}x-12=y_1^2$, $y^2-y_1^2=x^2-\frac{13}{2}x=x(x-\frac{13}{2}x)$. Diophant ſetzt $y+y_1=x$, $y-y_1=x-\frac{13}{2}$, alſo $y=x-\frac{13}{4}$, $y_1=\frac{13}{4}$, alſo $x=\frac{361}{104}$. Ähnlich V, 2., wo $x^2+20=y^2$, $\frac{19}{2}x+20=y_1^2$, alſo $y^2-y_1^2=x(x-\frac{19}{2})$, $y+y_1=x$, $y-y_1=x-\frac{19}{2}$, $y=x-\frac{19}{4}$, $y_1=\frac{19}{4}$, $x=\frac{41}{152}$. Und ebenſo VI, 6. $x^2+1=y^2$, $14x+1=y_1^2$; $y^2-y_1^2=x(x-14)$, $y=x-7$, $y_1=7$, $x=\frac{24}{7}$.

$Ax^2+Bx+C=y^2$, $B_1x+C_1=y_1^2$. In dem einzigen Beiſpiel dieſer Form ſind A, C, C_1 Quadratzahlen; es ſteht VI, 24., und die mit ziemlich großen Zahlen behafteten Gleichungen ſind

$$x^2-6144x+1048576=y^2, \quad x+64=y_1^2.$$

Diophant führt die Auflöſung nicht zu Ende, ſondern giebt nur den Weg an, den man einzuſchlagen hat; es heißt nämlich am Ende ziemlich lakoniſch: *καὶ ἐξισώσθω σοι*[13]) ἀριθμοί, καὶ ἡ ὑπεροχὴ, *καὶ ἡ μέτρησις, καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα*; d. h. man mache die Zahlen einander gleich, nehme die Differenz, zerlege ſie in Factoren, und das Übrige iſt klar. Thut man das, ſo erhält man $x^2-6144x+1048576=y^2$, $16384x+1048576=16384y_1^2$, $y^2-16384y_1^2=x^2-22528x$, alſo $y+128y_1=x$, $y-128y_1=x-22528$, $y=x-11264$, $128y_1=11264$, $y_1=88$, demnach $x=88^2-64=7680$.

---

13) Hier iſt die Bachet'ſche Leſeart wahrſcheinlich zu verbeſſern in ἐξισώσθωσαν οἱ ἀριθμοί.

$$x^2 = 58982400$$
$$1048576$$
$$60030976$$
$$6144x = 47185920$$
$$y^2 = 12845056 = (3584)^2$$

$Ax^2 + Bx = y^2$, $A_1x^2 + B_1x = y_1^2$. Nur in dieſem Falle, wenn beide zu einem Quadrat zu machenden Functionen dieſe gleichmäßige Form haben, wendet Diophant in drei Beiſpielen ein ganz eigenthümliches Verfahren an, deſſen Sinn ich allgemein darſtellen will. Diophant ſubſtituirt für y x mit einem unbeſtimmten Coefficienten, (wie er das zu Wege bringt, werden wir im folgenden Kapitel ſehen), z. B. mx, ſo wird aus der erſten Gleichung $x = \frac{B}{m^2 - A}$ gefunden; dieſen Werth ſubſtituirt er in die zweite Gleichung, ſo wird $\frac{A_1B^2}{(m^2-A)^2} + \frac{BB_1}{m^2 - A^2} = y_1^2$, oder $\frac{BB_1m^2 + B(A_1B - AB_1)}{(m^2-A)^2} = y_1^2$. Es bleibt alſo nur noch übrig, daß der Zähler dieſes Bruchs ein Quadrat werde. Ob das möglich iſt oder nicht, hängt von der Beſchaffenheit der Größen A, A_1, B, B_1 ab. Es iſt demnach dieſer Fall der doppelten Gleichung auf die Auflöſung der einfachen Gleichung $Mx^2 + N = z^2$ reducirt. Diophant wendet übrigens in den Beiſpielen VI, 13. 14. nur als Kriterium an, ob $M + N$ ein Quadrat iſt; in dem Beiſpiel VI, 15. wird N negativ und Quadratzahl, und das Beiſpiel verworfen, weil M nicht die Summe zweier Quadrate iſt, was ich oben ſchon erwähnt habe.

2. Unbeſtimmte Gleichungen höherer Grade.

a) Einfache Gleichung.

Die unbeſtimmten höheren Gleichungen bei Diophant zerfallen in zwei Klaſſen; die erſte Klaſſe begreift die Aufgabe, eine Function, in welcher die Unbekannte in höhern Potenzen als im Quadrat vorkommt, zu einem Quadrat zu machen, ihr Gegenſtand iſt alſo die rationale Auflöſung der Gleichung $Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots, Mx^2 + Nx + P = y^2$; die zweite Klaſſe begreift die Aufgabe, irgend eine Function der Unbekannten nicht zu einem Quadrat, ſondern zu

einer höheren Potenz zu machen, und da die Beiſpiele bei Diophant alle die Aufgabe ſtellen, die Unbekannte ſo zu beſtimmen, daß eine gegebene Function ein Kubus werde, ſo können wir dieſe zweite Aufgabe ausdrücken durch die Gleichung $Ax^n + Bx^{n-1} + \dots Mx^2 + Nx + P = y^3$. In den Beiſpielen der erſten Klaſſe überſteigt n nicht den Werth 6, in denen der zweiten Klaſſe nicht den Werth 3. Wir wollen die Diophantiſchen Beiſpiele einzeln betrachten.

Erſte Klaſſe. $Ax^n + Bx^{n-1} + \dots Mx^2 + Nx + P = y^2$.

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + d^2 = y^2$. Wenn eine Function vom dritten Grade dieſe Form hat, daß nämlich das abſolute Glied Quadratzahl iſt, ſo kann man die Auflöſung auf zweierlei Art anſtellen. Man ſetzt entweder $y = mx + d$, alſo $y^2 = m^2x^2 + 2mdx + d^2$, und beſtimmt nun m ſo, daß das dritte Glied, welches die erſte Potenz von x enthält, wegfällt; alſo $m = \frac{C}{2d}$; den Reſt kann man dann durch x^2 dividiren und aus dem Reſultat x beſtimmen; es wird dann nämlich $Ax + B = \frac{C^2}{4d^2}$, alſo $x = \frac{C^2 - 4d^2B}{4d^2A}$. Der andere Weg iſt der, daß man y dreigliedrig annimmt, ſo daß in der gegebenen Formel ſich alle Glieder außer Ax^3 wegheben; ſetzt man nämlich $y = mx^2 + nx + d$, ſo wird $y^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (2md + n^2)x^2 + 2ndx + d^2$. Vergleichen wir dieſe Formel mit der gegebenen, ſo muß $2nd = C$, alſo $n = \frac{C}{2d}$, und $2md + n^2 = B$, $m = \frac{B - n^2}{2d} = \frac{nd^2B - C^2}{8d^3}$ werden. Wenn man dann die übrig bleibenden Glieder durch x^3 dividirt, ſo behält man die einfache Gleichung $A = m^2x + 2mn$, folglich $x = \frac{A - 2mn}{m^2}$. In dem einzigen Beiſpiele, welches Diophant uns darbietet, wendet er die erſtere dieſer Methoden an. Er hat nämlich VI, 20. die Geichung $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = y^2$. Er nimmt, damit $3x$ auf beiden Seiten ſtehe und wegfalle, $y = \frac{3}{2}x + 1$ an, woraus ſich $x = \frac{21}{4}$ ergiebt. Nach der zweiten Methode wäre geworden $n = \frac{3}{2}$, $m = -\frac{21}{8}$, folglich $x = \frac{A - 2mn}{m^2} = \frac{568}{441}$. Da Diophant mit dem gewonnenen Reſultate zufrieden iſt, ſo leuchtet nicht ein, ob er verſtanden habe, aus dieſem erſten Werthe für x

andere abzuleiten. Auch giebt er nicht den Grund ausdrücklich an, warum er $y = \frac{3}{2}x + 1$ ſetzt.

$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2$. Dieſe allgemeine Formel vom vierten Grade läßt ſich nur auflöſen, wenn entweder A oder E Quadratzahl iſt; trifft keins von beiden Bedingungen zu, ſo kann man nur aus einer verſuchsweiſe gefundenen Auflöſung andere ableiten. In den beiden Beiſpielen, welche bei Diophant ſich finden, iſt ſowohl A als E Quadratzahl, ſo daß die Gleichung dieſe Geſtalt gewinnt $a^2x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + e^2 = y^2$. In dieſem Falle läßt die Gleichung ſich auf vier verſchiedenen Wegen löſen. 1) Man ſetzt $y = ax^2 + mx + n$ und beſtimmt m und n ſo, daß außer dem biquadratiſchen auch das kubiſche und quadratiſche Glied ausfällt; es iſt nämlich $y^2 = a^2x^4 + 2amx^3 + (2an + m^2)x^2 + 2mnx + n^2$; es muß alſo, damit die genannten Glieder ſich gegenſeitig fortheben, $2am = B$ und $2an + m^2 = C$ ſein; das heißt, es iſt $m = \frac{B}{2a}$, $n = \frac{C - m^2}{2a} = \frac{4a^2C - B^2}{8a^3}$ zu ſetzen. Dann bleibt als Endgleichung übrig $Dx + e^2 = 2mnx + n^2$, alſo $x = \frac{e^2 - n^2}{2mn - D}$. 2) Man ſetzt $y = px^2 + qx + e$, und beſtimmt p und q ſo, daß außer dem abſoluten auch das einfache und quadratiſche Glied wegfällt. Nun iſt $y^2 = p^2x^4 + 2pqx^3 + (2pe + q^2)x^2 + 2qex + e^2$; demnach muß $2qe = D$, alſo $q = \frac{D}{2e}$, und $2pe + q^2 = C$, alſo $p = \frac{C - q^2}{2e} = \frac{4e^2C - D^2}{8e^3}$ ſein. Wenn man dann die reſtirenden Glieder durch x^3 dividirt, ſo bleibt $a^2x + B = p^2x + 2pq$, alſo $x = \frac{2pq - B}{a^2 - p^2}$. 3) Man ſetzt $y = ax^2 + kx \pm e$, und beſtimmt k ſo, daß außer dem erſten und letzten Gliede auch noch das zweite ausfällt, alſo $k = \frac{B}{2a}$; wenn man dann die übrig bleibenden Glieder durch x dividirt, ſo behält man die Gleichung $Cx = D = (k^2 \pm 2ae)x \pm 2ke$, alſo $x = \frac{D \mp 2ke}{k^2 \pm 2ae - C} = \frac{4a(aD \mp eB)}{4a^2(\pm 2ae - C) + B^2}$; das heißt, die beiden Werthe von x, welche der Gleichung genügen, ſind $\frac{4a(aD - eB)}{B^2 + 4a^2(2ae - C)}$ und $\frac{4a(aD + eB)}{B^2 - 4a^2(2ae + C)}$. 4) Man ſetzt $y = \pm ax^2 + kx + e$, und beſtimmt k ſo, daß außer dem erſten und letzten auch das vierte Glied

wegfällt, alſo $k = \frac{D}{2e}$. Wenn man dann den Reſt durch x^2 dividirt, ſo bleibt $Bx + C = \pm 2akx \pm 2ae + k^2$, alſo $x = \frac{\pm 2ae + k^2 - C}{B \mp 2ak} = \frac{D^2 + 4e^2(\pm 2ae - C)}{4e(eB \mp aD)}$; das heißt, es iſt ſowohl $x = \frac{D^2 + 4e^2(2ae - C)}{4e(eB - aD)}$, auch auch $x = \frac{D^2 - 4e^2(2ae + C)}{4e(eB + aD)}$. Wir haben alſo durch dieſe vier Methoden ſechs von einander verſchiedene Werthe von x erhalten, von denen aber in der Ausführung in der Regel mehrere negativ ausfallen. Von dieſen vier Methoden nun, die ich der Vollſtändigkeit und Überſicht wegen mitgetheilt habe, und von denen die beiden letzten ausſchließlich auf die hier vorausgeſetzte Form anwendbar ſind, die beiden erſten dagegen allgemeiner auch den Fällen angehören, wenn nur eine der beiden Größen A oder E Quadratzahl iſt, braucht Diophant nur die beiden letzten. Von ſeinen beiden hieher gehörigen Beiſpielen iſt das erſte IV, 29. folgendes: $9x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1 = y^2$. Nach der unter 4) erwähnten Methode ſetzt er $k = \frac{D}{2e} = -6$, und $y = 3x^2 - 6x + 1$; erhebt man dieſen Ausdruck auf das Quadrat und ſetzt daſſelbe der gegebenen Function von x gleich, ſo bleibt die Gleichung übrig $-4x + 6 = -36x + 42$, alſo wird $x = \frac{9}{8}$. Die zweite Formel der vierten Methode, $y = -3x^2 - 6x + 1$, hätte den negativen Werth $x = -\frac{3}{5}$ gegeben; nach der dritten Methode hätte man $y = 3x^2 - \frac{2}{3}x \pm 1$, und daraus $x = -24$ und $x = \frac{15}{13}$ erhalten; die zweite Methode hätte gegeben $y = -15x^2 - 6x + 1$, $x = -\frac{23}{27}$, die erſte dagegen $y = 3x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{25}{27}$, und $x = \frac{13}{981}$; alſo erhält man ſelbſt auf directem Wege außer der Diophantiſchen Auflöſung noch zwei andere poſitive Werthe von x. Das zweite Diophantiſche Beiſpiel, VI, 10., welches die Gleichung $x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 8x + 1 = y^2$ aufzulöſen befiehlt, bedient ſich der dritten Methode; dann wird $k = \frac{B}{2a} = 6$, alſo $y = x^2 + 6x \pm 1$. Diophant ſetzt indeß nur das untere Zeichen, und findet daraus $x = \frac{5}{4}$. Das obere Zeichen hätte $x = -\frac{1}{5}$ gegeben. Die vierte Methode hätte $x = 0$ und $x = -\frac{1}{5}$, alſo

kein neues brauchbares Reſultat geliefert; aus der erſten Methode hätte man erhalten $x = \frac{20}{29}$, aus der zweiten aber wieder $x = 0$. Alſo ergeben die ſechs oben entwickelten Formeln für dieſe Gleichung nur drei Werthe von x, und darunter zwei poſitive; der Werth $x = 0$ iſt nämlich kein neuer, ſondern liegt ſchon begriffen in der Bedingung, daß E Quadratzahl iſt. An beiden angeführten Stellen ſagt Diophant nichts über die Methode, und fügt bei dieſen Gleichungen ebenſowenig, wie oben bei der kubiſchen den Grund an, der ihn beſtimmt, y gerade ſo und nicht anders anzunehmen, ſo daß ſich auch hier nicht genau angeben läßt, wie weit ſeine Kenntniß in Behandlung dieſer Gleichungen ſich erſtreckt habe.

Noch unvollkommener und unvollſtändiger erſcheint ſeine Behandlung derjenigen Fälle, wenn in der allgemeinen biquadratiſchen Function die ungeraden Potenzen von x fehlen. Bekanntlich iſt die Auflöſung der ſcheinbar einfacheren Gleichungen $Ax^4 + Cx^2 + E = y^2$, und $Ax^4 + E = y^2$, ſelbſt wenn A oder E oder beide Quadratzahlen ſind, größeren Schwierigkeiten unterworfen, als die Auflöſung der eben betrachteten allgemeineren Gleichung, und es iſt bei dieſen ſpecielleren Formen nur die Methode anwendbar, aus einer verſuchsweiſe gefundenen Auflöſung andere Werthe von x zu finden. Die Beiſpiele, welche Diophant von beiden Formeln giebt, beweiſen eben nicht, daß ihm dieſer Theil der unbeſtimmten Analyſis ſehr geläufig geweſen ſei. Wir wollen ſehen, was er giebt.

$Ax^4 + Cx^2 + E = y^2$. Dieſe Formel erſcheint zweimal, aber in ſehr ſpecieller Geſtalt, ſo daß die Auflöſung gleichſam ſpielend gewonnen wird. Was das Äußere anlangt, ſo hat ſie bei Diophant beidemal die Form $Ax^2 - C + \frac{E}{x^2} = y^2$, ſo jedoch, daß alle drei Coefficienten A, C, E Quadratzahlen ſind; alſo können wir den Fall ſo ausdrücken: $a^2x^2 - c^2 + \frac{e^2}{x^2} = y^2$. Hier ergeben ſich nun ganz von ſelbſt zwei Auflöſungen, wenn man $y = ax$ und wenn man $y = \frac{e}{x}$ ſetzt; im erſten Falle wird $x = \frac{e}{c}$, im zweiten $x = \frac{c}{a}$. Natürlich findet dieſe Auflöſung nur ſtatt, wenn außerdem, daß alle Coefficienten Quadrate ſind, auch noch ein Glied negativ iſt. Diophant's Beiſpiele ſind V, 30. $25x^2 - 9 + \frac{25}{4x^2}$

$= y^2$ und V, 31. $\frac{25}{4}x^2 - 25 + \frac{25}{4x^2} = y^2$. Im erſten Beiſpiele ſetzt er $y = 5x$, woraus $x = \frac{5}{6}$ ſich ergiebt, im zweiten $y = \frac{5}{2x}$, und er findet $x = 2$. Ebenſo hätte er aber auch in dem erſten Beiſpiele $y = \frac{5}{2x}$ und im zweiten $y = \frac{5}{2}x$ ſetzen können; dies hätte im erſten Beiſpiele $x = \frac{3}{5}$; im zweiten $x = \frac{1}{2}$ gegeben. Mehr Schwierigkeiten verurſacht unſerm Auctor die Auflöſung der Gleichung, wenn auch noch das quadratiſche Glied fehlt. Es kommt von dieſem Falle nur ein Beiſpiel vor in der Geſtalt

$x^4 + E = y^2$. V, 32., und E iſt bei Diophant 97. Wollte man dieſe Gleichung geradezu auflöſen, indem man $y = x^2 - m$ ſetzte, ſo würde man auf eine Bedingungsgleichung gerathen, welche der urſprünglichen congruent wäre. Es iſt aber bekannt, daß dieſe Gleichung ſich nur auflöſen läßt, wenn eine Auflöſung ſchon bekannt iſt. Wir wollen ſehen, was Diophant bei der Sache thut, um ſich aus der Schlinge zu ziehen. Seine urſprüngliche Aufgabe war, drei Biquadratzahlen zu finden, deren Summe eine Quadratzahl iſt; indem er eine der geſuchten Zahlen x^4 ſetzte, die andern beiden aber beliebig annahm, nämlich 81 und 16, gerieth er auf die Gleichung $x^4 + 97 = y^2$. Er ſetzt $y = x^2 - 10$, ſo wird 97 $= 100 - 20x^2$, $20x^2 = 3$. Die Annahme $y = x^2 - 10$ führt alſo nicht zu einem rationalen Reſultate. Anſtatt nun zu unterſuchen, in welchen Fällen die Gleichung $x^4 + E = y^2$ ſich auflöſen läßt, verwirft Diophant geradezu ſeine beliebige Annahme der Zahlen 81 und 16, und unterſucht, was für andere Zahlen er für dieſe und die angenommene Zahl 10 hätte ſetzen müſſen, damit die letzte Gleichung $20x^2 = 3$ ſolche Coefficienten bekommen, welche ein rationales x geſtatten. Um ſein Verfahren allgemein darzuſtellen, nennen wir die beliebig angenommenen Biquadrate a^4 und b^4, ſo wird die Gleichung $x^4 + a^4 + b^4 = y^2$. Setzen wir nun $y = x^2 - m$, $y^2 = x^4 - 2mx^2 + m^2$, ſo wird $x^2 = \frac{m^2 - (a^4 + b^4)}{2m}$. Zu dieſem nämlichen Reſultate kommt Diophant durch Räſonnement. Damit nun dieſer Ausdruck aus m, a, b ein Quadrat werde, ſetzt er $m = a^2 + b^2$, alſo $m^2 - (a^4 + b^4) = 2a^2b^2$, ſo wird $x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$; es alſo nur noch nöthig, daß $a^2 + b^2$ ein Quadrat ſei, was ſich

leicht zu Wege bringen läßt, wenn man $b = \frac{a(p^2 - q^2)}{2pq}$ ſetzt. Dann wird $m = \frac{a(p^2 + q^2)}{2pq}$. Diophant nimmt nun $a = 4$, $b = 3$, ſo iſt $m = a^2 + b^2 = 25$; um alſo die neue Gleichung $x^4 + a^4 + b^4$, d. i. $x^4 + 337 = y^2$ aufzulöſen, ſetzt er $y = x^2 - 25$, $y^2 = x^4 - 50x^2 + 625$, alſo wird $x^2 = \frac{625 - 337}{50} = \frac{144}{25}$, $x = \frac{12}{5}$. Anſtatt ſich alſo länger bei der Auflöſung der gegebenen Gleichung aufzuhalten oder zu zeigen, warum dieſelbe nicht möglich iſt, bildet er ſich kunſtvoll eine neue Gleichung ſammt ihrer Auflöſung.

Ein ähnliches Verfahren beobachtet Diophant in dem letzten unter dieſer Rubrik gehörigen Beiſpiel, in welchem er eine Function vom ſechſten Grade zu einem Quadrat machen ſoll, in welcher aber mehre Glieder fehlen. Die Gleichung hat die Form $x^6 - Ax^3 + Bx + c^2 = y^2$. Setzt man hier $y = x^3 + c$, ſo iſt $y^2 = x^6 + 2cx^3 + c^2$, alſo $-Ax^2 + B = 2cx^2$, und $x^2 = \frac{B}{A + 2c}$. Die Auflöſung wird alſo auf dieſem Wege ohne Schwierigkeit erlangt werden, wenn $\frac{B}{A + 2c}$ ein Quadrat iſt. In der Gleichung aber, welche Diophant IV, 19. zuerſt aus ſeiner Annahme herleitet, und welche lautet $x^6 - 16x^3 + x + 64 = y^2$, trifft die gefundene Bedingung nicht zu. Darum geht er nach ſeiner gewöhnlichen Methode der Zurückrechnung darauf aus, die Annahme ſo zu ändern, daß er eine Gleichung erhält, welche der gefundenen Bedingung entſpricht; ſo gewinnt er endlich die Gleichung $x^6 - 128x^3 + x + 4096 = y^2$; hier ſetzt er $y = x^3 + 64$, woraus ſich $x = \frac{1}{16}$ ergiebt.

Zweite Klaſſe. $Ax^n + Bx^{n-1} + \dots Mx + N = y^3$.

Wenn wir die einfachen Fälle $Ax^2 = y^3$ und $Ax^4 = y^3$, IV, 23. 26., übergehen, wo weiter nichts zu thun iſt, als daß man $y = mx$ ſetzt, ſo bleiben unter den Diophantiſchen Beiſpielen nur zwei Formen dieſer allgemeinen Gleichung übrig, nämlich $Ax^2 + Bx + C = y^3$ und $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^3$.

$Ax^2 + Bx + C = y^3$. Wir haben für dieſen Fall nur zwei ſehr einfache Beiſpiele. In dem erſtern, VI, 1., iſt die Formel $Ax^2 + Bx + C$ ein vollſtändiges Quadrat, und zwar $x^2 - 4x + 4$, da ſetzt Diophant, was am natürlichſten iſt, die Wurzel $x - 2$ gleich einer beſtimmten Kubikzahl, z. B. 8, ſo wird $x = 10$, $y = 8$.

Das zweite Beiſpiel, VI, 19., iſt ganz eigenthümlicher Art, und oben ſchon erwähnt worden. Es ſoll eine Kubikzahl gefunden werden, die um 2 größer als eine Quadratzahl ſei. Diophant ſetzt die Wurzel der Kubikzahl $x-1$, die Wurzel der Quadratzahl $x+1$, woraus ſich die Geichung ergiebt $x^3-3x^2+3x-1=x^2+2x+3$, oder $x^3+x=4x^2+4$ und $x=4$. Wir haben dieſe Gleichung als beſtimmte kubiſche Gleichung ſchon beſprochen. Hieher aber gehört die Frage: iſt es Zufall, daß dieſe Gleichung ſo einfach ausfällt, oder liegt in der Annahme von $x-1$ und $x-1$ für die Wurzeln der geſuchten Zahlen irgend eine die Einfachheit des Reſultats herbeiführende Kunſt? Diophant ſagt keine Sylbe über das Motiv, welches ihn beſtimmt, die Differenz der Wurzeln als gegeben zu betrachten. Der Umſtand aber, daß die Zahlen 27 und 25, welche das Verlangte leiſten, ſo nahe liegen, und die einzigen ganzen Zahlen ſind, welche der Gleichung $y^3=z^2+2$ genügen [14]), läßt vermuthen, daß Diophant ſeine Annahme $z=x+1$, $y=x-1$ aus dieſem ſchon vorher gekannten Falle hergeleitet habe, um dann durch eine ſcheinbar kunſtvolle Rechnung auf denſelben zurückgeführt zu werden. Zu dieſer Vermuthung ſind wir um ſo mehr berechtigt, als Diophant nicht unterlaſſen hätte, uns vorher auf einen falſchen Weg zu führen, hätte es in ſeinen Kräften geſtanden, uns hinterher den richtigen zu zeigen. Demnach ſind beide Beiſpiele der Gleichung $Ax^2+Bx+C=y^3$ nicht geeignet, bei Diophant in dieſer Theorie uns viel vorausſetzen zu laſſen.

$Ax^3+Bx^2+Cx+D=y^3$. Dieſe Gleichung läßt ſich auf directem Wege nur behandeln, wenn A oder D Kubikzahl iſt. Haben wir nämlich $a^3x^3+Bx^2+Cx+D=y^3$, ſo iſt $y=ax+\frac{B}{3a^2}$ zu ſetzen, ſo daß das kubiſche und das quadratiſche Glied aus der Gleichung verſchwindet; iſt dagegen Ax^3+Bx^2+Cx

14) Dieſe Bemerkung rührt von Fermat her. S. Observ. in Dioph. VI, 19. Fermatii opera math. p. 192. Wallis opera T. II. (Commerc. epist.) p. 770. In Brüchen erleidet die Gleichung allerdings unendlich viele Auflöſungen; ſetzt man z. B. in der Gleichung $y^3-2=z^2$, $y=3\pm y'$, $z=5\pm\frac{27}{10}y'$, ſo erhält man zwei zuſammengehörige Werthe für y und z, nämlich $y=\frac{129}{100}$, $z=\frac{383}{1000}$. U. ſ. w.

$+d^3=y^3$, ſo ſetzen wir $y=\frac{C}{3d^2}+d$, ſo daß die beiden niedrigſten Glieder aus der Endgleichung ausfallen. Beide Methoden laſſen ſich anwenden, wenn ſowohl A als D Kubikzahl iſt, wenn alſo die Gleichung die Form hat $a^3x^3+Bx^2+Cx+d^3=y^3$; auch kann man hier außerdem noch $y=ax+d$ ſetzen, welche Annahme das erſte und letzte Glied ausfallen läßt; demnach ſind wir in dieſem Falle im Stande, auf directem Wege drei Werthe für x anzugeben, von denen ſich dann im Allgemeinen beliebig viele wieder ableiten laſſen. In dieſer Geſtalt erſcheint Diophant's Beiſpiel IV, 27., und wir können mit Gewißheit behaupten, daß er von den drei Formen, die man dem y geben kann, nämlich $ax+\frac{B}{3a^2}$, $\frac{C}{3d^2}+d$, und $ax+d$ nur die letzte als anwendbar gekannt habe. Sein Beiſpiel iſt $8x^3+x^2-8x-1=y^3$; da nun ſetzt er $y=2x-1$, $y^3=8x^3-12x^2+6x-1$, alſo bleibt $x-8=6-12x$, und $x=\frac{14}{13}$. Da hier die beiden andern Annahmen negative Reſultate gegeben hätten, ſo würde aus deren Vernachläſſigung nicht folgen, daß ſie unſerm Auctor gerade unbekannt geweſen wären. Aber wir folgern das unzweifelhaft aus dem folgenden Beiſpiele IV, 28. Hier wird der Verfaſſer auf die Gleichung geführt $8x^3-x^2+8x-1=y^3$, welche er mit den Worten καὶ ἔστιν ἀδύνατον abfertigt. Wir wollen dieſe Unmöglichkeit einmal unterſuchen. Setzen wir hier, wie in dem vorigen Beiſpiel $y=2x-1$, alſo $y^3=8x^3-12x^2+6x-1$, ſo wird $-x+8=-12x+6$, folglich $x=-\frac{2}{11}$, alſo erhalten wir durch dieſe Annahme ein nach Diophant's Begriffen unmögliches Reſultat, nämlich ein negatives. Wie aber, wenn wir die beiden andern Methoden anwendeten? Sei alſo zunächſt $y=2x-\frac{1}{12}$, alſo $y^3=8x^3-x^3+\frac{1}{24}x-\frac{1}{1728}$; nun heben ſich die beiden erſten Glieder weg und es bleibt die Gleichung übrig $8x-1=\frac{1}{24}x-\frac{1}{1728}$, woraus ſich $x=\frac{1727}{13752}$, demnach $y=2x-\frac{1}{12}=\frac{577}{3488}$, alſo beides poſitiv findet. Sei ferner nach der zweiten Methode $y=\frac{8}{3}x-1$, ſo iſt $y^3=\frac{512}{27}x^3-\frac{64}{3}x^2+8x-1$; hier heben ſich die beiden letzten Glieder weg, und es bleibt, wenn man den Reſt durch x^2 dividirt,

$8x - 1 = \frac{512}{27}x - \frac{64}{3}$, woraus ſich ebenfalls ein poſitives, alſo Diophantiſch mögliches Reſultat, nämlich $x = \frac{549}{296}$, $y = \frac{146}{37}$ ergiebt. Daß alſo Diophant eine Gleichung, in welcher eine Methode einen unbrauchbaren, zwei andern aber brauchbare Werthe für x geben, als unauflösbar verwirft, beweiſt wohl augenſcheinlich, daß er dieſe beiden andern Methoden nicht gekannt habe. Noch haben wir den ſpeciellen Fall, wenn C und $D = 0$ ſind, alſo

$Ax^3 + Bx^2 = y^3$. Setzt man hier $y = mx$, ſo wird $x = \frac{m^3 - A}{B}$. Diophant's Beiſpiele ſind IV, 6., wo $x^3 + 16x^2 = y^3$, und IV, 30., wo $x^3 - 2x^2 = y^3$. In dem erſten Beiſpiel ſetzt er $y = 2x$, im zweiten $y = \frac{1}{2}x$, und findet in beiden Fällen $x = \frac{16}{7}$.

b) Doppelte Gleichung.

Hieher zähle ich einige Beiſpiele, in welchen Diophant von zwei verſchiedenen Functionen von x die eine zu einem Quadrat, die andere zu einem Kubus zu machen befiehlt. Die beiden erſten Beiſpiele der Art ſind ſehr einfach. Es ſoll nämlich VI, 21. $4x + 2$ ein Kubus, und die Hälfte davon, nämlich $2x + 1$, ein Quadrat werden. Setzt man alſo $4x + 2 = y^3$ und $2x + 1 = z^2$, ſo iſt $y^3 = 2z^2$. Es kommt alſo nur darauf an, eine Kubikzahl zu finden, welche das Doppelte einer Quadratzahl iſt; ſolche Zahlen ſind z. B. 8 und 4, welche Diophant annimmt; er ſetzt daher $4x + 2 = 8$ oder $2x + 1 = 4$, ſo wird $x = \frac{3}{2}$. Setzt man im Allgemeinen $z = my$, ſo wird $y = 2m^2$, $z = 2m^3$, $x = \frac{4m^6 - 1}{2}$. Umgekehrt iſt in dem zweiten Beiſpiel VI, 22. x ſo zu beſtimmen, daß $4x + 2$ ein Quadrat und $2x + 1$ ein Kubus werde; ſetzt man alſo $2x + 1 = y^3$, $4x + 2 = z^2$, ſo iſt $z^2 = 2y^3$; man darf alſo nur ein Quadrat ſuchen, welches das Doppelte einer Kubikzahl iſt. Diophant nimmt die Zahlen 16 und 8 an, und findet daraus $x = \frac{7}{2}$. Setzt man allgemein $z = my$, ſo wird $y = \frac{1}{2}m^2$, $z = \frac{1}{4}m^3$, $x = \frac{m^6 - 8}{16}$. In beiden Beiſpielen iſt alſo die Auflöſung Spielerei.

Etwas

Etwas complicirter iſi das Beiſpiel **VI**, 23. Hier ſoll $2x^2 + 2x = y^2$, $x^3 + 2x^2 + x = z^3$ ſein. Diophant ſetzt $y = mx$ (ſiehe das folgende Kapitel), ſo wird aus der erſten Gleichung $x = \frac{2}{m^2-2}$, demnach $2x^2 = \frac{8}{(m^2-2)^2}$, $x^3 = \frac{8}{(m^2-2)^3}$, folglich, wenn man dieſe Werthe in die zweite Gleichung ſubſtituirt, $z^3 = \frac{8}{(m^2-2)^3} + \frac{8}{(m^2-2)^2} + \frac{2}{m^2-2} = \frac{2m^4}{(m^2-2)^3}$. Es bleibt alſo weiter nichts zu thun übrig, als $2m^4$ zu einem Kubus zu machen; aber $2m^4$ wird ein Kubus, wenn $2m$ ein Kubus iſt; Diophant ſetzt $2m = 8$, ſo wird $m = 4$, alſo $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{4}{7}$, $z = \frac{4}{7}$. Im Allgemeinen hätte man, wenn die Gleichungen $Ax^3 + Bx^2$ $Cx = z^3$, $B_1x^2 + C_1x = y^2$ gegeben wären, erhalten $x = \frac{C_1}{m^2 - B_1}$, demnach $z^3 = \frac{AC_1^3}{(m^2-B_1)^3} + \frac{BC_1^2}{(m^2-B_1)^2} + \frac{CC_1}{m^2-B_1}$, und wenn man dieſen Ausdruck auf gleiche Benennung brächte, bliebe $CC_1m^4 - C_1(2B_1C - BC_1)m^2 + B_1C_1(B_1C - BC_1) + AC_1^3$ zu einem Kubus zu machen, was denn doch einige Schwierigkeiten haben würde. Die begünſtigenden Zufälligkeiten in dem vorliegenden Falle beſtehen darin, daß $2B_1C = BC_1$ und $B_1^2C + AC_1^2 = BB_1C_1$ iſt.

Ich habe nicht nöthig zu bemerken, daß lange nicht alle Aufgaben, in denen von Kubikzahlen die Rede iſt, auch wirklich auf kubiſche Gleichungen führen. Die meiſten Aufgaben der Art führt Diophant auf die Gleichung $Ax^3 = Bx^2$ oder $Ax^3 = Bx$. Man vergleiche **IV**, 1 — 13., **V**, 18 — 23. und mehre Aufgaben des ſechſten Buchs.

Werfen wir nun noch einen Rückblick auf den Inhalt dieſes Kapitels, ſo dürften ſich folgende Reſultate ergeben:

1. Ganz vollſtändig löſt Diophant nur die beſtimmten Gleichungen des erſten Grades.

2. In den beſtimmten Gleichungen des zweiten Grades kennt er nur eine Wurzel, ſelbſt in dem Falle, wenn beide Wurzeln poſitiv und reell ſind.

3. Von höhern Gleichungen kommt ein einziges leichtes Beiſpiel vor.

4. Die unbeſtimmten Gleichungen des zweiten Grades behandelt er nur vollſtändig, wenn das quadratiſche oder wenn das abſolute Glied fehlt; dagegen iſt ſeine Auflöſung der Gleichungen

$Ax^2+C=y^2$ und $Ax^2+Bx+C=y^2$ in mancher Beziehung beſchränkt.

5. Für die doppelte Gleichung des zweiten Grades hat er nur dann eine beſtimmte Regel, wenn in beiden Formeln das quadratiſche Glied fehlt; doch iſt auch da ſeine Auflöſung nicht allgemein. Für complicirtere Formeln kommen nur Beiſpiele unter beſonders begünſtigenden Umſtänden vor.

6. Die Auflöſung der höhern unbeſtimmten Gleichungen haftet faſt ganz an den Eigenthümlichkeiten einzelner günſtiger Zahlenbeiſpiele, und ſeine Methoden ſind mangelhaft.

Aus dieſen Sätzen, deren Wahrheit aus den eben ausgeführten Thatſachen ſich vollkommen bethätigt, erſehen wir, daß Diophant's algebraiſche Technik nichts weniger als vollendet iſt. Aber die Auflöſung der Gleichungen iſt auch gerade nicht dasjenige, was wir an ihm bewundern und was ihn noch heute ſo hoch ſtellt, ſondern im Gegentheil die bis zur Virtuoſität ausgebildete Kunſt, ſolche Gleichungen zu vermeiden, die er techniſch nicht löſen kann. Mit Erſtaunen betrachten wir ſeine Operationen, wenn er die ſchwierigſten Aufgaben durch irgend eine überraſchende Wendung auf eine ganz einfache Gleichung zurückführt. Wir bewundern in ihm nicht ſowohl die gigantiſche Kraft, die jedes Hinderniß, das ſich ihr entgegenſtellt, beſiegt, als vielmehr die ausgebildete Klugheit, die meiſtens gerade in dem Augenblicke, wenn man den Beginn des Kampfes erwartet, ſtill, aber ſicher dem Hinderniß aus dem Wege geht, und ſo zwar auf Umwegen, aber doch oft ſchneller als jene ans Ziel gelangt. Die Äußerungen und Erfolge dieſer Klugheit ſoll uns das nächſte Kapitel zeigen.

Neuntes Kapitel.

Diophant's Auflöſungsmethoden.

Diophant's Methoden in ihrer ganzen Mannigfaltigkeit vollſtändig darſtellen, hieße nichts andres, als ſein Buch abſchreiben. Die individuelle Beſchaffenheit faſt jeder Aufgabe giebt ihm Gelegenheit, ihr ein eigenthümliches Verfahren anzupaſſen oder auf ſie eine Wendung zu begründen, die ſich auf kein zweites Beiſpiel anwenden läßt. Seine Größe beruht nicht, um dem Vergleiche am Ende des vorigen Kapitels einen neuen hinzuzufügen, auf einer im hohen Grade ſich angeeigneten Kunſtfertigkeit im Gebrauch einer oder einiger Waffen, ſondern auf der unnachahmbaren Gewandtheit bei jeder ſich darbietenden Gelegenheit vermöge eines augenblicklichen coup d'esprit gerade die Waffe zu ergreifen, mit welcher die momentane feindliche Blöße am leichteſten verwundbar iſt. Iſt es indeß auch nicht möglich, in einiger Kürze alle ſeine Methoden darzuſtellen, ſo will ich doch verſuchen, einige häufiger wiederkehrende oder durch ihre Eleganz ſich beſonders auszeichnende Operationen hervorzuheben und wo möglich ihr wiſſenſchaftliches Princip durch eine allgemeine Darſtellung und durch eine zweckmäßige Zuſammenfaſſung des Gleichartigen unter gemeinſchaftliche Geſichtspuncte zu veranſchaulichen. Kann es mir gleich auf dieſem Wege nicht gelingen, die Fundgrube dieſes überreichen Genius zu erſchöpfen, ſo trägt doch vielleicht eine ſolche Darſtellung etwas dazu bei, in Andern den Trieb fernerer Forſchungen zu erwecken und die Begierde der eignen Anſchauung rege zu machen, auf welche ich nicht angelegentlich genug zurückweiſen kann. Unter allen hier zu erörternden Kunſtgriffen ſteht oben an

1. die geſchickte Annahme der Unbekannten.

Jedem Mathematiker iſt bekannt, wie wichtig dieſer Theil der Analyſis iſt, der ſich einzig und allein auf eine gewandte Benutzung der jedesmaligen beſondern Umſtände gründet und auf keine allgemeine Regeln zurückgeführt werden kann, und wie ſehr die leichte und elegante Expedition einer Aufgabe von der zweckmäßigen Annahme der Unbekannten abhängt. In dieſer Kunſt nun ſteht Diophant bis auf den heutigen Tag als unerreichtes Muſter da. Es iſt unmöglich, in einer überſichtlichen Darſtellung in dieſer Hinſicht den ganzen Reichthum dieſes großen Geiſtes zu erſchöpfen. Ich bin zufrieden, wenn es mir gelingt, die weſentlichſten Puncte, auf die es hier ankommt, einigermaßen aufzuklären.

Der erſte und einfachſte Gebrauch, den Diophant von ſeinem Talent zu einer geſchickten Annahme der Unbekannten macht, beſteht in der *Vermeidung gemiſchter quadratiſcher Gleichungen*. Hieher gehört zunächſt ſeine Behandlung der Aufgaben 30. 31. 33. des erſten Buchs, die ich oben ſchon berührt habe, und in denen reſpective Summe und Product, Summe und Summe der Quadrate, Differenz und Product zweier Zahlen gegeben ſind. Nennen wir die Summe s, die Differenz d, das Product p, die Summe der Quadrate q, ſo würden alle drei Aufgaben, wenn man die eine der geſuchten Zahlen x, die andere alſo $s-x$ oder $d+x$ ſetzen wollte, auf gemiſchte quadratiſche Gleichungen führen. Was thut dagegen Diophant? Er ſetzt in den erſten beiden Aufgaben nicht eine der Zahlen ſelbſt, ſondern ihre halbe Differenz, in der dritten Aufgabe dagegen ihre halbe Summe als die in die Rechnung einzuführende Unbekannte und gelangt dadurch auf eine reine quadratiſche Gleichung. Indem nun nämlich z. B. in der erſten Aufgabe die eine Zahl $\frac{1}{2}s+x$, die andere $\frac{1}{2}s-x$ iſt, ſo wird ihr Product $\frac{1}{4}s^2-x^2=p$, alſo $x=\sqrt{\frac{1}{4}s^2-p}$; es bleibt alſo weiter nichts zu thun übrig, als aus dieſer gefundenen halben Differenz und der gegebenen Summe die Zahlen ſelbſt zu finden. Ein ähnliches Verfahren finden wir auch in einigen beſtimmten Aufgaben des vierten Buchs angewandt, z. B. gleich in den erſten beiden Aufgaben deſſelben, welche verlangen, zwei Zahlen zu finden deren Summe und Summe der Kuben, oder deren Differenz und Differenz der Kuben gegeben iſt. Wollte man in der erſten Aufgabe die eine Zahl x,

Digitized by Google

die andere $s-x$ ſetzen, ſo würde die Summe ihrer Kuben $s^3 - 3s^2x + 3sx^2 = c$; und ähnlich in der zweiten Aufgabe. Dagegen ſetzt Diophant wieder in der erſten Aufgabe die halbe Differenz, in der zweiten die halbe Summe der Zahlen x; die Zahlen ſelbſt alſo $\frac{1}{2}s + x$, $\frac{1}{2}s - x$ in der erſten, $x + \frac{1}{2}d$, $x - \frac{1}{2}d$ in der zweiten; durch dieſe Annahme gelangt er auf reine quadratiſche Gleichungen.

Als ein Paar hübſche Beiſpiele dieſer Art führe ich noch folgende an:

IV, 16. *Drei Zahlen zu finden, ſo daß das Product aus der Summe von je zweien in die dritte eine gegebene Zahl ſei.*

Nennen wir der Kürze wegen die drei geſuchten Zahlen A, B, C, ſo ſoll nach Diophant's Annahme $(A+B)C = 35$, $(B+C)A = 27$, $(A+C)B = 32$ ſein. Die dritte Zahl, C, nennt Diophant x, ſo iſt $A+B = \frac{35}{x}$. Es kommt alſo darauf an, $\frac{35}{x}$ ſo in zwei Theile zu zerlegen, daß die beiden andern Bedingungen erfüllt werden. Sei einſtweilen $A = \frac{m}{x}$, $B = \frac{n}{x}$, ſo daß $m+n = 35$ iſt. Dann iſt $B+C = x + \frac{n}{x}$, $A+C = x + \frac{m}{x}$; jene Summe mit A, dieſe mit B multiplicirt, giebt die beiden Gleichungen $\frac{mn}{x^2} + m = 27$, $\frac{mn}{x^2} + n = 32$. Subtrahiren wir beide Gleichungen von einander, ſo erhalten wir $n - m = 5$. Es war aber $m + n = 35$. Demnach iſt $m = 15$, $n = 20$, alſo ſind die drei Zahlen nun nach der Reihe $\frac{15}{x}$, $\frac{20}{x}$ und x, welche ſo beſchaffen ſind, daß wenn von den beiden letzten Gleichungen eine erfüllt wird, auch die andere ſich verificirt; es iſt alſo $B+C = x + \frac{20}{x}$, demnach $(B+C)A = 15 + \frac{300}{x^2} = 27$, alſo $x^2 = \frac{300}{12} = 25$, folglich $x = 5$; und die drei Zahlen ſind 3, 4, 5. Die Art, wie Diophant die Größen m und n beſtimmt, da er dieſelben nicht durch allgemeine Symbole ausdrücken kann, wird uns Veranlaſſung geben, dieſe Aufgabe bei einer andern Gelegenheit noch einmal vorzunehmen.

IV, 38. *Drei Zahlen zu finden, ſo daß, wenn man zu dem Producte von je zweien die Summe derſelben beiden addirt, gegebene Zahlen herauskommen.*

Diophant nimmt an $AB+A+B=8$, $BC+B+C=15$, $AC+A+C=24$. Ich will dieſe Auflöſung wörtlich nach Diophant geben, nur daß ich ſtatt der ſich immer wiederholenden Ausdrücke die erſte, die zweite, die dritte Zahl die Zeichen A, B, C ſubſtituire. „Da ich alſo will, daß $AB+A+B=8$ ſei, ſo wird, wenn ich B beliebig annehme, dieſelbe von 8 abziehe und den Reſt durch $B+1$ dividire, der Quotient A ſein; es ſei alſo $B=x-1$; wenn ich dieſen Ausdruck von 8 ſubtrahire und den Reſt durch $B+1$ dividire, ſo wird $A=\frac{9}{x}-1$. Da ich ferner will, daß auch $BC+B+C=15$ ſei, ſo ſubtrahire ich $x-1$ von 15 und dividire den Reſt durch x, ſo wird $C=\frac{16}{x}-1$. Es bleibt alſo nur noch übrig, daß auch $AC+A+C=24$ ſei. Es iſt aber $AC+A+C=\frac{144}{x^2}-1$; dieſes iſt gleich 24; und es wird $x=\frac{12}{5}$ u. ſ. w." Diophant's Kunſt beſteht bei dieſer Auflöſung darin, daß er $B=x-1$ ſetzt; hätte er ſtatt deſſen $B=x$ angenommen, ſo wäre $A=\frac{8-x}{x-1}$, $C=\frac{15-x}{x-1}$ geworden, und er hätte die Geichung $\frac{143-2x-x^2}{(x+1)^2}=24$, oder $25x^2+50x=119$ erhalten.

Es erhellt leicht, daß die Auflöſung nicht immer rational werden wird. Nennen wir nämlich die drei geſuchten Zahlen x, y, z, die drei gegebenen a, b, c, ſo ſtellt die Aufgabe die drei Gleichungen

$$xy+x+y=a$$
$$yz+y+z=b$$
$$xz+x+z=c$$

und die Auflöſung dieſer Gleichungen ergiebt die Reſultate

$$x=-1+\sqrt{\frac{(a+1)(c+1)}{b+1}}$$
$$y=-1+\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}$$
$$z=-1+\sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}$$

Die Aufgabe würde alſo, um rationale Werthe für x, y, z zu liefern, die Determination erhalten müſſen, daß wenn man jede der drei gegebenen Zahlen um 1 vermehrt, das Product dieſen drei

Summen eine Quadratzahl ſein müßte; dadurch würden alle drei gefundenen Ausdrücke rational werden. Die Determination, welche Diophant giebt, iſt inſofern zu enge, als ſie verlangt, daß jede der drei Summen $a+1$, $b+1$, $c+1$ an und für ſich Quadratzahl ſei.

Dieſer Aufgabe ganz ähnlich iſt IV, 40., welche die Bedingungen ſtellt, daß

$$xy-(x+y)=a$$
$$yz-(y+z)=b$$
$$xz-(x+z)=c$$

Ferner finden wir Gelegenheit, Diophants Gewandtheit in der Annahme der Unbekannten wahrzunehmen bei ſeiner Behandlung der beſtimmten Aufgaben mit vielen Unbekannten. Da in dieſen Aufgaben bei jeder beliebigen Annahme die Funktionen für ſämmtliche Unbekannte ſich als nothwendig ergeben, ſo behält die Willkühr und das Genie hier weiter keinen Spielraum, als die Auswahl der urſprünglichen Annahme, und die Kunſt beſteht allein darin, dieſe Annahme ſo einzurichten, daß man die verſchiedenen Functionen für die geſuchten Zahlen auf möglichſt kurzem Wege und in möglichſt einfacher Form erhält. Darin iſt nun Diophant Meiſter, und eine große Anzahl von der Aufgabe des erſten Buchs würde vortrefflich geeignet ſein, noch heute als Muſter in Schulen vorgelegt zu werden. Hier nur einige wenige Beiſpiele.

Aufgabe I, 12. Eine gegebene Zahl auf zweierlei Weiſe in zwei andere Zahlen zu zerlegen, ſo daß eine Zahl der erſten Zerlegung zu einer der zweiten, und ebenſo die andere Zahl der zweiten zu der andern der erſten Zerlegung ein gegebenes Verhältniß habe.

Die Zahl 100 auf zweierlei Weiſe in zwei Zahlen zu zerlegen, ſo daß die größere Zahl der erſten Zerlegung doppelt ſo groß ſei, als die kleinere Zahl der zweiten Zerlegung; dagegen die größere Zahl der zweiten Zerlegung dreimal ſo groß als die kleinere Zahl der erſten Zerlegung.

Setze die kleinere Zahl der zweiten Zerlegung x, ſo wird die größere Zahl der erſten Zerlegung $2x$, alſo die kleinere Zahl der erſten Zerlegung $100-2x$, folglich die größere Zahl der zweiten Zerlegung $300-6x$ ſein. Es iſt alſo nur noch übrig, daß die beiden Zahlen der zweiten Zerlegung zuſammen 100 betragen; die Summe derſelben iſt aber $300-5x$; dieſes iſt alſo gleich 100, alſo $x=40$.

Demnach ſind die beiden Zahlen der erſten Zerlegung 80 und 20, die der zweiten Zerlegung 60 und 40.

Läßt ſich eine einfachere Auflöſung dieſer Aufgabe, in welche ein ungeübter Rechner von vorne herein vier Unbekannte einführen würde, denken? Ebenſo einfach iſt die Auflöſung der folgenden Aufgabe, welche dieſer ganz analog eine ſolche Zerſtückelung einer gegebenen Zahl in drei Paare verlangt. Beſonders glücklich ſind in dieſer Beziehung die Aufgaben 25 — 28. des erſten Buchs. Es werden in denſelben abwechſelnd drei und vier Unbekannte geſucht; weil aber in jeder dieſer Aufgaben ein Datum fehlt, ſo daß ſie nur reſpective zwei und drei Gleichungen zwiſchen drei und vier Unbekannten geben, ſo bleiben die Aufgaben unbeſtimmt, werden aber von Diophant alle dadurch zu beſtimmten erhoben, daß er eine der Unbekannten ſogleich willkührlich als gegeben annimmt. Wir wollen als Beiſpiel die Aufgabe 26. hier ausführen.

Man ſoll vier Zahlen finden, ſo daß, wenn jede derſelben an die nächſtfolgende einen beſtimmten Theil ihrer ſelbſt abgiebt, die vier Reſultate am Ende einander gleich werden. (*Εὑρεῖν τέσσαρας ἀριθμοὺς, ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ἐπιταχθὲν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι.*)

Es ſei beſtimmt, daß die erſte Zahl der zweiten ein Drittel, die zweite der dritten ein Viertel, die dritte der vierten ein Fünftel, die vierte der erſten ein Sechſtel abgebe, und daß ſie nach der gegenſeitigen Mittheilung (*μετὰ τὴν ἀντίδοσιν*) gleich werden.

Man ſetze die erſte Zahl, weil ſie ein Drittel abgeben ſoll, $3x$; die zweite, weil ſie ein Viertel abgeben ſoll, ſei 4. Nachdem alſo die zweite ein Viertel, nämlich 1, abgegeben, und von der erſten ein Drittel, nämlich x, erhalten hat, wird $x+3$. Es wird alſo auch die erſte Zahl, nachdem ſie ein Drittel, nämlich x, abgegeben, und ein Sechſtel der vierten erhalten hat, $x+3$ werden müſſen; wenn ſie aber ein Drittel abgiebt, ſo bleibt $2x$ übrig. Es wird alſo das Sechſtel der vierten nebſt den $2x$ zuſammen $x+3$ betragen müſſen; folglich iſt $3-x$ ein Sechſtel der vierten Zahl; die vierte Zahl iſt alſo $18-6x$. Nun ſoll ferner auch dieſe vierte, nachdem ſie ein Sechſtel abgegeben und ein Fünftel von der dritten erhalten, $x+3$ werden; wenn ſie aber ein Sechſtel ihres Werthes abgiebt, ſo bleibt $15-5x$ übrig; demnach iſt $15-5x$ ſammt dem Fünftel der dritten Zahl gleich $x+3$; demnach iſt ein Fünftel der

dritten Zahl $6x-12$; die dritte Zahl alſo iſt $30x-60$. Nun ſoll auch dieſe Zahl, nachdem ſie ein Fünftel ihrer ſelbſt, nämlich $6x-12$ abgegeben, und ein Viertel der zweiten, nämlich 1, erhalten hat, $x+3$ werden; ſie wird dann aber $24x-47$; das iſt gleich $x+3$, alſo wird $x=\frac{50}{23}$. Demnach iſt die erſte Zahl $\frac{150}{23}$, die zweite $\frac{92}{23}$, die dritte $\frac{120}{23}$, die vierte $\frac{114}{23}$, oder wenn man den Nenner abwirft, werden die geſuchten Zahlen 150, 92, 120, 114.

Wollte man hier die beſtimmte Annahme der zweiten Zahl vermeiden, ſo dürfte man ſie nur gleich $4y$ ſetzen; bliebe die erſte $3x$, ſo fände ſich die vierte $18y-6x$, die dritte $30x-60y$, und endlich $x=\frac{50}{23}y$. Man fände alſo für die vier Zahlen dieſelben Verhältniſſe, welche Diophant's Auflöſung ergiebt, und ſeine Auflöſung iſt allgemein, da er ſich am Schluſſe erlaubt, die gefundenen Werthe mit irgend einer beliebigen Zahl y, hier 23, zu multiplicieren.

Bloß andeuten will ich Diophant's Verfahren in folgenden Beiſpielen:

I, 16. Drei Zahlen zu finden, ſo daß die Summe von je zweien einer gegebenen Zahl gleich ſei.

Die drei gegebenen Summen ſeien a, b, c; nun ſetzt Diophant ſehr geſchickt die Summe der drei Zahlen x, ſo erhält man jede der Zahlen einzeln, wenn man von dieſer Geſammtſumme jede der drei Partialſummen abzieht; daher werden die einzelnen Zahlen $x-a$, $x-b$, $x-c$; dadurch ſind die drei Bedingungen der Aufgabe bereits gelöſt und es kommt nur noch darauf an, daß die Summe der für die drei Zahlen gefundenen Ausdrücke wirklich x ſei, das heißt, es bleibt die Gleichung $3x-(a+b+c)=x$ zu löſen übrig; daraus ergiebt ſich $x=\frac{a+b+c}{2}$.

Ebenſo löſt Diophant die folgende Aufgabe, in welcher vier Zahlen aus den vier Partialſummen von je dreien geſucht werden, indem er die Geſammtſumme x ſetzt. Ich bemerke nur noch, daß dieſe beiden Aufgaben einige Ähnlichkeit mit dem Exanthema von Thymaridas haben.

I, 18. Drei Zahlen zu finden, ſo daß die Summe von je zweien um eine gegebene Zahl größer iſt als die dritte.

Bezeichnen wir der Kürze wegen die drei geſuchten Zahlen mit A, B, C, die drei gegebenen mit $2a$, $2b$, $2c$, ſo ſoll $A+B$

$= C+2c$, $B+C=A+2a$, $A+C=B+2b$ ſein. Die Summe der drei geſuchten Zahlen, alſo $A+B+C$ ſei $=2x$. Nun war $A+B=C+2c$, alſo $A+B+C$, d. i. $2x=2C+2c$, alſo $C=x-c$; ebenſo findet man $B=x-b$, $A=x-a$. Es iſt alſo wieder weiter nichts zu thun, als die Ausdrücke für A, B, C zuſammen $=2x$ zu ſetzen.

Dieſer ganz analog iſt wieder die Aufgabe I, 20. Es ſollen von vier Zahlen $A+B+C=D+2d$, $B+C+D=A+2a$, $C+D+A=B+2b$, $D+A+B=C+2c$ ſein. Diophant ſetzt $A+B+C+D=2x$, dann wird wie vorher $D=x-d$, $C=x-c$, $B=x-b$, $A=x-a$; und es bleibt die Gleichung $4x-(a+b+c+d)=x$ zu löſen übrig, welche $x=\frac{a+b+c+d}{3}$ ergiebt.

I, 23. Drei Zahlen zu finden, ſo daß die größte um einen gegebenen Theil ($\frac{1}{3}$) der kleinſten größer ſei als die mittelſte, die mittelſte um einen gegebenen Theil ($\frac{1}{3}$) der größten größer als die kleinſte, die kleinſte aber um eine gegebene Zahl (10) größer ſei als ein gegebener Theil ($\frac{1}{3}$) der mittelſten.

Nennen wir die drei Zahlen, die größte A, die mittlere B, die kleinſte C, ſo ſetzt Diophant $C=x+10$; dann iſt $x=\frac{1}{3}B$, alſo $B=3x$; nach der Aufgabe $B=C+\frac{1}{3}A$, alſo $\frac{1}{3}A=B-C=2x-10$, folglich $A=6x-30$. Endlich ſoll $A=B+\frac{1}{3}C$ ſein, alſo iſt $\frac{1}{3}C=A-B=(6x-30)-3x=3x-30$, alſo $C=9x-90$. Es war aber $C=x+10$; folglich $x+10=9x-90$, $x=\frac{25}{2}$.

Wir haben hier eine bedeutende Anzahl beſtimmter Aufgaben kennen gelernt, die ſich in Diophant's Werk finden, und können daraus auf die Gründlichkeit eines Schriftſtellers ſchließen, welcher behauptet, Diophant habe mit den beſtimmten Aufgaben ſich gar nicht beſchäftigt. Vincenzo Riccati ſagt in der Einleitung zu ſeinen **Institutiones analyticae: De problematibus determinatis, quae resolutis aequationibus dignoscuntur, nihil omnino Diophantus: agit duntaxat de eo problematum semideterminatorum genere, quae respiciunt quadrata aut cubos numerorum, quae problemata ut resolvantur, quantitates radicales de industria sunt vitandae.** (Bei Cossali T. 1. p. 80.) Und Riccati verſichert die Griechen mit großem Eifer geleſen zu haben!

Den weiteſten Spielraum aber gewinnt Diophant's Talent in dieſer Annahme der Unbekannten bei den ſchwierigeren **unbeſtimmten Aufgaben.** Hier beſteht ſeine größte Kunſt darin, den geſuchten Zahlen, oder wenn deren nur eine vorhanden iſt, dieſer gleich durch die Annahme eine ſolche Form zu geben, daß alle Bedingungen der Aufgabe bis auf eine oder höchſtens zwei ohne weitere Rechnung erledigt werden, und nur noch die Erfüllung dieſer einen oder zwei dem Calcul anheimfällt. In einem Beiſpiel V, 21. werden ſogar durch die bloße Annahme alle Bedingungen gelöſt, und anſtatt der beſtimmten Zahlen, welche er ſuchte, erhält Diophant eine Auflöſung in allgemeinen Ausdrücken. Er will nämlich, um den Bedingungen der Hauptaufgabe zu genügen, drei Zahlen ſuchen, ſo daß jede ein um 1 vermindertes Quadrat, die Summe aller aber ein Biquadrat werde. Nun ſetzt er die erſte Zahl $x^4 - 2x^2$, die zweite $x^2 + 2x$, die dritte $x^2 - 2x$, ſo iſt die Aufgabe mit allen vier Erforderniſſen gelöſt; denn jeder dieſer Ausdrücke wird ein Quadrat, wenn man 1 dazu addirt, und die Summe aller drei iſt $= x^4$, alſo ſicher in jedem Falle ein Biquadrat. In den meiſten Fällen bleibt indeß eine Bedingung für die Rechnung übrig, ſeltener zwei, welche dann auf die im vorigen Kapitel erwähnten doppelten Gleichungen führen. Es mögen hier einige Beiſpiele dieſer Methode folgen, welche immer die Sache klarer machen als weitläufige Reflexionen.

II, 33. Drei Zahlen zu finden, ſo daß das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die folgende Zahl hinzu addirt.

Wollte man hier nach gewöhnlicher Sitte die drei Zahlen x, y, z nennen und die drei aus der Aufgabe hervorgehenden Gleichungen $x^2 + y = m^2$, $y^2 + z = n^2$, $z^2 + x = p^2$ löſen, ſo würde man ſich in nicht geringe Schwierigkeiten verwickeln. Diophant bedenkt dagegen, daß, wenn eine Zahl das um 1 vermehrte Doppelte einer andern iſt, dann das Quadrat der kleinern zu der größern addirt ein Quadrat giebt. Darum ſetzt er die erſte Zahl x, die zweite $2x + 1$, ſo iſt das Quadrat der erſten nebſt der zweiten gewiß ein Quadrat, nämlich $x^2 + 2x + 1$; und ſomit iſt eine von den drei Bedingungen, welche die Aufgabe ſtellte, gelöſt. Aber auf gleiche Weiſe ſetzt er die dritte um 1 größer als die doppelte zweite, alſo $= 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$, ſo iſt das Quadrat der zweiten, wenn man die dritte hinzu addirt, $= 4x^2 + 8x + 4$, alſo ebenfalls

ein Quadrat. Demnach iſt auf dieſe Weiſe auch die zweite Bedingung erfüllt; es bleibt alſo nur noch eine Bedingung übrig, die nämlich, daß auch das Quadrat der dritten Zahl, wenn man die erſte dazu addirt, ein Quadrat werde; das heißt, es fällt die Gleichung, $16x^2+25x+9=y^2$ der Algebra anheim. Allgemeiner hätte man die Annahme machen können, wenn man die erſte Zahl x, die zweite $2mx+m^2$, die dritte $2n(2mx+m^2)+n^2=4mnx+2m^2n+n^2$ geſetzt hätte. Es wären dann ebenfalls die beiden erſten Bedingungen erfüllt, und nur die dritte übrig geblieben in der Gleichung $16m^2n^2x^2+(16m^3n+8mn^3+1)x+(2m^2+n)^2n^2=y^2$, deren Auflöſung keine Schwierigkeit hat.

Ähnlich ſetzt er in der folgenden Aufgabe, in welcher drei Zahlen A, B, C ſo geſucht werden, daß A^2-B, B^2-C, C^2-A Quadrate werden, $A=x+1$, $B=2A-1=2x+1$, $C=2B-1=4x+1$, ſo ſind bereits die beiden erſten Bedingungen erfüllt, und die Erledigung der letzten wird Gegenſtand der Gleichung $16x^2+7x=y^2$.

III, 5. Drei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat iſt, und von denen die Summe je zweier die dritte um eine Quadratzahl übertrifft. (*Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι τοῦ λοιποῦ ὑπερέχωσι τετραγώνῳ.*)

Die Summe der drei Zahlen ſei x^2+2x+1; das Quadrat, um welches die Summe der erſten und zweiten die dritte übertrifft, ſei 1, ſo wird die dritte Zahl $\frac{1}{2}x^2+x$ ſein. Das Quadrat ferner, um welches die Summe der zweiten und dritten die erſte übertrifft, ſei x^2, ſo wird die erſte $x+\frac{1}{2}$ ſein. Folglich iſt die erſte und dritte zuſammen $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$, alſo die zweite $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$. Es bleibt alſo nur noch zu erledigen übrig, daß auch die Summe der erſten und dritten, wenn man die zweite davon abzieht, ein Quadrat werde, das heißt, daß $2x$ ein Quadrat werde.

Um die Operationen zu erläutern und zugleich das Verfahren allgemeiner darzuſtellen, gebe ich folgende Darſtellung. Die Aufgabe verlangt, daß die vier Formeln $A+B+C$, $A+B-C$, $A-B+C$, $-A+B+C$ Quadrate werden ſollen. Nun ſei

$$A+B+C=x^2+2mx+m^2$$
$$A+B-C=m^2$$
alſo
$$2C=x^2+2mx$$
$$C=\tfrac{1}{2}x^2+mx$$

ſei ferner $-A+B+C=x^2$, ſo erhält man, wenn man dieſe Gleichung von der erſten ſubtrahirt und zu der zweiten addirt und die Reſultate durch 2 dividirt,

$$A = mx + \tfrac{1}{2}m^2$$
$$B = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}m^2$$

Es bleibt alſo übrig, daß $A-B+C$ ein Quadrat werde; aber $A-B+C$ iſt $=2mx$, alſo $2mx=y^2$.

III, 6. giebt eine andere Auflöſung dieſer Aufgabe. Diophant ſucht zuerſt drei Quadratzahlen, deren Summe auch eine Quadratzahl iſt. Er findet als ſolche die Zahlen 4, 9, 36. Nun ſetzt er jede dieſer Quadratzahlen als einen der drei quadratiſchen Überſchüſſe, ſo verwandelt ſich die gegebene Aufgabe in eine früher gelöſte, drei Zahlen zu finden, ſo daß die Summe von je zweien um eine gegebene Zahl größer ſei als die dritte.

III, 7. Drei Zahlen zu finden, ſo daß die Summe von allen dreien und auch die Summe von je zweien eine Quadratzahl ſei.

Dieſe Aufgabe löſt Diophant ungemein einfach auf folgende Weiſe. Er ſetzt nämlich

die Summe aller drei Zahlen $= x^2+2x+1$
die erſte und zweite $= x^2$
ſo iſt die dritte $= 2x+1$
Sei ferner die zweite und dritte $= x^2-2x+1$
ſo wird die erſte $= 4x$
die zweite $= x^2-4x$

Es bleibt alſo nur noch übrig, die Summe der erſten und dritten, das iſt die Formel $6x+1$ zu einem Quadrat zu machen. Ähnlich iſt die Auflöſung von **III**, 10. 11. Es iſt übrigens leicht einzuſehen, wie auch das hier befolgte Verfahren etwas verallgemeinern könne, wenn man die Summe der drei Zahlen $x^2+2mx+m^2$ ſetzt und die übrigen Formeln dieſer conform bildet.

III, 16. Drei Zahlen zu finden, ſo daß das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man das Quadrat der dritten Zahl dazu addirt.

Die erſte Zahl ſei x, die zweite $4x+4$, die dritte 1, ſo ſind zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt, es iſt nämlich das Product der erſten und zweiten plus dem Quadrat der dritten ein Qua- nämlich $4x^2+4x+1$, und ebenfalls das Product der zweiten und dritten plus dem Quadrat der erſten, nämlich x^2+4x+4. Es

bleibt alſo nur übrig, daß auch das Product der erſten und dritten plus dem Quadrat der zweiten, das heißt, der Ausdruck $16x^2 + 17x + 16$ ein Quadrat werde.

IV, 14. Zwei Zahlen zu finden, ſo daß ſowohl jede Zahl für ſich, als auch die Summe und der Unterſchied beider ein Quadrat werde, wenn man 1 dazu addirt.

„Wenn ich von irgend einem Quadrate 1 ſubtrahire, ſo habe ich die erſte Zahl. Ich bilde alſo ein Quadrat von x mit einem beliebigen Coefficienten und der Zahl 1, z. B. von $3x+1$, ſo iſt das Quadrat $9x^2+6x+1$; ich ſetze alſo die erſte Zahl $9x^2+6x$. Da ferner die Summe beider Zahlen, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werden ſoll, und ebenſo die zweite, wenn man 1 dazu addirt; ſo ſuche ich irgend ein Quadrat, welches zu $9x^2+6x$ addirt ein Quadrat giebt. Ich nehme zwei Zahlen, deren Product $9x^2+6x$ iſt, z. B. $9x+6$ und x; ihr Unterſchied iſt $8x+6$ und die Hälfte davon $4x+3$, und das Quadrat dieſes letzten Ausdrucks wird $16x^2+24x+9$; davon nehme ich 1 weg und ſetze die zweite Zahl $16x^2+24x+8$; ſo wird jede Zahl für ſich und auch die Summe beider ein Quadrat, wenn man 1 addirt. Es iſt alſo nur noch übrig, daß auch der Unterſchied beider, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werde; es ſoll alſo $7x^2+18x+9$ einem Quadrate gleich ſein, u. ſ. w.“

Diophant ſetzt alſo, um ſein Verfahren allgemein zu betrachten, $A=(mx+1)^2-1=m^2x^2+2mx$. Da nun auch B ſowohl als $A+B$ ein um 1 vermindertes Quadrat ſein ſoll, ſo ſetzen wir vorläufig $B=p^2-1$, ſo wird $A+B+1=m^2x^2+2mx+p^2$; es fragt ſich alſo, wie muß p^2 beſchaffen ſein, damit dieſer letzte Ausdruck ein Quadrat werde. Nach Euklid's Elem. **II**, 5. iſt aber $ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, das heißt, wenn man zu einem beliebigen Produkt zweier Zahlen das Quadrat der halben Differenz der Zahlen addirt, ſo iſt dieſe Summe allemal wieder ein Quadrat. Darum zerlegt Diophant den Ausdruck für A in die Faetoren x und m^2x+2m, und erhält alſo $p=\frac{m^2-1}{2}x+m$, $p^2=\frac{m^4-2m^2+1}{4}x^2+m(m^2-1)x+m^2$, demnach $m^2x^2+2mx+p^2=\frac{(m^2+1)^2}{4}x^2+m(m^2+1)x+m^2$, und ſomit ſind drei Bedingungen der Aufgabe gelöſt, und der eigentlichen Berechnung ge-

hört nun noch die Erfüllung der vierten an, daß nämlich auch $B-A+1$ ein Quadrat werde; dieſe Bedingung giebt aber die in jedem Falle leicht zu löſende Gleichung $\frac{m^4-6m^2+1}{4}x^2+m(m^2-3)x+m^2=y^2$.

Mehre ſehr elegante Beiſpiele der Art findet, wer ſich die Mühe des Nachleſens geben will, in den Aufgaben **II**, 14. 24. **IV**, 15. 17. 21. 22. 23. und unzähligen andern. In dem folgenden Kapitel werden wir ſehen, wie beſonders die Porismen dazu gedient haben, Diophant eine mehrere Bedingungen der Aufgabe erledigende Annahme zu machen. Hier will ich nur noch einige Beiſpiele ausführen, in welchen der Gang, den Diophant nimmt, inſofern überraſchend erſcheint, als für die Gleichung gerade diejenige Bedingung aufgeſpart wird, die man da am wenigſten erwartet hätte..

II, 25. Eine gegebene Zahl in zwei Stücke zu zerlegen und dazu ein Quadrat zu ſuchen, ſo daß die Summe dieſes Quadrats und jedes Stückes wieder ein Quadrat werde.

Die gegebene Zahl ſei 20. Nimm zwei Zahlen, deren Quadrate zuſammengenommen kleiner ſind als 20, z. B. 2 und 3; legt man zu jeder von beiden x hinzu, ſo würden die Quadrate dieſer Ausdrücke x^2+4x+4 und x^2+6x+9. Wenn ich nun von dieſen beiden Ausdrücken x^2 wegnehme, ſo behalte ich die beiden geſuchten Stücke übrig, welche ſo beſchaffen ſind, daß, wenn ich x^2, alſo ein Quadrat, hinzu addire, Quadrate zur Summe geben. Wenn ich alſo x^2 von beiden wegnehme, ſo bleiben die Ausdrücke $4x+4$ und $6x+9$ übrig; die Summe beider muß alſo 20 ſein.

Ähnlich iſt die Auflöſung von **II**, 11. Zwei Quadrate zu finden, deren Differenz eine gegebene Zahl ſei. Diophant nimmt die Ausdrücke von $x+a$ und x, deren Differenz der gegebenen Zahl 6 gleich ſoll; dieſe Differenz iſt aber $2ax+a^2$; folglich $2ax+a^2=6$, $x=\frac{6-a^2}{2a}$.

II, 31. Zwei Zahlen zu finden, ſo daß das Product aus beiden, ſowohl wenn man die Summe beider dazu addirt, als wenn man dieſelben ſubtrahirt, ein Quadrat gebe.

Diophant bedenkt, daß die Summe zweier Quadrate, ſowohl

wenn man das doppelte Product der Wurzeln addirt, als wenn man es ſubtrahirt, ein Quadrat wird; daher nimmt er zwei beliebige Zahlen, ax, bx, und ſetzt das Product der beiden geſuchten Zahlen $=(a^2+b^2)x^2$, und zwar die eine Zahl $(a^2+b^2)x$, die andere x. Nun wird $(a^2+b^2)x^2$ ein Quadrat, man mag $2abx^2$ dazu addiren oder davon ſubtrahiren; daher ſetzt er die Summe beider Zahlen $=2abx^2$. Da er aber vorher die Zahlen ſelbſt $(a^2+b^2)x$ und x geſetzt hatte, ſo iſt ihre Summe $(a^2+b^2+1)x$; folglich muß $(a^2+b^2+1)x=2abx^2$ ſein.

Indem ich in dieſer Beziehung noch auf die Aufgaben **II**, 26. 35. 36. **II**, 1. 2. 3. 4. 23. 24. verweiſe, will ich die Auflöſung von **VI**, 25. 26., den beiden letzten Diophantiſchen Aufgaben, hier noch kurz andeuten.

VI, 25. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß das Quadrat der Hypotenuſe ein Quadrat ſammt ſeiner Wurzel, wenn man es aber durch eine Kathete dividirt, die Summe eines Kubus und ſeiner Wurzel werde.

Man ſetze die eine Kathete x, die andere x^2, ſo ſind beide Bedingungen der Aufgabe erfüllt; es iſt nämlich das Quadrat der Hypotenuſe $=x^4+x^2$, alſo die Summe eines Quadrats und ſeiner Wurzel, und derſelbe Ausdruck dividirt durch die Kathete x giebt x^3+x, alſo die Summe eines Kubus und ſeiner Wurzel. Es iſt alſo, damit das Dreieck durch rationale Zahlen ausgedrückt werde, nur noch nöthig, daß x^4+x^2 eine Quadratzahl ſei. Demnach behält an dieſer ſcheinbar ſchwierigen Aufgabe die Algebra nichts weiter zu thun, als den Ausdruck x^2+1 zu einem Quadrat zu machen. Hätte man nach der gewöhnlichen Formel die Seiten des Dreiecks m^2+n^2, m^2-n^2, $2mn$ geſetzt, ſo hätte die Aufgabe auf die beiden, wahrlich nicht leicht zu löſenden Gleichungen geführt $m^4+2m^2n^2+n^4=x^2+x$, und $\frac{m^4+2m^2n^2+n^4}{m^2-n^2}$ oder $\frac{m^4+2m^2n^2+n^4}{2mn}=y^3+y$.

VI, 26. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß die eine Kathete durch eine Kubikzahl, die andere durch die Differenz einer Kubikzahl und ihrer Wurzel, die Hypotenuſe durch die Summe einer Kubikzahl und ihrer Wurzel ausgedrückt ſei.

Die

Die Hypotenuſe ſei x^3+x, die zweite Kathete x^3-x, ſo wird die erſte Kathete $2x^2$ (nämlich $=\sqrt{(x^3+x)^2-(x^3-x)^2}$). Es bleibt alſo nur noch übrig, daß $2x^2$ eine Kubikzahl werde.

In allen dieſen Beiſpielen werden von n Bedingungen, deren Erfüllung die Aufgabe fordert, $(n-1)$ gleich durch die Annahme erledigt. Beiſpiele von dem Falle, in welchem nun $(n-2)$ Bedingungen auf dieſe Weiſe abſolvirt werden, führe ich nicht an, weil ſie kein eigenthümliches Intereſſe haben. Wer Beiſpiele der Art haben will, der vergleiche die in dem vorigen Kapitel angeführten Beiſpiele der doppelten Gleichung, welche allemal aus ſolchen Aufgaben hervorgegangen ſind. Ich erwähne hier nur noch, daß Diophant, wenn es ihm möglich iſt, dieſen zweiten Fall vermeidet, und lieber die Annahme ſo ſtellt, daß er nur eine Gleichung übrig behält. So fährt er, nachdem er die Aufgabe **II, 12.** auf die doppelte Gleichung $x+3=y^2$, $x+2=y_1{}^2$ geführt und dieſe aufgelöſt hat, alſo fort: ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλῆν ἰσότητα ἐμπέσῃ δεικτέον οὕτως. Anſtatt die Unbekannte, welche zu 2 und zu 3 addirt in beiden Fällen Quadrate zur Summe gebe, wie vorher x zu ſetzen, ſetzt er ſie x^2-2, wodurch die eine Bedingung bereits erfüllt wird; für die andere bleibt dann nur die Gleichung $x^2+1=y^2$ übrig. Ähnlich **II, 14. u. a. m.**

2. Methode der Zurückrechnung und Nebenaufgabe.

Nicht immer iſt die Annahme der Unbekannten in ſolcher Form, daß dadurch $(n-1)$ oder wenigſtens $(n-2)$ Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden, ſo einfach und leicht zu bewerkſtelligen, wie in den angeführten Beiſpielen. In ſolchen verwickelteren Fällen bedient ſich Diophant einer ganz eigenthümlichen Methode, welche ihm den Gebrauch allgemeiner Coefficienten erſetzt, und deren Weſen in folgenden Punkten beſteht. Er geht von einer ganz willkührlichen Annahme aus, und läßt ſich durch dieſe entweder auf Schwierigkeiten, deren Löſung nicht in ſeiner Macht ſteht, oder ad absurdum, häufig auf quadratiſche Gleichungen mit irrationalen Wurzeln führen. Dann bleibt er ſtehen und unterſucht, wie die einzelnen Zahlen des ſo gewonnenen ungünſtigen Reſultats entſtanden ſind und wie er die Annahme hätte machen müſſen, damit dieſe Schwierigkeiten wären vermieden worden, wodurch er dann häufig angewieſen wird, erſt eine eigene Aufgabe zu löſen, welche die in der erſten Aufgabe zu ma=

Digitized by Google

chende Annahme beſtimmt. Dieſe Operation nun, welche ganz dieſelbe iſt, die wir anwenden, indem wir aus einem in allgemeinen Ausdrücken gewonnenen Reſultate die Bedingungen unterſuchen, welche zwiſchen den einzelnen Größen ſtattfinden müſſen, nenne ich die Methode der Zurückrechnung; man könnte ſie auch mit eben dem Rechte die Methode des falſchen Anſatzes nennen, wenn man ſich nur hütet, ſie mit der in ſpäterer Zeit ſo berühmt gewordenen regula falsi oder positio falsa, mit der ſie gar nichts gemein hat, zu verwechſeln. Es macht indeß keinen weſentlichen Unterſchied, daß Diophant nicht immer dieſen ad absurdum führenden Weg einſchlägt, ſondern zuweilen, zumal bei leichteren Bedingungen, gleich aus der Betrachtung der Hauptaufgabe ohne Rechnung auf die Nebenaufgabe, von welcher die Beſtimmung der Form der Unbekannten abhängt, übergeht. Ich will, um zuerſt das Weſen der Methode zu erläutern, mit einem ganz einfachen Beiſpiele anfangen.

IV, 22. Drei (ſtetig) proportionirte Zahlen zu finden, ſo daß der Unterſchied von je zweien eine Quadratzahl ſei.

Diophant ſucht zuerſt die drei letzten Bedingungen zu erledigen, um dann die erſte, daß die Zahlen ſtetig proportionirt ſeien, der Gleichung zu überlaſſen. Zwei Bedingungen werden offenbar ſogleich erfüllt, wenn man die erſte Zahl x, die zweite $x+a^2$, die dritte $x+a^2+b^2$ ſetzt; dann iſt die Differenz der erſten und zweiten a^2, der zweiten und dritten b^2. Damit aber auch die Differenz der erſten und dritten eine Quadratzahl ſei, iſt nöthig, daß a^2+b^2 ein Quadrat ſei. Demnach iſt die Annahme von a^2 und b^2 nicht willkührlich, ſondern man muß dieſe Zahlen ſo wählen, daß ihre Summe a^2+b^2 ebenfalls Quadratzahl ſei. Vermöge ſeiner Methode gelangt Diophant zu dieſem Reſultate auf folgende Weiſe. Die erſte Zahl ſei x, die zweite $x+4$, die dritte $x+13$, ſo ſind zwei Bedingungen erfüllt; wenn nun auch der Unterſchied der dritten und erſten ein Quadrat wäre, ſo hätte man den einen Theil der Aufgabe gleich durch die Annahme gelöſt. Aber dieſer Unterſchied iſt 13; die Zahl 13 aber iſt die Summe zweier Quadratzahlen 4 und 9. Es kommt alſo zunächſt darauf an, zwei Quadrate zu ſuchen, deren Summe wieder ein Quadrat iſt; das iſt aber leicht mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks. Zwei Quadratzahlen ſind z. B. 9 und 16. Daher ſetze ich nun die erſte Zahl x, die zweite $x+9$, die dritte $x+25$; ſo ſind alle drei Unterſchiede Quadrate, nämlich 9, 16, 25.

Es bleibt alſo nur noch zu erfüllen übrig, daß auch die Zahlen in ſtetiger Proportion ſtehen, das heißt, daß das Product der erſten und dritten gleich ſei dem Quadrate der zweiten.

Dieſer Methode nun bedient ſich Diophant ungemein oft, und ich möchte ſie das Charakteriſtiſche ſeiner ganzen Analyſis nennen. Sie iſt es, aus der wahrſcheinlich ſeine Determinationen hervorgegangen ſind, ſie iſt es, welche uns über ſeine Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen Licht giebt und aus der wir manchen intereſſanten Wink über Diophant's Kenntniß der Zahlentheorie erhalten. In den meiſten Fällen ergiebt ſich die Bedingung der urſprünglichen Annahme nicht ſo leicht, wie in dem eben dargeſtellten Beiſpiele, ſondern die Erfüllung derſelben erfordert das Einſchieben einer eigenen Nebenaufgabe, welche häufig intereſſanter iſt, als die urſprüngliche Aufgabe ſelbſt. Aber eben weil die Methode ſo ſehr oft, in den letzten Büchern faſt bei jeder Aufgabe, angewandt wird, ſo muß ich mich hier bei der Anführung von Beiſpielen, welche das Weſen derſelben erläutern, ſehr beſchränken, und ich will daher nur einige ganz beſonders charakteriſtiſche Fälle hervorheben. Zuerſt führe ich hier ein einfaches Beiſpiel an, auf welches ich bei den vorigen Methoden ſchon hingedeutet habe.

IV, 16. Drei Zahlen zu finden, ſo daß die Summe von je zweien mit der dritten multiplicirt, eine gegebene Zahl zum Product gebe.

Indem Diophant $(A+B)C=35$, $(B+C)A=27$, $(A+C)B=32$, und $C=x$ ſetzt, gelangt er, wie wir oben geſehen haben, auf die Gleichung $A+B=\frac{35}{x}$. Nun ſetzt er willkührlich $A=\frac{10}{x}$, $B=\frac{25}{x}$, ſo wird $(B+C)A=\left(\frac{25}{x}+x\right)\frac{10}{x}=10+\frac{250}{x^2}$; und $(A+C)B=\left(x+\frac{10}{x}\right)\frac{25}{x}=25+\frac{250}{x^2}$. Dieſe beiden Producte ſind aber gegeben, und es ſoll $10+\frac{250}{x^2}=27$, $25+\frac{250}{x^2}=32$ ſein. Offenbar können dieſe beiden Gleichungen nicht neben einander beſtehen; denn nimmt man ihre Differenz, ſo gelangt man zu dem Unſinn $15=5$. Diophant ſagt nun ſo: Nun iſt der Unterſchied von 32 und 27 gleich 5; daher ſollte der Unterſchied von $25+\frac{250}{x^2}$ und $10+\frac{250}{x^2}$ ebenfalls 5 ſein. Aber die 25 rühren her von der Annahme für die zweite Zahl, die 10 von der Annahme für die

erſte; wir müſſen alſo dieſe beiden Zahlen ſo annehmen, daß ihr Unterſchied 5 wird. Dieſe beiden Zahlen ſind aber nicht willkührlich, ſondern ihre Summe iſt 35. Daher muß man 35 in zwei Theile theilen, ſo daß ihr Unterſchied 5 iſt. Die eine iſt alſo 15, die andere 20. Jetzt ſetze ich die erſte Zahl $\left(\text{ſtatt } \frac{10}{x}\right) = \frac{15}{x}$, die zweite $\left(\text{ſtatt } \frac{25}{x}\right) = \frac{20}{x}$ u. ſ. w.

IV, 9. Man ſoll zu einem Kubus und zu ſeiner Wurzel dieſelbe Zahl addiren, und beide ſollen dieſelbe Eigenſchaft behalten. (Κύβῳ καὶ πλευρᾷ προσϑεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριϑμόν, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά.)

Die Zahl, welche man addiren ſoll, ſei x, die Wurzel des Kubus aber x mit irgend einem Coefficienten, z. B. $2x$, ſo iſt der Kubus $8x^3$; demnach erhalte ich nach der Addition die Ausdrücke $3x$ und $8x^3+x$ und der erſtere ſoll die Kubikwurzel der letztern ſein; alſo iſt $8x^3+x=27x^3$ und $19x^3=x$ oder $19x^2=1$. Aber 1 iſt ein Quadrat; wenn nun auch $19x^2$ ein Quadrat wäre, ſo ließe ſich die Gleichung löſen. Aber die 19 ſind aus der Differenz der beiden Kubikzahlen $27x^3$ und $8x^3$ entſtanden; und $27x^3$ iſt der Kubus von $3x$, $8x^3$ der Kubus von $2x$; daher iſt 19 entſtanden aus der Differenz der Kubi von $3x$ und $2x$. Aber die $2x$ ſind beliebig angenommen, der Coefficient von $3x$ aber immer um 1 größer als der angenommene Coefficient von x. Es kommt alſo darauf an (ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν), zwei um 1 verſchiedene Zahlen zu ſuchen, ſo daß die Differenz ihrer Kubi ein Quadrat iſt. Die eine dieſer Zahlen ſei x, die andere $x+1$, ſo wird die Differenz ihrer Kubi $3x^2+3x+1$ ſein; dieſes ſei gleich dem Quadrate von der Wurzel $1-2x$, ſo wird $x=7$. Demnach wird die eine Zahl 7, die andere 8 ſein. Ich komme jetzt zu der urſprünglichen Aufgabe zurück, und nenne die Zahl, welche man addiren ſoll, x, die Wurzel des Kubus aber $7x$, ſo wird der Kubus $343x^3$; addirt man zu beiden x, ſo wird der erſte Ausdruck $8x$, der zweite $343x^3+x$; dieſes ſoll der Kubus von $8x$ ſein. Demnach iſt $512x^3=343x^3+x$, und es wird $x=\frac{1}{13}$; u. ſ. w.

IV, 25. Eine gegebene Zahl in zwei andere zu zerlegen, ſo daß das Product beider der Unterſchied zwiſchen einem Kubus und ſeiner Wurzel werde.

Die gegebene Zahl ſei 6; die erſte der geſuchten Zahlen ſei x,

Digitized by Google

ſo iſt die andere $6-x$; ihr Product $6x-x^2$ ſoll alſo die Differenz zwiſchen einem Kubus und ſeiner Wurzel ſein. Ich bilde den Kubus von einer Wurzel, welche x mit irgend einem Coefficienten weniger 1 iſt, z. B. von $2x-1$; der Kubus weniger der Wurzel macht $8x^3-12x^2+4x$, und ſoll $=6x-x^2$ ſein. Wenn nun die Coefficienten von x auf beiden Seiten gleich wären, ſo würde x nur in der zweiten und dritten Potenz übrig bleiben und x würde rational werden (καὶ εἰ ἦσαν οἱ ςοὶ ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι, λοιπὸς ἐγίνετο ἰσῶσαι κύβους ἴσους δυνάμεσι, καὶ ὁ ςὸ ἦν ῥητός). Aber die $4x$ ſind die Differenz von $2x$ und dreimal $2x$; wenn man aber $2x$ von dreimal $2x$ abzieht, ſo bleiben zweimal $2x$; die Zahl 6 aber iſt nach der Vorausſetzung gegeben. Es kommt alſo darauf an, eine Zahl zu ſuchen ſtatt der obigen $2x$, ſo daß ihr doppelter Coefficient 6 iſt; eine ſolche Zahl iſt $3x$. Nun ſuche ich wieder $6x-x^2$ gleich einem Kubus weniger ſeiner Wurzel zu machen, und ſetze die Wurzel des Kubus $3x-1$, ſo wird der Kubus weniger der Wurzel $27x^3-27x^2+6x$; und das iſt gleich $6x-x^2$, und x wird $=\frac{26}{27}$. Demnach ſind die geſuchten Zahlen $\frac{26}{27}$ und $\frac{136}{27}$.

Um Diophant's Verfahren zu veranſchaulichen, wiederhole ich es hier kurz in allgemeinen Ausdrücken. Die gegebene Zahl ſei a, die geſuchten ſeien x und $a-x$, ſo iſt ihr Product $ax-x^2$. Setzt man nun die Seite des Kubus $mx-1$ (1, damit dieſes Glied, welches dem Kubus und der Wurzel gemeinſchaftlich bleibt, bei der Subtraction ſich weghebe), ſo wird der Kubus $m^3x^3-3m^2x^2+3mx-1$, alſo die Differenz zwiſchen Kubus und Wurzel $m^3x^3-3m^2x^2+2mx=ax-x^2$. Damit hier die erſten Potenzen ſich wegheben, muß er ſo genommen werden, daß $2m=a$ wird; und gerade das iſt auch das Reſultat von Diophant's Unterſuchung.

IV, 26. Eine gegebene Zahl in drei andere zu zerlegen, ſo daß das Product aus allen dreien eine Kubikzahl werde, deren Wurzel gleich iſt der Summe der Unterſchiede zwiſchen je zweien.

Die gegebene Zahl ſei 4, und da das Product aus allen ein Kubus ſein ſoll, ſo ſetze ich daſſelbe $=8x^3$; die Kubikwurzel iſt $2x$. Wenn man aber drei ungleiche Zahlen hat, ſo iſt die Summe der

Unterſchiede von je zweien gleich dem doppelten Unterſchiede der größten und kleinſten. Demnach iſt $2x$ der doppelte, alſo x der einfache Unterſchied der größten und kleinſten der drei Zahlen. Die kleinſte ſei z. B. $2x$, ſo iſt die größte $3x$. Und da das Product aus allen dreien $8x^3$, das Product aus der größten und kleinſten aber $6x^2$ iſt, ſo iſt die mittlere $\frac{4}{3}x$. Wenn nun dieſe mittlere größer als die kleinſte, und kleiner als die größte wäre, ſo wäre die Aufgabe gelöſt. Aber die mittlere entſtand dadurch, daß wir 8 dividirten durch das Product der größten und kleinſten; dieſe erſte und zweite ſind aber nicht beliebig, ſondern um 1 verſchieden. Darum bin ich darauf hingeführt, zwei um 1 verſchiedene Zahlen zu ſuchen, ſo daß der Quotient, der entſteht, wenn ich 8 durch das Product beider dividire, kleiner als die größere und größer als die kleinere von beiden Zahlen werde. Die kleinere Zahl ſei x, ſo iſt die größere $x+1$, alſo die mittlere $\frac{8}{x^2+x}$. Dieſer Ausdruck ſoll alſo größer als x und kleiner als $x+1$ ſein. Da der Unterſchied beider 1 iſt, ſo iſt der Unterſchied zwiſchen $\frac{8}{x^2+x}$ und x kleiner als 1; daher iſt $\frac{8}{x^2+x}+1$ größer als $x+1$, oder $\frac{x^2+x+8}{x^2+x}>x+1$ und $x^2+x+8>x^3+2x^2+x$ oder $8>x^3+x^2$. Ich bilde einen Kubus, welcher die Glieder x^3+x^2 enthält; ſeine Wurzel iſt $x+\frac{1}{3}$. Da nun 8 größer iſt als x^3+x^2 und auch $(x+\frac{1}{3})^3$ größer größer iſt als x^3+x^2, ſo ſetze ich $8=(x+\frac{1}{3})^3$, ſo ſind auch die Kubikwurzeln einander gleich, alſo $x+\frac{1}{3}=2$, und $x=\frac{5}{3}$. Gehe ich nun auf die Annahme zurück, ſo wird die kleinſte Zahl $\frac{5}{3}$, die größte $\frac{8}{3}$, die mittlere alſo (8 dividirt durch $\frac{40}{9}$, das iſt) $\frac{9}{5}$; oder wenn ich alle mit 15 multiplicire, wird die erſte 40, die zweite 27, die dritte 25. Der gemeinſchaftliche Diviſor 15 iſt nämlich weggeworfen, und es ſind drei Zahlen gefunden worden, ſo daß das Product derſelben eine Kubikzahl iſt, welches die Summe ihrer Unterſchiede zur Wurzel hat. Jetzt ſetze ich die erſte Zahl $40x$, die zweite $27x$, die dritte $25x$, ſo iſt auch das Product dieſer ein Kubus, deſſen Wurzel die Summe der drei Unterſchiede iſt. Die drei Zahlen ſollen aber zuſammen der gegebenen Zahl 4 gleich ſein. Daher bleibt die Gleichung $92x=4$ übrig, und x iſt $=\frac{1}{23}$.

Nennen wir die drei Zahlen A, B, C, ſo daß $A>B$, $B>C$, ſo verlangt die Aufgabe, daß 1) $A+B+C=a$, 2) ABC gleich einem Kubus, z. B. $8x^3$, und 3) $(A-B)+(B-C)+(A-C)$

das iſt $2(A-C)=\sqrt[3]{8x^3}=2x$, alſo $A-C=x$ ſei. Nun ſetzt Diophant $C=mx$, alſo $A=(m+1)x$, ſo wird $B=\frac{8x}{m(m+1)}$; und es kommt alſo zunächſt darauf an, daß $\frac{8}{m(m+1)}$ größer als m und kleiner als $m+1$ iſt. In der ſehr geiſtreichen Erfüllung dieſer Bedingung iſt Diophant's Vortrag nicht ganz vollſtändig. Zuerſt ſoll $\frac{8}{m^2+m}>m$, alſo $8>m^3+m^2$ ſein. Nun bildet Diophant einen Kubus, der die beiden Glieder m^3+m^2 enthält, deſſen Wurzel alſo $m+\frac{1}{3}$ iſt, ſo iſt dieſer Kubus $m^3+m^2+\frac{1}{3}m+\frac{1}{27}$, alſo jedenfalls größer als m^3+m^2; da nun auch $8>m^3+m^2$ ſein ſollte, ſo ſetzt er $8=(m+\frac{1}{3})^3$, alſo $2=m+\frac{1}{3}$. Es ſollte aber auch $\frac{8}{m^2+m}<m+1$, alſo $8<m^3+2m^2+m$ werden. Nun war $8=m^3+m^2+\frac{1}{3}m+\frac{1}{27}$; dieſer Ausdruck ſoll alſo $<m^3+2m^2+m$, folglich $m^2+\frac{2}{3}m>\frac{1}{27}$ werden; dieſe Bedingung aber wird durch die obige Annahme $2=m+\frac{1}{3}$ oder $m=\frac{5}{3}$ erfüllt. Der Werth $m=\frac{5}{3}$ in die obigen Ausdrücke $A=(m+1)x$, $B=\frac{8x}{m^2+m}$, $C=mx$ eingeſetzt, giebt das Verhältniß der drei geſuchten Zahlen zu einander, und der Umſtand, daß die Summe aller drei gleich a ſein ſoll, giebt die Zahlen ſelbſt.

IV, 29. Zwei Zahlen zu finden, ſo daß ihr Product ein Kubus wird ſowohl wenn man die Summe beider dazu addirt, als auch wenn man dieſe Summe ſubtrahirt.

Da das Product, wenn man die Summe dazu addirt, eine Kubikzahl ſein ſoll, ſo ſetze man dieſe gleich 64. Da ferner das Product weniger der Summe eine Kubikzahl ſein ſoll, ſo ſetze man dieſe gleich 8. Die Differenz dieſer beiden Kubikzahlen, 56, wird alſo der doppelten Summe der Zahlen, die Summe alſo gleich 28 ſein. Die Summe und das Product zuſammen aber ſind 64, alſo das Product 36. Es kommt alſo darauf an, zwei Zahlen zu finden, deren Product 36 und deren Summe 28 iſt. Die Zahlen ſeien $14+x$ und $14-x$, ſo iſt ihre Summe 28; ihr Product aber iſt $196-x^2$; alſo $196-x^2=36$, und $x^2=160$. Wäre nun 160 eine Quadratzahl, ſo wäre die Aufgabe gelöſt. Aber 160 iſt der Unterſchied von 196 und 36; 196 ferner iſt das Quadrat von 14, und 14 iſt die Hälfte von 28; daher iſt 196 das Qua-

drat der Hälfte von 28. Aber 28 iſt die Hälfte von 56, alſo 14 ein Viertel von 56; 56 aber iſt die Differenz der beiden Kubikzahlen 64 und 8. Die 36 aber ſind die halbe Summe beider Kubikzahlen. Demnach bin ich dahin geführt worden, zwei Kubikzahlen zu finden, ſo daß, wenn der vierte Theil ihres Unterſchiedes aufs Quadrat erhoben und von dieſem Quadrate die halbe Summe ſubtrahirt wird, der Reſt eine Quadratzahl ſei. Die Wurzeln der beiden Kubikzahlen ſeien $x+1$ und $x-1$, ſo ſind die Kubi ſelbſt x^3+3x^2+3x+1 und x^3-3x^2+3x-1, ein Viertel ihres Unterſchiedes $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$, das Quadrat davon $\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$. Die halbe Summe der Kubikzahlen iſt x^3+3x; dieſe von dem Quadrate ſubtrahirt giebt $\frac{9}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{1}{4}$; dieſer Ausdruck, oder wenn man alles mit 4 multiplicirt, $9x^4-4x^3+6x^2-12x+1$ ſoll ein Quadrat ſein. Über die Auflöſung dieſer Gleichung haben wir oben geſprochen. Diophant ſetzt die gefundene Formel gleich dem Quadrate von $3x^2-6x+1$ und findet $x=\frac{9}{8}$. Demnach ſind die Wurzeln der beiden Kubikzahlen $\frac{17}{8}$ und $\frac{1}{8}$, alſo die Kubikzahlen ſelbſt, welche ſtatt 64 und 8 am Anfange zu ſubſtituiren ſind, $\frac{4913}{512}$ und $\frac{1}{512}$. Das Übrige verſteht ſich von ſelbſt und gehört nicht hieher.

IV, 44. Drei Zahlen zu finden, ſo daß die Summe aller drei in die erſte multiplicirt eine dreieckige Zahl, in die zweite multiplicirt eine Quadratzahl, in die dritte multiplicirt eine Kubikzahl gebe.

In dieſem Beiſpiele, welches zu den intereſſanteſten der ganzen Sammlung gehört, ſetzt Diophant die Summe der drei Zahlen x^2; die erſte ſei ein quadratiſcher Bruch, deſſen Zähler eine dreieckige Zahl iſt (δυναμοστὸν μονάδων τριγωνικῶν), z. B. $\frac{6}{x^2}$; die zweite ein quadratiſcher Bruch, deſſen Zähler eine Quadratzahl iſt, z. B. $\frac{4}{x^2}$; die dritte ein quadratiſcher Bruch, deſſen Zähler eine Kubikzahl iſt, z. B. $\frac{8}{x^2}$. Durch dieſe Annahme wird erlangt, daß die Producte jeder der drei Zahlen in die Summe derſelben die verlangte Eigenſchaft haben; es bleibt alſo nur noch übrig, daß die Summe der Zahlen wirklich $=x^2$ iſt. Die Summe iſt aber $\frac{18}{x^2}$. Demnach haben wir $\frac{18}{x^2}=x^2$, oder $x^4=18$. Es ſollte alſo 18 eine Bi-

quadratzahl ſein. Aber 18 iſt die Summe einer dreieckigen, einer Quadrat- und einer Kubikzahl. Ich bin demnach dahin geführt worden, eine Biquadratzahl zu finden, welche die Summe einer dreieckigen, einer Quadrat- und einer Kubikzahl iſt. Die Biquadratzahl ſei x^4; die Quadratzahl x^4-2x^2+1; der Reſt $2x^2-1$ ſoll alſo die Summe einer dreieckigen und einer Kubikzahl ſein. Die Kubikzahl ſei 8; ſo ſoll der Reſt $2x^2-9$ eine dreieckige Zahl ſein. Aber jede dreieckige Zahl giebt, wenn man ſie mit 8 multiplicirt und zu dem Producte 1 addirt, ein Quadrat. Demnach ſoll $16x^2-71$ ein Quadrat ſein. Diophant bildet das Quadrat von der Seite $4x-1$, ſo wird $x=9$. Die dreieckige Zahl iſt alſo 153, die Quadratzahl 6400, die Kubikzahl 8. Nun kehrt er zu dem Anfange zurück, verwirft die urſprüngliche Annahme, und ſetzt die erſte Zahl $\frac{153}{x^2}$, die zweite $\frac{6400}{x^2}$, die dritte $\frac{8}{x^2}$, ſo wird ihre Summe $\frac{6561}{x^2}$ und dieſe ſoll gleich x^2 ſein; es iſt alſo $x^4=6561$, $x^2=81$, $x=9$, woraus ſich die drei Zahlen ergeben.

Wenn irgend eine, ſo iſt dieſe Aufgabe, deren Ausdruck unüberwindliche Schwierigkeiten herbeizuführen drohte, überraſchend gelöſt; freilich nicht ohne einige willkührliche Annahmen. Setzen wir mit Diophant die Biquadratzahl x^4, die Quadratzahl $(x^2-m^2)^2=x^4-2m^2x^2+m^4$, und die Kubikzahl p^3, ſo bleibt für die dreieckige Zahl der Ausdruck $2m^2x^2-m^4-p^3$ übrig; demnach muß nach dem angeführten Satze $16m^2x^2-8m^4-8p^3+1$ ein Quadrat werden. Da hier in Folge der Annahme für die Quadratzahl der Coefficient von x^2 eine Quadratzahl iſt, ſo hat im Allgemeinen die Auflöſung dieſer Gleichung keine Schwierigkeit; aber nicht jeder Werth von x iſt hier brauchbar; ſondern die Auflöſung muß ſo genommen werden, daß der Ausdruck für die dreieckige Zahl eine ganze Zahl werde, weil ein Bruch hier keinen Sinn geben würde. Hätten wir alſo für m und p ganze Zahlen angenommen, ſo müßte x entweder auch eine ganze Zahl oder ein Bruch ſein, deſſen Nenner m oder ein Theiler von m iſt, damit auch $2m^2x^2$ eine ganze Zahl wird. Setzen wir alſo $16m^2x^2-8m^4-8p^3+1=(4mx-q)^2=16m^2x^2-8mqx+q^2$, ſo wird $x=\frac{8m^4+8p^3+q^2-1}{8mq}$; demnach ſind die Zahlen m, p, q ſo anzunehmen, daß $8m^4+8p^3+q^2-1$ durch $8q$ theilbar iſt. Hieraus folgt im Allgemeinen, daß q eine ungerade Zahl ſein müſſe; dann läßt ſich q^2-1, folg-

lich der ganze Ausdruck für x durch 8 dividiren; die näheren Beſtimmungen hängen von der Beſchaffenheit der in jedem Falle willkührlich gewählten Zahlen ab.

VI, 6. Ein rechtwinkliches Dreieck zu finden, ſo daß die Summe der Fläche und der einen Kathete einer gegebenen Zahl gleich werde.

Die gegebene Zahl ſei 7. Man nehme an, das Dreieck ſei der Form nach gegeben und habe die Seiten $3x$, $4x$, $5x$, ſo verlangt die Aufgabe, daß $6x^2+3x=7$ ſei. Wenn man nun zu dem halben Coefficienten von x den ſiebenfachen Coefficienten von x^2 addirt, ſo muß ein Quadrat herauskommen. Das geſchieht aber nicht. Daher muß man ein rechtwinkliches Dreieck ſuchen, ſo daß das Quadrat einer halben Kathete zu dem ſiebenfachen Inhalt addirt ein Quadrat giebt. Die eine Kathete ſei x, die andere 1, ſo ſoll $\frac{7}{2}x+\frac{1}{4}$, oder $14x+1$ ein Quadrat ſein. Damit wir aber das Dreieck in rationalen Zahlen erhalten, muß auch x^2+1 ein Quadrat ſein. Die Differenz beider Ausdrücke iſt x^2-14x, welche die Factoren x und $x-14$ hat. Die Hälfte ihres Unterſchiedes auf das Quadrat erhoben giebt 49, welches dem kleineren Ausdrucke gleich zu ſetzen iſt; und es wird $x=\frac{24}{7}$. Ich ſetze alſo die eine Kathete des Dreiecks $\frac{24}{7}$, die andere 1, oder (da dieſe Annahme bloß die Form des Dreiecks beſtimmen ſoll) die eine $24x$, die andere $7x$; die Hypotenuſe wird dann $25x$, und die Summe des Inhalts und der zweiten Kathete $84x^2+7x=7$, woraus $x=\frac{1}{4}$ gefunden wird. Ähnlich ſind die nächſtfolgenden Aufgaben.

So intereſſant es wäre, mehre Beiſpiele der Art aus Diophant's Werk zuſammenzuſtellen, weil die große Mannigfaltigkeit ſeiner Darſtellung faſt in jedem Beiſpiele eine ganz neue Anwendung dieſer Methode zeigt, ſo ſehe ich mich doch genöthigt, den Zweck dieſes Werks im Auge haltend, mir hier Schranken zu ſetzen, in welche das innige Wohlgefallen an den Äußerungen des Genie's ſich ſo ungern fügt. Ich muß mich begnügen, hier auf folgende noch beſonders ausgezeichnete Aufgaben zu verweiſen: IV, 19. 46. V, 18. 20. 21. VI, 3. 4. 5. 8. In einigen Beiſpielen, welche ich Behufs der weiter zu erwähnenden Methoden werde anführen müſſen, werden wir noch Gelegenheit haben, auch die hier beſprochene zu beobachten. Ich kann aber hier diejenigen Aufgaben nicht ganz ſtillſchweigend übergehen, in welchen dieſe Methode der Zurückrechnung zweimal und öfter gewiſſermaßen in einander geſchachtelt vorkommt.

Hieher gehören beſonders die Aufgaben IV, 43. 45. V, 33. VI, 13., von denen ich die letzte der Anſchaulichkeit wegen hier ausführen will.

VI, 13. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß der Inhalt deſſelben ein Quadrat wird, wenn man jede der Katheten dazu addirt.

„Man nehme das Dreieck als der Geſtalt nach gegeben an; es habe die Seiten $5x$, $12x$, $13x$; ſo ſoll zuerſt $30x^2+12x$ ein Quadrat ſein; es ſei $=36x^2$, ſo wird $x=2$. Für denſelben Werth von x ſoll aber auch $30x^2+5x$ ein Quadrat ſein; das geſchieht aber nicht. Darum kommt es darauf an, ein Quadrat zu ſuchen, ſo daß, wenn man 30 davon abzieht und den Reſt in 12 dividirt, dann den Quotienten auf das Quadrat erhebt, dieſes mit 30 multiplicirt und dazu den fünffachen Quotienten addirt, dieſe Summe ein Quadrat werde. Das geſuchte Quadrat ſei x^2. Wenn man davon 30 abzieht, und den Reſt in 12 dividirt, wird der Quotient $\frac{12}{x^2-30}$, das Quadrat davon $\frac{144}{x^4-60x^2+900}$, dieſes mit 30 multiplicirt $\frac{4320}{x^4-60x^2+900}$, und dazu fünfmal $\frac{12}{x^2-30}$ addirt, giebt $\frac{60x^2+2520}{x^4-60x^2+900}$. Dieſer Ausdruck ſoll Quadrat werden; der Nenner aber iſt ein Quadrat; daher muß auch $60x^2+2520$ ein Quadrat werden, das heißt, man ſoll ein Quadrat finden, welches mit 60 multiplicirt, und zu 2520 addirt, ein Quadrat giebt. Hätten wir nun das Dreieck ſo gebildet, daß $60+2520$ eine Quadratzahl geworden wäre, ſo hätten wir die Aufgabe gelöſt. Aber 60 entſteht aus dem Product der beiden Katheten; 2520 aber aus dem Product der größern Kathete, des Überſchuſſes der beiden Katheten, und des Inhalts. Wir kommen alſo darauf hin, ein rechtwinkliges Dreieck zu ſuchen, ſo daß das Product der beiden Katheten addirt zu dem Product aus der größern Kathete, dem Überſchuſſe der Katheten und dem Inhalt, ein Quadrat giebt. Wenn wir nun für die größere Kathete eine Quadratzahl annehmen, und alles durch dieſelbe dividiren, ſo haben wir die Aufgabe, daß die kleinere Kathete addirt zu dem Producte des Überſchuſſes der Katheten in den Inhalt ein Quadrat werde. Und dann kommt es nur darauf an, zu zwei gegebenen Zahlen, dem Inhalt und der kleinen Kathete, ein Quadrat zu ſuchen, welches mit einer der gegebenen Zahlen multiplicirt und zu der andern addirt ein Quadrat giebt. Das iſt aber

ſchon oben gezeigt worden, und das Dreieck hat die Seiten 3, 4, 5. Ich mache dieſe Zahlen zu Coefficienten von x (τάσσω αὐτὸν ἐν ςςοῖς), und es kommt darauf an, die Ausdrücke $6x^2+4x$ und $6x^2+3x$ zu Quadraten zu machen. Wenn wir die erſte Gleichung löſen, ſo wird $x=\frac{4}{m^2-6}$, alſo $x^2=\frac{16}{m^4-12m^2+36}$, folglich $6x^2+3x=\frac{12m^2+24}{m^4-12m^2+36}$. Dieſes ſoll ein Quadrat ſein. Man hat alſo ein Quadrat ſuchen, welches mit der kleinern gegebenen Zahl multiplicirt und zu der größern addirt ein Quadrat giebt. Ein ſolches Quadrat iſt 25; demnach iſt $m^2=25$, $m=5$. Wenn wir alſo $6x^2+4x$ zu einem Quadrat machen wollen, ſetzen wir es gleich $25x^2$, ſo wird $x=\frac{4}{19}$; die Seiten des geſuchten Dreiecks ſind alſo $\frac{12}{19}$, $\frac{16}{19}$, $\frac{20}{19}$."

Wir wollen den Gang, den Diophant genommen hat, Schritt für Schritt verfolgen. Diophant nimmt das geſuchte Dreieck als in den Seiten $5x$, $12x$, $13x$ der Form nach gegeben an; der Inhalt iſt alſo $30x^2$, und die Aufgabe führt auf die doppelte Gleichung $30x^2+12x=y^2$, $30x^2+5x=y_1^2$. Setzt man $y=nx$, ſo wird $x=\frac{12}{n^2-30}$; alſo $30x^2=\frac{4320}{(n^2-30)^2}$, $5x=\frac{60}{n^2-30}$ $=\frac{60n^2-1800}{(n^2-30)^2}$, folglich $\frac{60n^2+2520}{(n^2-30)^2}=y_1^2$. Es kommt alſo darauf an, den Zähler dieſes Bruchs zu einem Quadrat zu machen. Diophant verwirft die Formel als unauflösbar, weil $60+2520$ kein Quadrat iſt. Um nun eine andere Form des Dreiecks zu finden, welche auf eine auflösbare Gleichung führt, unterſucht er zunächſt durch ſeine Zurückrechnung, wie die Zahlen 60 und 2520 entſtanden ſind. Hätten wir die Katheten kx, k^1x, die Hypotenuſe hx genannt, ſo wäre der Inhalt $\frac{1}{2}kk^1x^2$; alſo ergäbe die Aufgabe die doppelte Gleichung $\frac{1}{2}kk^1x^2+kx=y^2$, $\frac{1}{2}kk^1x^2+k^1x^2=y_1^2$. Setzen wir nun $y=nx$, ſo erhalten wir aus der erſten Gleichung $x=\frac{k}{n^2-\frac{1}{2}kk^1}$, demnach $\frac{1}{2}kk^1x^2=\frac{\frac{1}{2}k^3k^1}{(n^2-\frac{1}{2}kk^1)^2}$,

$$k^1x=\frac{kk^1}{n^2-\frac{1}{2}kk^1}=\frac{kk^1n^2-\frac{1}{2}k^2k^{1\,2}}{(n^2-\frac{1}{2}kk^1)^2},$$

alſo $y_1^2=\frac{kk^1n^2+\frac{1}{2}kk^1(k-k^1)k}{(n^2-\frac{1}{2}kk^1)^2}$. Was alſo oben 60 war, der Coefficient von n^2, iſt das Product der beiden Katheten, die obigen 2520 aber, das abſolute Glied, iſt das Product aus der größern

Kathete k, dem Überſchuſſe der Katheten $k-k^1$, und dem Inhalt $\frac{1}{2}kk^1$. Dieſes Reſultat, welches uns die Formel geradezu verräth und welches Diophant durch Belauſchung des Ganges, den die Rechnung genommen, herausgebracht hat, giebt nun die Bedingung an die Hand, wie man das Verhältniß der Seiten des geſuchten Dreiecks beſtimmen müſſe, damit die Gleichung ſich löſen laſſe; unter den verſchiedenen Bedingungen aber, welche die Gleichung $Mx^2+N=y^2$ auflösbar machen, wählt Diophant diejenige aus, daß $M+N$ eine Quadratzahl ſei; er vereinfacht aber die Formel dadurch, daß er den beiden Producten gemeinſchaftlichen Factor k bereits als Quadratzahl annimmt. Dann bleibt nur übrig, das $k^1+\frac{1}{2}kk^1(k-k^1)$ ein Quadrat ſei. Hier nun macht Diophant in ſeiner Darſtellung einen Sprung, indem er ſagt: es kommt nur noch darauf an, zu zwei gegebenen Zahlen k^1 und $\frac{1}{2}kk^1$ ein Quadrat zu ſuchen, welches mit einer der gegebenen Zahlen multiplicirt und zu der andern addirt ein Quadrat mache. Dieſer Übergang ſetzt voraus, daß auch $k-k^1$ ein Quadrat ſei. Offenbar bezieht er ſich hier auf die vorhergehende zwölfte Aufgabe, in welcher er gelehrt hatte, ein rechtwinkliges Dreieck ſo zu finden, daß ſowohl k als $k-k^1$, als auch $k^1+\frac{1}{2}kk^1$ Quadratzahlen ſeien. Iſt nämlich außer k auch noch $k-k^1$ Quadratzahl, ſo hat die Auflöſung der Gleichung $k^1+\frac{1}{2}kk^1(k-k^1)=y^2$ keine Schwierigkeit, wenn man nach Aufg. 12. annimmt, daß die Summe der Coefficienten $k^1+\frac{1}{2}kk^1$ ebenfalls Quadratzahl iſt. Ein Dreieck, welches dieſen Forderungen genügt, iſt das aus den Seiten 3, 4, 5 gebildete und jedes ihm ähnliche. Hier iſt nämlich $k=4$, $k-k^1=1$, $k^1+\frac{1}{2}kk^1=9$, alſo alle drei in Rede ſtehende Größen Quadrate. Nun kehrt Diophant zu dem urſprünglichen Anſatze zurück, und bildet das Dreieck aus den Seiten $3x$, $4x$, $5x$, welche ihm die doppelte Gleichung, $6x^2+4x=y^2$, $6x^2+3x=y_1{}^2$ geben. Setzt er nun $y=nx$, ſo wird $x=\frac{4}{n^2-6}$, und $y_1{}^2=\frac{12n^2+24}{(n^2-6)^2}$. Da hier $12+24=36$, alſo Quadratzahl iſt, ſo giebt es nach dem Lemma VI, 12. unzählige Werthe für n, welche die Formel $12n^2+24$ zu einem Quadrate machen; es muß aber n ſo gefunden werden, daß $n^2>6$ iſt, weil $x=\frac{4}{n^2-6}$ war; darum iſt der erſte Werth $n=1$ unbrauchbar, und Diophant nimmt $n=5$, alſo $x=\frac{4}{19}$.

3. Gebrauch des Symbols für die Unbekannte in verſchiedenen Bedeutungen.

Schon die vorige Methode führte häufig die Unbequemlichkeit mit ſich, daß in zwei in einander gefügten Aufgaben das nämliche Zeichen ς° in ganz verſchiedener Bedeutung gebraucht wurde; indeß hatten wir es da doch immer mit zwei zwar in einander geſchobenen, aber doch leicht von einander zu trennenden Aufgaben zu thun. Auffallender und unbequemer wird dieſer mehrdeutige Gebrauch des Zeichens, wenn daſſelbe in der nämlichen Aufgabe, in einer und derſelben Operation zwei Bedeutungen hat, die nur in Gedanken von einander können geſchieden werden. Es finden ſich nämlich Aufgaben, in welchen Diophant die Einführung zweier Unbekannten nicht hat vermeiden können; weil er nun aber zur Bezeichnung derſelben nur ein Symbol hat, ſo tritt der Übelſtand ein, daß beide Unbekannte durch daſſelbe Zeichen ausgedrückt erſcheinen. Dieſes geſchieht entweder *ſucceſſive*, wo es dann weniger Unbequemlichkeit verurſacht, oder *implicite*, ſo daß ſogar eine Unbekannte als Function der andern, das heißt, x durch x ausgedrückt erſcheint. Beide Arten der Anwendung dieſer Methoden will ich an Beiſpielen erläutern.

Beiſpiele der erſten Art.

I, 22. *Eine gegebene Zahl in drei andere zu zerlegen, ſo daß jede der beiden äußerſten zu der mittelſten addirt, ein gegebenes Verhältniß zu der dritten habe.*

Es ſei aufgegeben, die Zahl 100 in drei Zahlen zu zerlegen, ſo daß die Summe der erſten und zweiten das Dreifache der dritten, die Summe der zweiten und dritten das Vierfache der erſten ſei. Die dritte Zahl ſei x, ſo iſt die Summe der erſten und zweiten $3x$, alle drei zuſammen alſo $4x$; die drei Zahlen zuſammen ſind aber 100; daher iſt x, das iſt, die dritte Zahl, $= 25$; die erſte und zweite zuſammen alſo 75. Da ferner die Summe der zweiten und dritten das Vierfache der erſten iſt, ſo wird, wenn man die erſte x nennt, die Summe der zweiten und dritten $4x$ ſein; die drei Zahlen zuſammen alſo $5x$; ſie ſind aber auch gleich 100; demnach iſt x, die erſte Zahl, $= 20$. Es iſt alſo die erſte 20, die dritte 25; die zweite alſo wird 55 ſein.

Dieſe Methode mit der vorigen vereinigt, ſo daß x oder vielmehr ς^{o} in nicht weniger als vier verſchiedenen Bedeutungen vorkommt, finden wir in der Aufgabe.

III, 18. Drei Zahlen zu finden, ſo daß das Product von je zweien zu der Summe derſelben beiden addirt, ein Quadrat giebt.

Die erſte Zahl ſei x, die zweite 3; ſo ſoll, wenn man ihr Product zu ihrer Summe addirt, $4x+3$ ein Quadrat werden, z. B. $=25$; dann wird $x=5\frac{1}{2}$. Die erſte Zahl iſt alſo $5\frac{1}{2}$, die zweite 3, und eine der Bedingungen iſt gelöſt; denn ihr Product ſammt ihrer Summe macht ein Quadrat. Es ſoll aber auch das Product ſammt der Summe der zweiten und dritten, und ferner das Product ſammt der Summe der erſten und dritten ein Quadrat machen. Sei nun die dritte x, ſo wird das Product und die Summe der zweiten und dritten wiederum $4x+3$; das Product und die Summe der erſten und dritten wird $\frac{13}{2}x+\frac{11}{2}$, und beide Ausdrücke ſollen Quadrate werden. Da aber in der einen Formel die Anzahl der Zahlen (d. i. der Coefficient von x) und der Einheiten größer iſt als in der andern, und ſie ſich auch nicht wie zwei Quadratzahlen zu einander verhalten, ſo iſt die gemachte Annahme unpaſſend. Wir ſind alſo darauf hingewieſen, zwei Zahlen zu finden, ſo daß nicht nur ihr Product zu ihrer Summe addirt ein Quadrat giebt, ſondern auch noch die um 1 vermehrten Zahlen ſich zu einander wie zwei Quadratzahlen verhalten. (Nennt man nämlich die erſte a, die zweite b, die dritte x, ſo ſoll erſtens $ab+a+b$ ein Quadrat ſein; ferner aber ſoll $ax+a+x$, d. i. $(a+1)x+a$, und ebenſo auch $(b+1)x+b$ ein Quadrat ſein; damit beide letzteren Bedingungen erfüllt werden können, müſſen ſich die Zahlen $a+1$ und $b+1$ wie Quadratzahlen zu einander verhalten.) Da nun, wenn eine Zahl um 3 größer als das Vierfache einer andern iſt, die um 1 vermehrten Zahlen ſich wie Quadratzahlen zu einander verhalten, ſo ſetze ich die erſte Zahl x, die zweite $4x+3$; ſo ſoll, wenn man das Product dieſer Zahlen zu ihrer Summe addirt, ein Quadrat herauskommen. Aber ihr Product zu ihrer Summe addirt giebt $4x^2+8x+3$; dieſes ſoll alſo ein Quadrat ſein. Ich bilde das Quadrat von $2x-3$, ſo wird es $4x^2-12x+9$, und x wird $\frac{6}{20}$ oder $\frac{3}{10}$. Daher wird die erſte Zahl $\frac{3}{10}$, die zweite $\frac{42}{10}$ oder $\frac{21}{5}$ ſein. Dadurch iſt nun eine

Forderung der Aufgabe erfüllt. Es ſind nun noch die beiden andern übrig. Ich ſetze jetzt die dritte Zahl x; ſo wird Product und Summe der zweiten und dritten $\frac{26}{5}x+\frac{21}{5}$; das ſoll ein Quadrat ſein, z. B. $=25$. Ferner iſt Product und Summe der erſten und dritten $\frac{13}{10}x+\frac{3}{10}$; das ſoll ebenfalls ein Quadrat ſein, z. B. 100. Ich multiplicire den erſten Ausdruck mit 25, ſo ſoll $130x+105$ ein Quadrat ſein; und den zweiten Ausdruck multiplicire ich mit 100, ſo ſoll auch $130x+30$ ein Quadrat ſein. Die Differenz beider iſt 75, und die Auflöſung der doppelten Gleichung giebt $x=\frac{7}{10}$. Demnach ſind die drei Zahlen $\frac{3}{10}$, $\frac{21}{5}$, $\frac{7}{10}$. (Diophant hat nämlich 75 in die Factoren 3 und 25 zerlegt, und $130x+105=196$ oder $130x+30=121$ geſetzt.)

Diophant ſetzt alſo, um einen kurzen Rückblick zu thun, zuerſt die erſte der geſuchten Zahlen x, die zweite 3, und findet $x=\frac{21}{2}$. Nun ſetzt er die dritte Zahl x. Da ihn dieſes aber zu keinem Reſultate führt, ſo ſetzt er von Neuem die erſte Zahl x, die zweite $4x+3$ (allgemeiner hätte er die zweite $n^2x\pm n^2-1$ ſetzen können) und findet daraus die erſte $\frac{3}{10}$, die zweite $\frac{21}{5}$; und nun ſetzt er abermals die dritte Zahl $=x$, die ſich dann gleich $\frac{7}{10}$ ergiebt.

Man könnte dieſe Auflöſung vermittelſt einer ſucceſſiven doppelten Annahme des Symbols für die Unbekannte eine Auflöſung in zwei Hieben, à deux coups, nennen. Die verſchiedenen unbekannten Zahlen werden nicht, in einander complicirt, durch ein und daſſelbe Verfahren gefunden, ſondern aus mehren von einander abgeſonderten Operationen gehen ſie nach einander einzeln hervor.

Übrigens ließe die letzte Aufgabe ſich ſehr leicht allgemein löſen. Nennt man nämlich die drei Zahlen x, y, z, ſo hat man die drei Gleichungen zu löſen:

$$xy+x+y=a^2$$
$$xz+x+z=b^2$$
$$yz+y+z=c^2$$

Aus den erſten beiden Gleichungen ergiebt ſich $y=\frac{a^2-x}{x+1}$, $z=\frac{b^2-x}{x+1}$. Subſtituirt man dieſe beiden Werthe in die dritte Gleichung, ſo erhält man

$$\frac{(a^2-x)(b^2-x)}{(x+1)^2}+\frac{a^2+b^2-2x}{x+1}=b^2$$

oder $$\frac{(a^2-x)(b^2-x)+(a^2+b^2-2x)(x+1)}{(x+1)^2}=b^2$$

Da

Da der Nenner ein Quadrat iſt, ſo kommt es nur noch darauf an, den Zähler zu einem Quadrate zu machen. Wenn wir die angedeuteten Rechnungen ausführen, ſo ergiebt ſich die Gleichung

$$a^2b^2+a^2+b^2-2x-x^2=m^2$$

und nach x aufgelöſt $x=-1+\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2-m^2+1}$ Nimmt man nun zwei dieſer Größen beliebig an, z. B. a und b, ſo iſt es in jedem beſtimmten Fall nicht ſchwer, unendlich viele Werthe für die dritte zu finden, welche x rational machen; es iſt dabei nur zu beachten, daß keine der drei geſuchten Zahlen negativ werde. Setzen wir z. B. $a^2=9$, $b^2=16$, ſo wird $x=-1+\sqrt{170-m^2}$. Hier kann m^2 allein in ganzen Zahlen die Werthe 1, 49 und 121 haben. Iſt nun

$m^2=1$	ſo iſt	$x=12$
„ $=49$	„ „	„ $=10$
„ $=121$	„ „	„ $=6$

Da nun $y=\frac{9-x}{x+1}$, $z=\frac{16-x}{x+1}$, ſo würde für die beiden zuerſt gefundenen Werthe für x die Zahl y negativ werden; demnach iſt nur der letzte brauchbar; drei Zahlen der Art ſind alſo außer den Diophantiſchen noch 6, $\frac{3}{7}$, $\frac{10}{7}$.

Beiſpiele der zweiten Art.

Wenn eine Gleichung von der Form $Ax^2+Bx=y^2$ die einzige oder wenigſtens die letzte Bedingung iſt, welche das geſuchte x erfüllen ſoll, ſo ſetzt Diophant y gleich irgend einem beſtimmten Vielfachen von x, dividirt dann die Gleichung durch x und findet x aus einer Gleichung des erſten Grades. Soll er z. B. **IV**, 23. den Ausdruck $x^2+\frac{5}{2}x$ zu einem Quadrate machen, ſo ſetzt er $x^2+\frac{5}{2}x=4x^2$, ſo wird $x+\frac{5}{2}=4x$, alſo $x=\frac{5}{6}$. Wir haben aber bei den vorhergehenden Darſtellungen ſchon mehrmals ſolche Fälle gefunden, in denen die Auflöſung der Gleichung $Ax^2+Bx=y^2$ nicht die letzte Bedingung für x war, ſondern es ſollte der aus dieſer Gleichung gefundene Werth für x noch in eine andere ſubſtituirt und auch dieſer genügt werden. Ich habe mich bisher des Mittels bedient, in dem Falle $y=mx$, alſo $Ax^2+Bx=m^2x^2$ zu ſetzen, woraus ſich $x=\frac{B}{m^2-A}$ ergiebt. Es fragt ſich, wie drückt Diophant in dieſem Falle den unbeſtimmten Coefficienten m aus, für den er kein neues Symbol hat? Er drückt m ebenfalls

durch x aus. Da es aber, wenn beide x als verſchiedene Größen betrachtet werden, ihm nicht möglich iſt, $x^2 \cdot x^2$ auszudrücken, weil $\delta^{\upsilon}\delta^{\upsilon}$ bei ihm x^4 bedeutet, alſo die Identität beider x vorausſetzen würde, ſo behält er den unbeſtimmten Coefficienten ſo lange im Sinne, bis er aus der Formel den Werth für x entwickelt hat, und ſubſtituirt für denſelben erſt das Zeichen, nachdem die Entwickelung geſchehen iſt. Sein Verfahren iſt demnach folgendes. Wenn Ax^2+Bx ein Quadrat werden ſoll, ſo ſetze ich es gleich x^2 mit irgend einem quadratiſchen Coefficienten; dann wird x gleich B dividirt durch ein um A vermindertes Quadrat, alſo $x=\frac{B}{x^2-A}$, und dieſen Werth ſetzt er dann für x in die zweite Gleichung ein, wie folgende Beiſpiele beweiſen mögen.

VI, 23. In dieſer Aufgabe wird Diophant auf die beiden Gleichungen $2x^2+2x=y^2$, $x^3+2x^2+x=y_1^3$ geführt. Nun fährt er fort: den Ausdruck $2x^2+2x$ zu einem Quadrat zu machen iſt ganz leicht; denn wenn ich 2 durch ein um 2 vermindertes Quadrat dividire, ſo habe ich x. Aber dieſes muß ſo gefunden werden, daß auch der zweiten Gleichung ein Genüge geſchieht. Nun iſt x gleich 2 dividirt durch x^2-2 (das iſt $x=\frac{2}{x^2-2}$; über dieſe Art Brüche mit zuſammengeſetztem Nenner zu bezeichnen, habe ich im ſiebenten Kapitel geſprochen); alſo der Kubus $\frac{8}{(x^2-2)^3}$ (*ὁ δὲ κύβος γίνεται* $\mu^{o}\,\overline{\eta}$ *ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ* $\delta^{\upsilon}\,\overline{\alpha}$ *λείψει* $\mu^{o}\,\overline{\beta}$ *κύβῳ*), und das doppelte Quadrat wird $\frac{8}{(x^2-2)^2}$ (*καὶ οἱ δύο ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι γίνονται* $\mu^{o}\,\overline{\eta}$ *ἐν μορίῳ τῷ ἀπὸ* $\delta^{\upsilon}\,\overline{\beta}$ *λείψει* $\mu^{o}\,\overline{\beta}$ *τετραγώνῳ*) u. ſ. w. Ich habe dieſes Beiſpiel zuerſt gewählt, weil Diophant hier noch am umſtändlichſten iſt, und das Zuſammentreffen beider Zeichen dadurch vermeidet, daß er in der weiteren Entwickelung die erſte urſprüngliche Unbekannte durch Worte ausdrückt. Eben ſo ſagt er am Ende, als er das zweite $x=\frac{27}{16}$, alſo $x^2=\frac{729}{256}$ gefunden hat: *καὶ ἐὰν δυάδα μερίσωμεν εἰς τὸν τούτου δυάδι ἐλάσσονα, εὑρήσομεν τὸν* $\varsigma^{\text{ϛ}}\ \overline{\varphi\iota\beta}^{\,\sigma\iota\zeta}$, „und wenn wir 2 durch eine um 2 kleinere Zahl, als dieſes Quadrat iſt, dividiren, finden wir $x=\frac{512}{217}$. In den andern Beiſpielen iſt er weniger ausführlich.

IV, 17. 18. In beiden Aufgaben ſoll x in allgemeinen Aus-

drücken ſo gefunden werden, daß $13x$ ein Quadrat wird; er ſagt: *ἔστω τετραγωνικῶν δυ ρξθ̄, καὶ γίνεται ὁ ς° δυ ιγ̄*. Das heißt, man ſetze $13x$ gleich x^2 mit einem quadratiſchen Coefficienten, z. B. $= 169x^2$, ſo iſt $x = 13x^2$. Um nun im fernern Verlauf der Rechnung Mißverſtändniſſe und Verwirrungen zu vermeiden, ſetzt er ſogleich in die Functionen für ſämmtliche Unbekannte, die durch das erſte x ausgedrückt waren, den durch das zweite x ausgedrückten Werth dafür. Der Anſchaulichkeit wegen will ich das Beiſpiel IV, 17. kürzlich durchführen.

Drei Zahlen zu finden, deren Summe eine Quadratzahl iſt, und die außerdem die Eigenſchaft haben, daß das Quadrat einer jeden zu der folgenden Zahl addirt eine Quadratzahl giebt.

Die mittlere Zahl ſei x mit irgend einem Coefficienten, z. B. $4x$ (*τετάχθω ὁ μέσος ςς̄ ὅσων δήποτε, ἔστω ςς̄ δ̄*). Da das Quadrat der erſten Zahl, wenn man die zweite dazu addirt, ein Quadrat werden ſoll, ſo ſuche ich ein Quadrat, welches zu $4x$ addirt ein Quadrat giebt. Die erſte Zahl iſt alſo $x - 1$. So iſt die erſte Bedingung erfüllt. Da nun auch das Quadrat der zweiten zu der dritten addirt ein Quadrat geben ſoll, ſo werde ich die dritte Zahl haben, wenn ich $16x^2$ von irgend einem Quadrat, z. B. von $16x^2 + 8x + 1$, ſubtrahire; dann iſt die dritte Zahl $8x + 1$. So ſind zwei Bedingungen erfüllt. Nun ſoll auch die Summe der drei Zahlen eine Quadratzahl ſein. Die Summe iſt aber $13x$; das ſoll ein Quadrat ſein. Ich ſetze $13x$ gleich x^2 mit irgend einem quadratiſchen Coefficienten, z. B. gleich $169x^2$, ſo iſt $x = 13x^2$. Kehre ich nun zu den Annahmen zurück, ſo wird die erſte Zahl $13x^2 - 1$, die zweite $52x^2$, die dritte $104x^2 + 1$ ſein. So habe ich in allgemeinen Ausdrücken drei Bedingungen erfüllt (*λέλυταί μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ἐπιταγμάτων*). Es iſt nur noch übrig, daß auch das Quadrat der dritten Zahl, wenn man die erſte dazu addirt, ein Quadrat werde. Es ſoll alſo $10816x^4 + 221x^2$, oder durch x^2 dividirt, $10816x^2 + 221$ ein Quadrat werden, und zwar gleich dem Quadrate von der Wurzel $104x + 1$, ſo wird $x = \frac{5}{4}\frac{5}{2}$. Dieſen Werth nun ſubſtituirt er in die Ausdrücke für die drei Zahlen $13x^2 - 1$, $52x^2$, $104x^2 + 1$. Ganz ähnlich iſt die Aufgabe IV, 18.

VI, 13. 14. 15. Von dieſen drei einander ziemlich confor-

Digitized by Google

men Aufgaben, deren jede darauf führt, eine doppelte Gleichung von der Form $Ax^2+Bx=y^2$, $A_1x^2+B_1x=y_1^2$ zu löſen, haben wir die erſte oben weitläufiger behandelt, weshalb ich hier nur das hieher Gehörige kurz wiederholen will. Die aus dem erſten Theile der Rechnung gefundene Annahme des geſuchten rechtwinkligen Dreiecks in der Form $3x$, $4x$, $5x$ führte auf die doppelte Gleichung $6x^2+4x=y^2$ und $6x^2+3x=y_1^2$. Nun ſagt Diophant: Und wenn wir die größere (das Glied $4x$ enthaltende) Gleichung auflöſen, ſo wird $x=\frac{4}{x^2-6}$, γίνεται ὁ ς̊ μ̊ δ ἐν μορίῳ δῡ α φ μ̊ ς. Hier iſt das x^2 im Nenner dieſelbe Größe, welche wir oben m^2 genannt haben, nämlich der Coefficient von x^2, welcher für y^2 ſubſtituirt ward. Indem nun Diophant den gefundenen Ausdruck $\frac{4}{x^2-6}$ in die zweite Gleichung $6x^2+3x=y_1^2$ ſubſtituirt, und dann dieſe Gleichung auflöſt, findet er das zweite x, das heißt, unſer m; und nun kehrt er zu der erſten Gleichung zurück, und ſetzt $6x^2+4x=$ dem Quadrate eines Vielfachen von x, deſſen Coefficient das zweite, durch die zweite Gleichung beſtimmte x iſt. Die folgende vierzehnte Aufgabe verlangt,

Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß der Inhalt ein Quadrat wird, wenn man jede Kathete davon abzieht.

Wie in der vorigen Aufgabe, ſo wird man auch hier darauf geführt, das geſuchte Dreieck dem Dreiecke 3, 4, 5 ähnlich anzunehmen. Seien alſo die Seiten des geſuchten Dreiecks $3x$, $4x$, $5x$ (τετάχθω οὖν ἐν ἀριθμοῖς), ſo verlangt die Aufgabe, daß $6x^2-4x=y^2$, $6x^2-3x=y_1^2$ ſei. Alſo zuerſt $6x^2-4x=y^2$. „Und wenn wir das Quadrat (nämlich y^2) kleiner als $6x^2$ annehmen, ſo wird x gleich 4, dividirt durch den Überſchuß, um welchen 6 größer iſt als ein Quadrat. Nehmen wir nun als dieſes Quadrat x^2 an, ſo ſoll, wie auch x beſchaffen ſein mag, $6x^2-3x$ ein Quadrat werden. Aber das ſechsfache Quadrat iſt $\frac{96}{x^4-12x^2+36}$, die dreifache Wurzel aber $\frac{12}{6-x^2}$, das iſt $\frac{72-12x^2}{x^4-12x^2+36}$ (τουτέστι μ̊ οβ λείψει δῡ ιβ ἐν μορίῳ τῷ αὐτῷ). Wenn wir dieſes ſubtrahiren von 96 mit demſelben Nenner ſo bleibt $\frac{12x^2+24}{x^4-12x^2+36}$. Der Nenner iſt Quadrat; daher muß auch $12x^2+24$ einem Quadrat

gleich werden; das geſchieht, wenn $x = 1$ iſt. Darum ſetze ich $6x^2 - 4x = x^2$, ſo wird $x = \frac{4}{5}$. Demnach ſind die Seiten des geſuchten Dreiecks $\frac{12}{5}$, $\frac{16}{5}$, 4.“ Aus dieſem Beiſpiele erhellt recht klar, wie die angewandte Operation bloß dazu gedient hat, wenn wir in der Gleichung $6x^2 - 4x = y^2$, $y^2 = m^2x^2$ geſetzt hätten, das m ſo zu finden, daß der aus dieſer Annahme $6x^2 - 4x = m^2x^2$ hervorgehende Werth von x zugleich der zweiten Gleichung $6x^2 - 3x = y_1^2$ genüge. Diophant hat das zweite x, das iſt m, gleich 1 gefunden, darum ſetzt er $6x^2 - 4x = x^2$, woraus ſich $x = \frac{4}{5}$ ergiebt. Setzen wir dieſen Werth in der zweiten Gleichung, ſo wird $6 \cdot \frac{16}{25} - 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{96}{25} - \frac{12}{5} = \frac{96}{25} - \frac{60}{25} = \frac{36}{25}$, alſo wird auch dieſe Bedingung erledigt. Aber außer 1 kann m auch noch unzählige andere Werthe haben. Um einen ſolchen zu finden, braucht Diophant daſſelbe Symbol noch einmal in einer dritten Bedeutung. Es heißt nämlich: „Wenn man aber die Einheit nicht anwenden will, ſo ſetze man die Wurzel des Quadrats $x + 1$, ſo daß das dreifache Quadrat nebſt der Zahl 6 wird $3x^2 + 6x + 9$; und dieſes iſt leicht zu einem Quadrate zu machen; und man findet x nicht größer als $\frac{13}{9}$, aber die Wurzel des geſuchten Quadrats, nämlich $x + 1$, nicht größer als $\frac{22}{9}$. Das ſo gefundene Quadrat von 6 abgezogen macht x rational.“ Diophant hat ſich hier einige Sprünge erlaubt, zu deren Erklärung Folgendes hinreichen wird. Es ſollte, um das zweite x oder das m zu beſtimmen, $12x^2 + 24$ ein Quadrat werden, was, da $12 + 24$ ein Quadrat, alſo der Werth $x = 1$ ſogleich gegeben iſt, keine Schwierigkeit hat. Man ſetzt nämlich $x = x_1 + 1$, ſo wird $12x^2 + 24 = 12x_1^2 + 48x_1 + 36$. So erſcheint aber die Formel bei Diophant nicht. Da nämlich der Ausdruck $12x^2 + 24$ durch das Quadrat 4 theilbar iſt, ſo kommen wir zu demſelben Ziel in kleineren Zahlen, wenn wir $\frac{12x^2 + 24}{4}$, das iſt $3x^2 + 6$ zu einem Quadrate machen. Dann ergiebt die Subſtitution von $x_1 + 1$ für x die Formel $3x_1^2 + 6x_1 + 9$. Nun muß aber x^2, weil es von 6 abgezogen werden ſoll, kleiner als 6, alſo $x < \sqrt{6}$ ſein. Dieſe Quadratwurzel beſtimmt Diophant näherungsweiſe ſo, daß er 6 mit 81 multiplicirt und dividirt, ſo muß $x < \sqrt{\frac{486}{81}}$ ſein. Aber 484 iſt das Quadrat von 22, demnach geht man ſicher, wenn man $x < \frac{22}{9}$, alſo x_1, welches $x - 1$ iſt, kleiner $\frac{13}{9}$ nimmt. Setzt man nun $3x_1^2 + 6x_1 + 9$

$=(3-nx_1)^2$, ſo wird $x_1=\frac{6n+6}{n^2-3}$; es iſt alſo n ſo anzuneh- men, daß $\frac{6n+6}{n^2-3}<\frac{13}{9}$ wird. Wie daraus die Grenze für n zu ermitteln iſt, hat Diophant bei andern Gelegenheiten gezeigt; es er- giebt ſich, daß $n>\frac{27+\sqrt{1938}}{13}$, oder, da $1936=44^2$, $n>5\frac{6}{13}$ ſein müſſe. Nehmen wir Beiſpiels halber $n=6$ an, ſo wird $x_1=\frac{14}{11}$, alſo das zweite x oder unſer $m=x_1+1=\frac{25}{11}$; wir finden alſo einen Werth für das erſte x, welcher den beiden Glei- chungen $6x^2-4x=y^2$ und $6x^2-3x=y_1{}^2$ genügt, wenn wir $y=\frac{25}{11}x$ ſetzen; nämlich $x=\frac{484}{101}$, welcher Werth $6x^2-3x$ $=\frac{1258884}{10201}=\left(\frac{1122}{101}\right)^2$ macht. In dieſer Aufgabe hat alſo das Zeichen x oder das Diophantiſche ς^{o} drei verſchiedene Bedeutungen; erſtens bedeutet es den gemeinſchaftlichen Factor, in welchen die Seiten des ſeiner Form nach aus früheren Betrachtungen gegebenen Dreiecks multiplicirt werden müſſen, damit es den Forderungen ge- genwärtiger Aufgaben angepaßt werden könne. Setzt man nun $6x^2-4x=m^2x^2$, ſo bedeutet daſſelbe Zeichen zweitens den Fac- tor m. Dieſer Factor iſt ſo zu beſtimmen, daß auch $6x^2-3x$ ein Quadrat werde; die Subſtitution des aus der erſten Gleichung gefundenen und durch m ausgedrückten Werthes für x ergiebt die Bedingung, daß $12m^2+24$ oder $3m^2+6$ ein Quadrat ſein müſſe; da hier der Werth $m=1$ bekannt iſt, ſo erhält man neue Werthe für m, wenn man $m=z+1$ ſetzt; und ſo bedeutet Diophant's Zeichen drittens die Größe z; und daſſelbe Zeichen wäre vier- tens für die oben mit n bezeichnete Größe verwandt worden, wenn Diophant die Auflöſung, die er bloß andeutet, durchgeführt hätte.

VI, 15. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß der Flächeninhalt, ſowohl wenn man eine Kathete, als auch, wenn man die Hypotenuſe ſubtrahirt, ein Quadrat giebt.

Auch in dieſer Aufgabe, welche aus der Annahme der Seiten $3x$, $4x$, $5x$ auf die doppelte Gleichung führt $6x^2-3x=y^2$, $6x^2-5x=y_1{}^2$, wird x durch x ausgedrückt, indem wir vorher y gleich einem unbeſtimmten Vielfachen von x geſetzt wird, als deſſen Coefficient Diophant nach der Entwickelung x ſubſtituirt;

nur faßt er ſich hier ganz kurz, indem er ſagt: καὶ ἐὰν ποιήσω δῡϛ̄ ⋔ ςς̄γ̄ ἴσα τετραγώνῳ, γίνεται ὁ ςὸ μο̄γ̄ ἐν μορίῳ μο̄ϛ̄ ⋔ δῡα, d. i. „und wenn ich $6x^2-3x$ zu einem Quadrate mache, ſo wird $x=\frac{3}{6-x^2}$." Die fernere Auflöſung dieſer Aufgabe iſt im Griechiſchen Texte leider verſtümmelt, weshalb ich mich nicht länger dabei aufhalten will, zumal die Methode, auf deren Erläuterung es mir hier allein ankommt, aus den bisher angeführten Beiſpielen hinlänglich klar vor Augen liegt.

4. Methode der Grenzen.

Da Diophant häufig Zahlen ſucht, welche in einer gewiſſen Reihenfolge von der größeren zur kleineren fortſchreiten, wie in dem oben ausgeführten Beiſpiel IV, 26.; da er ferner keine negative Auflöſung geſtattet, ſo ſieht er ſich häufig in die Nothwendigkeit verſetzt, die zuerſt und auf directem Wege gefundene Auflöſung zu verwerfen und ſtatt derſelben eine andere zu ſuchen, welche entweder die Unbekannte ſelbſt oder irgend eine Function derſelben innerhalb gewiſſer Grenzen giebt. Ich habe es oben nicht vermeiden können, Beiſpiele der Art ſchon zu berühren. Da aber dieſe Unterſuchungen zum Theil zu den ſcharfſinnigſten Partieen unſers Auctors gehören, ſo will ich noch mehre der Art hier umſtändlicher erörtern. Die einzelnen Kunſtgriffe, die er dabei anwendet, haften aber zu ſehr an der individuellen Beſchaffenheit jedes einzelnen Falles, als daß ſich beſtimmte Regeln mit einigem Nutzen aufſtellen ließen. Ich will mich daher begnügen, einzelne charakteriſtiſche Beiſpiele durchzuführen und, wenn es nöthig ſcheint, zu erläutern.

Ein ſehr einfacher Fall dieſer Methode iſt der, wenn irgend eine Potenz x^n innerhalb vorgeſchriebener Grenzen, zwiſchen zwei gegebenen Zahlen geſucht wird. Will man nämlich x ſo finden, daß x^n größer als a und kleiner als b iſt, ſo multiplicire man a und b zuerſt mit 2^n, dann mit 3^n und ſo fort, bis zwiſchen zwei ſolchen Producten ſich irgend eine n^{te} Potenz findet; geſetzt nun, es liegt zwiſchen ap^n und bp^n die Zahl c^n, ſo wird der Forderung genügt, wenn man $x=\frac{c}{p}$ ſetzt; denn dann iſt $x^n=\frac{c^n}{p^n}$; da nun $c^n > ap^n$, ſo iſt $\frac{c^n}{p^n} > a$, und da $c^n < bp^n$, ſo iſt $\frac{c^n}{p^n} < b$.

Digitized by Google

Sucht man z. B. ein Quadrat, welches zwiſchen 10 und 11 liegen ſoll, ſo multiplicire man 10 und 11 ſucceſſive mit 4, 9, 16 u. ſ. w. ſo lange, bis zwiſchen beide Producte eine Quadratzahl fällt; die Multiplication mit 4 und 9 giebt kein Reſultat, denn weder zwiſchen 40 und 44, noch zwiſchen 90 und 99 liegt eine Quadratzahl; dagegen giebt die Multiplication mit 16 die Grenzen 160 und 176 und zwiſchen beiden liegt die Quadratzahl 169; demnach liegt x^2 innerhalb der erforderten Grenzen, wenn wir es gleich $\frac{169}{16}$, alſo $x = \frac{13}{4}$ ſetzen. Von dieſem einfachſten Falle der Grenzmethoden finden ſich bei Diophant folgende Beiſpiele.

IV, 34. Man ſoll die Zahl 1 in zwei Stücke zerlegen und zu jedem Stücke eine gegebene Zahl addiren, und das Product der beiden Summen ſoll ein Quadrat ſein.

Die beiden gegebenen Zahlen ſeien 3 und 5. Das eine Stück ſei $x-3$, ſo iſt das andere $4-x$. Legt man zu dem erſten 3 hinzu, ſo erhält man x, legt man aber zu dem zweiten 5 hinzu, ſo erhält man $9-x$; demnach ſoll $9x-x^2$ ein Quadrat ſein. Es ſei gleich $4x^2$, ſo wird $x=\frac{9}{5}$. Wenn ich dieſen Werth in die obigen Ausdrücke ſubſtituiren will, ſo kann ich 3 von x nicht ſubtrahiren; x muß alſo größer als 3 und kleiner als 4 werden. Wir haben aber x gefunden, indem wir 9 durch 5 dividirten, und 5 iſt ein um 1 vermehrtes Quadrat; wenn nun 9 durch ein um 1 vermehrtes Quadrat dividirt einen Quotienten geben ſoll, welcher größer als 3 iſt, ſo muß der Diviſor kleiner als 3 ſein; es ſoll alſo ein um 1 vermehrtes Quadrat kleiner als 3, alſo das Quadrat kleiner als 2 ſein. Ferner ſoll aber der Quotient auch kleiner als 4 ſein; demnach muß der Diviſor größer als $2\frac{1}{4}$ ſein; aber der Diviſor iſt ein um 1 vermehrtes Quadrat; folglich muß das Quadrat größer ſein als $1\frac{1}{4}$; das Quadrat ſoll aber auch kleiner als 2 ſein. Ich muß alſo ein Quadrat ſuchen, welches größer als $1\frac{1}{4}$ und kleiner als 2 iſt. Ich verwandele beide Ausdrücke in Brüche mit quadratiſchem Nenner (*ἀναλύω ταῦτα εἰς μόρια τετραγωνικά*), z. B. 64; ſo werden ſie 80 und 128. Das erſte iſt leicht, und es iſt das Quadrat $\frac{100}{64}$ oder $\frac{25}{16}$. Nun komme ich zu der urſprünglichen Aufgabe; ich ſuchte $9x-x^2$ zu einem Quadrat zu machen; ich ſetze es gleich dem gefundenen, nämlich $\frac{25}{16}x^2$, ſo wird

$x = \frac{144}{41}$. — Um alſo ein Quadrat zu ſinden, das zwiſchen $\frac{5}{4}$ und 2 liegt, multiplicirt Diophant beide Ausdrücke mit 64; er wäre einfacher zu demſelben Reſultate gelangt, wenn er mit 16 multiplicirt hätte; er hätte die Grenzen 20 und 32 erhalten; da zwiſchen beiden die Quadratzahl 25 liegt, ſo iſt $\frac{25}{16}$ ein Quadrat, welches größer als $\frac{5}{4}$ und kleiner als 2 iſt. Hätte er mit 36 multiplicirt, ſo hätte er die Grenzen 45 und 72, und zwiſchen beiden die Quadratzahlen 49 und 64 gefunden; demnach konnte er $9x - x^2$ auch gleich $\frac{49}{36}x^2$ und gleich $\frac{64}{36}x^2$ oder $\frac{16}{9}x^2$ ſetzen. Die von ihm angeordnete Multiplication mit 64, welche die Grenzen 80 und 128 gab, geſtattete außer $\frac{100}{64}$ auch die Werthe $\frac{81}{64}$ und $\frac{121}{64}$; man erſieht alſo, wie man unendlich viele Werthe für x ſinden kann, welche alle innerhalb der vorgeſchriebenen Grenzen liegen.

VI, 2. ſucht Diophant einen Kubus, der zwiſchen den Grenzen 2 und 4 liegt; hier ergiebt ſogleich die Multiplication mit $8 = 2^3$ ein erwünſchtes Reſultat; es liegt nämlich zwiſchen 16 und 32 die Kubikzahl 27, demnach iſt $\frac{27}{8}$ ein zwiſchen 2 und 4 liegender Kubus. Die Multiplication mit 27 hätte die Grenzen 54 und 108 gegeben; da zwiſchen beiden die Kubikzahl 64 liegt, ſo wäre auch $\frac{64}{27}$ ein brauchbarer Kubus geweſen; ebenſo $\frac{343}{125}$ u. ſ. w.

VI, 23. wird eine ſechſte Potenz, ein Kubokubus, geſucht zwiſchen den Grenzen 8 und 16. Nun ſind die ſechſten Potenzen der erſten natürlichen Zahlen 64, 729, 4096, 15625, 46656 u. ſ. w. Multiplicirt man alſo die Grenzen 8 und 16 mit 64, ſo erhält man 512 und 1024; da zwiſchen beiden 729 liegt, ſo iſt $\frac{729}{64}$ ein der Forderung entſprechender Kubokubus. Die Multiplication mit 729 ergäbe dagegen kein Reſultat; denn 8 mal 729 iſt 5832, 16 mal 729 iſt 11664 und zwiſchen beiden liegt keine ſechſte Potenz.

Ein complicirteres Beiſpiel habe ich oben ſchon gelegentlich erörtert. In der Aufgabe **IV, 26.** wurde nämlich verlangt, x ſo zu finden, daß $\frac{8}{x^2+x}$ größer als x und kleiner als $x+1$ werde. Da ich Diophants Verfahren dort weitläufig auseinandergeſetzt habe, ſo will ich es hier nicht wiederholen, ſondern zu einigen andern Beiſpielen dieſer geiſtreichen Methode übergehen.

V, 33. Dieſe im Original in Verſen ausgedrückte Aufgabe lautet nach Schulz's Überſetzung ſo:

Zweierlei Wein, acht Drachmen das Maaß, und ſchlechtern zu fünf nur
Miſchte der gütige Herr ſeinen Bedienten zum Feſt.
Was er als Preis für beides bezahlt, war eine Quadratzahl;
Legſt du zu dem Quadrat aber noch Sechzig hinzu,
Siehe ſo haſt du ein zweites Quadrat; nun merke, die Wurzel
Zeigt dir, wie viel Maaß jener im Ganzen gekauft.
Und nun ſage mir an, wie viel des beſſeren Weines,
Und wie viel zu fünf, wurde zuſammen gemiſcht?

Diophant's Auflöſung iſt wörtlich dieſe: „Der Sinn dieſes Epigramms iſt folgender. Es hat Jemand zwei Fäſſer Wein gekauft; von dem einen koſtet das Maaß 8 Drachmen, von dem andern 5 Drachmen. Der Preis, den er für alles zuſammen bezahlt hat, iſt eine Quadratzahl; und wenn man dazu 60 addirt, ſo wird das wieder eine Quadratzahl, deren Wurzel die Anzahl der Maaße angiebt. Wie viel war da zu acht, wie viel zu fünf Drachmen? — Die Anzahl der Maaße ſei x, ſo iſt der Preis x^2-60; und es ſoll x^2-60 eine Quadratzahl ſein; ihre Wurzel muß man gleich x weniger einer gewiſſen Zahl ſetzen. Aber x^2-60 iſt zuſammengeſetzt aus zwei Zahlen, dem Preiſe des Weins zu 8 Drachmen und dem Preiſe des Weins zu 5 Drachmen; und ein Fünftel des letztern iſt die Anzahl der Maaße zu 5 Drachmen, ein Achtel des erſtern die Anzahl der Maaße zu 8 Drachmen; und da die Anzahl der Maaße beider Arten x ſein ſoll, ſo kommt es darauf an, x^2-60 in zwei Zahlen zu zerlegen, ſo daß ein Fünftel der einen und ein Achtel der andern zuſammengenommen x ausmacht. Das iſt aber nicht anders möglich, als wenn x größer als ein Achtel von x^2-60 und kleiner als ein Fünftel von x^2-60 iſt; es wird alſo x^2-60 größer als $5x$ und kleiner als $8x$ ſein. Da nun x^2-60 größer als $5x$ ſein ſoll, ſo addire man auf beiden Seiten 60, ſo wird x^2 größer als $5x+60$, alſo x^2 größer als $5x$ plus einer Zahl, welche größer als 60 iſt; daher wird x größer oder wenigſtens nicht kleiner ſein müſſen als 11. Da ferner x^2-60 kleiner als $8x$ iſt, ſo addire man auf beiden Seiten 60, ſo wird x^2 gleich ſein $8x$ plus einer Zahl, welche kleiner als 60 iſt, woraus folgt, daß x nicht größer als 12 ſein müſſe. Es iſt aber gezeigt worden, daß es auch nicht kleiner als 11 ſein dürfe. Daher wird x größer als 11 und kleiner als 12 werden müſſen. Wenn wir aber x^2-60 zu einem Quadrate machen ſollen, ſo bilden wir die Wurzel dieſes Quadrats von x weniger einer gewiſſen Zahl, und

Digitized by Google

es entſieht x, wenn wir zu dem Quadrate einer Zahl 60 addiren, und die Summe durch das Doppelte derſelben Zahl dividiren. Wir müſſen alſo eine Zahl ſuchen, ſo daß, wenn man zu ihrem Quadrate 60 addirt und die Summe durch die doppelte Zahl dividirt, der Quotient größer als 11, aber kleiner als 12 wird. Nennen wir die geſuchte Zahl x, ſo ſoll $\frac{x^2+60}{2x}$ größer als 11 und kleiner als 12 werden. Zuerſt alſo ſoll $\frac{x^2+60}{2x} > 11$ werden, alſo $x^2+60 > 22x$; $22x$ iſt alſo gleich x^2 plus einer Zahl, welche kleiner iſt als 60; daher darf x nicht kleiner als 19 ſein. Ferner ſoll $\frac{x^2+60}{2x} < 12$, alſo $x^2+60 < 24x$ werden; daher iſt $24x$ gleich x^2 plus einer Zahl, welche größer als 60 iſt; folglich muß x kleiner als 21 ſein; es muß aber auch größer ſein als 19. Wenn wir alſo x^2-60 zu einem Quadrate machen, ſo müſſen wir die Wurzel dieſes Quadrats gleich $x-20$ ſetzen. Daraus ergiebt ſich $x=11\frac{1}{2}$, x^2 alſo $=132\frac{1}{4}$. Ziehe ich davon 60 ab, ſo bleibt $72\frac{1}{4}$ übrig. Wir müſſen alſo $72\frac{1}{4}$ in zwei Zahlen zerlegen, ſo daß ein Fünftel der erſten und ein Achtel der zweiten zuſammen $11\frac{1}{2}$ ausmachen. Ein Fünftel der erſten Zahl ſei x, ſo iſt ein Achtel der zweiten $11\frac{1}{2}-x$; die Zahlen ſelbſt alſo ſind $5x$ und $92-8x$, und ihre Summe ſoll $72\frac{1}{4}$ ſein; x wird alſo $=\frac{79}{12}$ werden. Demnach iſt die Anzahl der Maaße zu fünf Drachmen $\frac{79}{12}$, die Anzahl der Maaße zu acht Drachmen $\frac{59}{12}$, und das Übrige iſt klar.“

Sehr geſchickt wählt Diophant die Anzahl der Maaße beider Sorten Wein als die durch x auszudrückende Unbekannte. Da der Geſammtpreis eine Quadratzahl ſein, und wenn man zu dieſer 60 addirt, das Quadrat der Anzahl Maaße, alſo x^2 herauskommen ſoll, ſo iſt der Geſammtpreis gleich x^2-60, und das ſoll Quadratzahl ſein. Sei nun die Anzahl der Maaße zu 8 Drachmen m, die Anzahl derer zu 5 Drachmen n, ſo iſt $m+n=x$, und $8m+5n=x^2-60$. Es iſt alſo $n=x-m$, $5n=5x-5m$, alſo $8m+5n=5x+3m=x^2-60$, alſo $x+\frac{3}{5}m=\frac{x^2-60}{5}$; da man alſo zu x noch etwas hinzulegen muß, damit es $=\frac{x^2-60}{5}$ werde, ſo muß $x<\frac{x^2-60}{5}$ ſein. Ferner iſt $m=x-n$, $8m=8x-8n$, alſo $8m+5n=8x-3n=x^2-60$, und $x-\frac{3}{8}n$

Digitized by Google

$=\frac{x^2-60}{8}$; folglich iſt $x > \frac{x^2-60}{8}$. Dieſe beiden Bedingungen geben Diophant die Grenzen für x. Da nämlich $x^2-60 > 5x$, oder $x^2-5x > 60$ ſein ſoll, ſo muß $x > \frac{5+\sqrt{265}}{2}$, oder $x >$ 10,6394 ſein. Die zweite Bedingung $x^2-60 > 8x$ oder $x^2-8x > 60$, giebt $x > 4+\sqrt{76}$, oder $x >$ 12,7178. Ich habe bei einer andern Gelegenheit darauf aufmerkſam gemacht, was es bedeute, wenn aus dieſen Reſultaten Diophant den Schluß zieht: *alſo darf x nicht kleiner als 11 und nicht größer als 12 ſein.* Wenn wir nun x^2-60 zu einem Quadrate machen ſollen, ſo ſetzen wir den Ausdruck $=(x-p)^2=x^2-2px+p^2$; dann wird $x=\frac{p^2+60}{2p}$. Welchen Werth wir nun auch für p ſetzen, ſo wird x immer ſo beſchaffen ſein, daß x^2-60 ein Quadrat wird. Aber p muß hier ſo gewählt werden, daß x innerhalb der eben gefundenen Grenzen 11 und 12 liegt. Es darf alſo zuerſt $\frac{p^2+60}{2p}$ nicht kleiner als 11, alſo p^2+60 nicht kleiner als $22p$ werden; demnach p nicht kleiner als $11+\sqrt{61}$, das heißt, nicht kleiner als 18,81···, oder nach Diophant's Vorſtellung nicht kleiner als 19. Ferner darf aber auch $\frac{p^2+60}{2p}$ nicht größer als 12, alſo p^2+60 nicht größer als $24p$, folglich p nicht größer als $12+\sqrt{84}$, das heißt, nicht größer als 21,165···, oder nach Diophant nicht größer als 21 ſein. Wir werden alſo einen paſſenden Werth für x erhalten, wenn wir p innerhalb der gefundenen Grenzen, alſo etwa gleich 20 annehmen; da wir aber p auch gleich 19 und gleich 21 und gleich jedem Bruche innerhalb dieſer Grenzen annehmen können, ſo erhellt daraus, daß die Aufgabe unzählige Auflöſungen zuläßt. Setzen wir nun mit Diophant $p=20$, ſo wird $x=\frac{400+60}{40}=\frac{23}{2}=11\frac{1}{2}$, und das iſt der Vorausſetzung gemäß die Anzahl der gekauften Maaße. Der dafür bezahlte Preis war aber x^2-60, das iſt alſo $\frac{529}{4}-50=\frac{289}{4}=\left(\frac{17}{2}\right)^2=72\frac{1}{4}$. Somit haben wir nur noch m und n aus den beiden Gleichungen $m+n=\frac{23}{2}$, $8m+5n=\frac{289}{4}$ zu beſtimmen. Diophant ſetzt nun

$n = x$, ſo wird $m = \frac{23}{2} - x$, alſo $8m + 5n = 92 - 3x$ und das iſt gleich $\frac{289}{4}$, alſo $x = \frac{79}{12}$.

IV, 45. Drei Zahlen zu finden, ſo daß der Überſchuß der größten über die mittlere zu dem Überſchuß der mittlern über die kleinſte ein gegebenes Verhältniß habe, außerdem aber je zwei zuſammengenommen ein Quadrat zur Summe geben.

Die Auflöſung dieſer Aufgabe, in welcher faſt alle bisher erwähnten Methoden ſich gegenſeitig die Hand bieten, gehört zu den ſchönſten, aber auch zu den ſchwierigſten, welche Diophant's Werk uns darbietet, weshalb ich ſie in ihrem ganzen Umfange darſtellen will.

Diophant nimmt an, daß der Überſchuß der größten Zahl über die mittelſte das Dreifache des Überſchuſſes der mittelſten über die kleinſte ſein ſoll. Es ſoll alſo, wenn wir die drei geſuchten Zahlen in ihrer Reihenfolge von der größten zur kleinſten A, B, C nennen, $A - B = 3(B - C)$, außerdem aber ſollen die drei Summen $A + B$, $B + C$, $A + C$ Quadrate ſein. Nun ſetzt Diophant $B + C$ willkührlich gleich 4. Da $B > C$, ſo iſt $B > 2$, $C < 2$; darum ſetzt er $B = 2 + x$, $C = 2 - x$, ſo iſt $B - C = 2x$, alſo $A - B = 6x$, $A = 6x + B = 7x + 2$. Nun ſollen auch noch $A + B$ und $A + C$ Quadrate ſein; das führt auf die doppelte Gleichung $8x + 4 = y^2$, $6x + 4 = y_1^2$. Weil hier die beſtimmten Zahlen Quadrate ſind, ſo iſt, ſagt Diophant, die Auflöſung ganz leicht. Es iſt nämlich $y^2 - y_1^2 = 2x$. Damit man nun ſowohl in dem Ausdruck für y^2 als für y_1^2 das Glied 4 erhalte, muß man $y + y_1 = \frac{1}{2}x$, $y - y_1 = 4$ ſetzen; dann wird $y = \frac{1}{4}x + 2$, $y_1 = \frac{1}{4}x - 2$; alſo $x = 112$. Nun war aber $C = 2 - x$, es würde alſo, da $x = 112$ iſt, C negativ werden. Darum verwirft Diophant dieſe Auflöſung, und ſucht eine andere, welche x kleiner als 2 giebt. Iſt aber $x < 2$, ſo iſt $6x + 4$ kleiner als 16. Wenn wir alſo die drei Quadrate $8x + 4$, $6x + 4$ und 4 betrachten, ſo werden ſie folgenden Beſtimmungen unterliegen müſſen: das mittlere, $6x + 4$, muß kleiner ſein als 16, und damit die Differenzen der Zahlen A, B, C, aus denen ſie entſtanden ſind, dieſelben Verhältniſſe behalten, müſſen die Differenzen dieſer drei Quadrate auch dieſelben Verhältniſſe zu einander behalten; nun iſt die Differenz des größten und

Digitized by Google

mittlern $2x$, die Differenz des mittlern und kleinſten $6x$, alſo das Dreifache der Differenz der beiden größten. Demnach müſſen wir zu dem Quadrate 4 zwei andere größere finden, ſo daß das mittlere kleiner als 16, und die Differenz der beiden größern ein Drittel von der Differenz der beiden kleinern iſt.

Diophant ſetzt nun die Wurzel des zweiten Quadrats, welches die Form $6x+4$ haben ſoll, $m+2$, damit das Quadrat m^2+4m+4 größer als 4 werde. (Für m aber nimmt Diophant wieder daſſelbe Zeichen, welches wir durch x ausdrückten.) Demnach iſt die Differenz der beiden kleinern Quadrate m^2+4m, alſo ein Drittel davon $\frac{1}{3}m^2+\frac{4}{3}m$; folglich muß das größte Quadrat um $\frac{1}{3}m^2+\frac{4}{3}m$ größer ſein als das mittlere; das mittlere aber iſt m^2+4m+4, alſo das größte $\frac{4}{3}m^2+\frac{16}{3}m+4$, und dieſer Ausdruck, oder wenn man ihn mit $\frac{9}{4}$ multiplicirt, $3m^2+12m+9$ ſoll Quadrat werden. Aber das mittlere Quadrat, nämlich m^2+4m+4 ſoll kleiner als 16, alſo ſeine Wurzel $m+2$ kleiner als 4 ſein, demnach muß m kleiner als 2 ſein. Setzt man nun $3m^2+12m+9 = (3-pm)^2 = 9-6pm+p^2m^2$, ſo wird $m = \frac{12+6p}{p^2-3}$, und dieſer Ausdruck ſoll kleiner ſein als 2. (Nachdem Diophant dieſe Formel im Kopfe ausgerechnet hat, ſetzt er p wieder $= x$; die Stelle lautet bei ihm ſo: *γέγονε οὖν μοι δῦ γ̄·ςςοὺς ιβ̄. μο̄ θ̄ ἴσυς ποιῆσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τετράγωνόν τινα ἀπὸ μο̄ γ̄ λειπόντων ςςούς τινας, καὶ γίνεται ὁ ςὸ ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἑξάκις γενομένου, καὶ προσλαβόντος τὸν ιβ̄, τουτέστι τῆς ἰσώσεως τοὺς ςςοὺς ιβ̄. καὶ μερισθέντος εἰς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ ςοῦ τετράγωνος τῶν δυνάμεων τῶν ἐν τῇ ἰσώσει τριῶν. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν τινὰ ς", ὃς ἑξάκις γενόμενος καὶ προσλαβὼν μῦ ιβ̄, μεριζόμενος εἰς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τετράγωνος τριάδος, ποιεῖ τὴν παραβολὴν ἐλάσσονα μο̄ β̄. ἔστω ὁ ζητούμενος ςοῦ ᾱ.* etc.) Da alſo $\frac{12+6p}{p^2-3}$ kleiner als 2 ſein ſoll, ſo muß $6p+12$ zu p^2-3 ein kleineres Verhältniß haben als 2 zu 1; die Producte der äußern und innern Glieder ſind alſo einander ungleich, und es iſt $6p+12$ kleiner als $2p^2-6$; und wenn man auf beiden Seiten 6 addirt, ſo iſt $2p^2$ größer als $6p+18$. Die Art, wie Diophant dieſe Gleichung auflöſt, haben wir gehörigen Orts näher beleuchtet, und es findet ſich, daß p größer als

$\frac{3+\sqrt{45}}{2}$, alſo größer als 4, 854, oder wie Diophant ſich immer ausdrückt, nicht kleiner als 5 ſein darf. Setzen wir nun $p=5$, alſo $3m^2+12m+9=(3-5m)^2$, ſo wird $m=\frac{21}{11}$. Nun war die Wurzel des zweiten Quadrats $m+2$, alſo $=\frac{43}{11}$, das zweite Quadrat ſelbſt alſo $\frac{1849}{121}$; dieſes zweite Quadrat war aber auch $6x+4$; folglich haben wir $6x+4=\frac{1849}{121}$, alſo $x=\frac{1365}{726}=\frac{455}{242}$. Nun waren die drei Zahlen $7x+2$, $2+x$, $2-x$; ſie ſind alſo $\frac{3669}{242}$, $\frac{939}{242}$, $\frac{29}{242}$, oder wenn man gleich den Nenner quadratiſch einrichten will, $\frac{7338}{484}$, $\frac{1878}{484}$, $\frac{58}{484}$.

Das einzige, was bei dieſer Darſtellung vielleicht dunkel geblieben iſt, iſt bei der Betrachtung der drei Quadrate $8x+4$, $6x+4$, 4 die Forderung, dieſe Quadrate ſo zu finden, daß der Überſchuß des größten über das zweite ein Drittel des Überſchuſſes des zweiten über das kleinſte werden müſſe, damit das Verhältniß der Überſchüſſe der urſprünglich geſuchten drei Zahlen A, B, C erhalten werde. Die Sache iſt aber ganz einfach, wenn wir bedenken, daß nach der Annahme $A-B=3(B-C)$ ſein ſollte, nach der Entwickelung aber $8x+4=A+B$, $6x+4=A+C$, $4=B+C$ iſt. Iſt nun

$$A-B=3B-3C$$

ſo iſt $A+B=5B-4C$

und $A+C=4B-2C$

da nun $B+C=B+C$

ſo iſt $(A+B)-(A+C)=B-C$

$$(A+C)-(B+C)=3B-3C$$

folglich $(A+B)-(A+C)=\frac{1}{3}(A+C)-\frac{1}{3}(B+C)$.

Wird alſo die eine Bedingung erfüllt, ſo wird die andere zugleich mit erledigt. Es war alſo, um allen Bedingungen der Aufgabe zu genügen, weiter nichts nöthig, als das eine Quadrat 4, das andere kleiner als 16, aber in der Form $6x+4$, und das dritte um ein Drittel des Unterſchiedes dieſer beiden größer als das zweite zu machen.

V, 13. Die Zahl 1 in zwei Stücke zu zerlegen, ſo

Digitized by Google

daß, wenn man jedem Stücke eine andere gegebene Zahl addirt, die beiden Summen Quadrate werden.

Die beiden gegebenen Zahlen ſeien 2 und 6. Dieſe Aufgabe iſt die einzige, in welcher Diophant ſich einer geometriſchen Betrachtung bedient. Man nehme, ſagt er, eine Einheit *AB*, die der Aufgabe gemäß in *C* geſchnitten iſt; dann lege man dem Stücke *AC* zwei Einheiten *AD* und dem Stücke *CB* ſechs Einheiten *BE* zu, ſo werden *CD* und *CE* Quadrate ſein.

Da nun *AB* eine Einheit, *AD* und *BE* zuſammen aber acht Einheiten ſind, ſo iſt die ganze Linie *DE* gleich neun Einheiten. Man hat alſo die Zahl 9 in zwei Quadrate zu zerlegen; da aber eines dieſer Quadrate, nämlich *CD* größer als *AD*, aber kleiner als *BD* iſt, ſo ſtellt die Aufgabe ſich ſo: die Quadratzahl 9 in zwei Quadrate zu zerlegen, ſo daß das eine zwiſchen 2 und 3 fällt. Iſt auf dieſe Weiſe *CD* gefunden, ſo iſt auch *AC* gegeben, da $AD = 2$ gegeben iſt; und wenn man *AC* von der Einheit *AB* abzieht, ſo hat man das andere Stück *CB*. Das eine Quadrat, welches zwiſchen 2 und 3 liegen ſoll, ſei x^2, ſo iſt das andere $9-x^2$. Dieſer Ausdruck ſoll Quadrat ſein. Das iſt zwar leicht zu bewerkſtelligen, aber man ſoll x ſo finden, daß x^2 zwiſchen 2 und 3 fällt. Wir nehmen zwei Quadrate, deren eines größer als 2, das andere kleiner als 3 iſt, z. B. $\frac{289}{144}$ und $\frac{361}{144}$. Wenn wir nun x^2 ſo finden können, daß es zwiſchen dieſen beiden Quadraten liegt, ſo haben wir die Aufgabe gelöſt. Es muß alſo auch die Wurzel von x^2, nämlich x, größer als $\frac{17}{12}$ und kleiner als $\frac{19}{12}$ ſein. Wollen wir aber $9-x^2$ zu einem Quadrate machen, ſo ſetzen wir die Wurzel dieſes Quadrats gleich $3-mx$ (dieſe Operation iſt bei Diophant auf die gewöhnliche Weiſe umſchrieben), und finden $x = \frac{6m}{m^2+1}$. Dieſer Ausdruck ſoll größer als $\frac{17}{12}$ und kleiner als $\frac{19}{12}$ ſein. Es ſoll alſo zuerſt $\frac{6m}{m^2+1} > \frac{17}{12}$, alſo $72m > 17m^2+17$ ſein, demnach muß $m < \frac{36+\sqrt{1007}}{17}$, oder $m < \frac{67,73\cdots}{17}$, oder nach Diophant's Weiſe m nicht größer als $\frac{67}{17}$ ſein. Ferner ſoll $\frac{6m}{m^2+1} < \frac{19}{12}$, alſo $72m < 19m^2+19$ ſein, folglich muß $m > \frac{36+\sqrt{935}}{19}$, oder $> \frac{67,57\cdots}{19}$, oder

oder nicht kleiner als $\frac{66}{19}$ ſein. Nun iſt $\frac{67}{17} = 3\frac{16}{17}$, $\frac{66}{19} = 3\frac{9}{19}$; daher nimmt Diophant für m den zwiſchen beiden Grenzen liegenden liegenden Werth $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$, dann wird $x = \frac{84}{53}$, woraus ſich die geſuchten Stücke, in welche 1 zu theilen war, leicht ergeben.

Ich will dieſer Auflöſung nur die Bemerkung hinzufügen, daß das Verfahren, zwei Quadrate wie $\frac{289}{144}$ und $\frac{361}{144}$ zu finden, die zwiſchen den gegebenen Grenzen 2 und 3 liegen, ganz daſſelbe iſt, welches ich oben für ein Quadrat angegeben habe. Man multiplicirt die beiden Zahlen 2 und 3 ſo lange mit der Reihe der Quadratzahlen, bis zwiſchen zwei ſolcher zuſammengehöriger Producte zwei Quadratzahlen fallen. Die folgende Tabelle wird zeigen, daß Diophant ſeine Grenzen für x in viel kleinern Zahlen hätte finden können.

n^2	$2n^2$	$3n^2$	Dazwiſchen liegende Quadrate.
36	72	108	81, 100
49	98	147	100, 121, 144
64	128	192	144, 169
81	162	243	169, 196, 225
100	200	300	225, 256, 289
121	242	363	256, 289, 324, 361
144	288	432	289, 324, 361, 400

Selbſt wenn er, wie es ſcheint, ſolche Quadrate ſuchte, die bei gemeinſchaftlichen Nennern in den kleinſten Zahlen ausgedrückt ſind, ſo hätte die zweite Reihe ihm die viel kleinern und den beiden Grenzen ziemlich nahe liegenden Quadrate $\frac{100}{49}$ und $\frac{144}{49}$ geboten, ſo daß er alſo x zwiſchen $\frac{10}{7}$ und $\frac{12}{7}$ hätte zu ſuchen gehabt, wodurch überdieß die Grenzen für x etwas weiter geworden wären.

Von ganz beſonderem Intereſſe aber iſt in dieſer Methode der Grenzen eine Operation, welche Diophant παρισότης oder παρισότητος ἀγωγή, **Methode der Beinahegleichheit**, nennt, und die zum Zweck hat, zwei oder drei Quadrate zu finden, deren Summe einer gegebenen Zahl gleich iſt, und die alle einer und derſelben Zahl, alſo auch einander möglichſt nahe liegen. Ich will dieſe höchſt ſinn-

reiche Methode an den beiden auch noch in anderer Beziehung intereſſanten Beiſpielen, in denen wir ſie dargeſtellt finden, nämlich V, 12. 14., entwickeln.

V, 12. Die Zahl 1 in zwei Stücke zu zerlegen, ſo daß, wenn man zu jedem Stücke dieſelbe gegebene Zahl addirt, beide Summen Quadrate werden.

Ich übergehe bei dieſer, wie bei der folgenden Aufgabe die Determination, von der ich bei einer andern Gelegenheit ſprechen werde, und ſtelle gleich Diophant's Auflöſung dar.

Die gegebene Zahl ſei 6; nennen wir nun vorläufig die beiden Theile der Zahl 1 A und B, ſo ſollen $A+6$ und $B+6$ Quadrate werden. Sei $A+6=m^2$, $B+6=n^2$, ſo iſt ihre Summe $A+B+12$, das iſt, da $A+B=1$ iſt, $13=m^2+n^2$. Es kommt alſo darauf hinaus, die Zahl 13, welche die Summe der Quadrate 9 und 4 iſt, in zwei andere Quadrate m^2 und n^2 zu zerlegen, deren jedes größer als 6 iſt, damit nämlich $A=m^2-6$ $B=n^2-6$ poſitiv werden. Wenn ich alſo, ſagt Diophant, die Zahl 13 in zwei Quadrate zerlege, deren Differenz kleiner als 1 iſt, ſo habe ich die Aufgabe gelöſt. Nun ſchlägt Diophant folgenden eigenthümlichen Weg ein. Er nimmt die Hälfte von 13, nämlich $6\frac{1}{2}$, und unterſucht, welchen quadratiſchen Bruch man zu $6\frac{1}{2}$ addiren müſſe, damit die Summe ein Quadrat werde. Es iſt alſo die Gleichung $6\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}$, oder $26+\frac{4}{x^2}$, oder $26x_1^2+1$ zu einem Quadrate zu machen ($x_1=\frac{1}{2}x$ geſetzt). Diophant ſetzt $26x_1^2+1 = (5x_1+1)^2$ und findet $x_1=10$, alſo $x=20$; demnach wird $\frac{13}{2}+\frac{1}{400}=\frac{2601}{400}=\left(\frac{51}{20}\right)^2$. Die Annahme des $5x_1+1$ war aber nicht willkührlich, ſondern der Coefficient von x_1 mußte ſo genommen werden, daß $\frac{1}{x_1}$ ein ächter und wo möglich kleiner Bruch wurde. Hätten wir alſo $26x_1^2+1$ allgemein $=(px_1+1)^2 = p^2x_1^2+2px_1+1$ geſetzt, ſo hätten wir $x_1=\frac{2p}{26-p^2}$ gefunden. Es mußte alſo $26-p^2<2p$, oder $p^2+2p>26$, alſo $p>-1+\sqrt{27}$; demnach iſt in ganzen Zahlen 5 der kleinſte Werth, den p haben konnte. Da wir nun das Quadrat $\frac{2601}{400}$ gefunden haben, welches nur um $\frac{1}{400}$ größer iſt als $6\frac{1}{2}$, ſo kommt es darauf an,

13 in zwei Quadrate zu zerlegen, deren jedes dem Quadrate $\frac{2601}{400}$ möglichſt nahe kommt; folglich werden die Wurzeln der geſuchten Quadrate der Wurzel des gefundenen, $\frac{51}{20}$, möglichſt nahe kommen müſſen. Nun ſind die Wurzeln der beiden Quadrate, aus welchen 13 von Natur zuſammengeſetzt iſt, 2 und 3; und zwar iſt 2 um $\frac{11}{20}$ kleiner und 3 um $\frac{9}{20}$ größer als $\frac{51}{20}$. Wollte man nun die Wurzel des einen geſuchten Quadrats $2+\frac{11}{20}$, die des andern $3-\frac{9}{20}$ ſetzen, ſo würde die Summe ihrer Quadrate genau $\frac{2\cdot 2601}{400}$, alſo um $\frac{1}{200}$ größer als 13 wurden. Darum ſetzt Diophant die Wurzel des einen Quadrats $2+11x$, die des zweiten $3-9x$, wo x begreiflicher Weiſe einen Werth haben wird, der nicht genau $\frac{1}{20}$ iſt, aber dieſem Bruche nahe kommt. Nun ſetzt er die Summe der Quadrate dieſer beiden Ausdrücke gleich 13, woraus ſich der Werth für x ergiebt. Es iſt nämlich $(2+11x)^2 = 4+44x+121x^2$, $(3-9x)^2 = 9-54x+81x^2$, alſo ihre Summe $13-10x+202x^2 = 13$, alſo $x = \frac{5}{101}$. Demnach ſind die Wurzeln der beiden Quadrate, in welche man 13 zu theilen hatte, $\frac{257}{101}$ und $\frac{258}{101}$, ihre Quadrate $\frac{66049}{10201}$ und $\frac{66564}{10201}$, und wenn man von jedem derſelben 6 ſubtrahirt, ſo erhält man die beiden Theile, in welche die Einheit getheilt werden ſollte, nämlich $\frac{4843}{10201}$ und $\frac{5358}{10201}$.

Ich glaube in dieſer Darſtellung die Methode von jeder Undeutlichkeit befreit zu haben. Bei Diophant, der ſich hier wider ſeine Gewohnheit an manchen Stellen ungebührlich kurz faßt, iſt Manches nicht ganz einſichtlich dargeſtellt; ſo ſcheint mir die Annahme von $2+11x$ und $3-9x$ für die Wurzeln der beiden Quadrate bei ihm nicht hinlänglich motivirt zu ſein. Er ſagt nämlich, nachdem er das zu $\frac{13}{2}$ zu addirende Quadrat $\frac{2601}{400} = \left(\frac{51}{20}\right)^2$ gefunden hat, ganz kurz: „Wenn man alſo 13 in zwei Quadrate zerlegen will, ſo muß man die Wurzel eines jeden möglichſt nahe an $\frac{51}{20}$ nehmen; und ich ſuche, was von 3 ſubtrahirt und zu 2 addirt dieſe Zahl, nämlich $\frac{51}{20}$, giebt. Daher ſetze ich die Wurzel des ei-

nen Quadrats $11x+2$, die des andern $3-9x$, ſo iſt die Summe ihrer Quadrate u. ſ. w.“ Dieſer Auflöſung ganz ähnlich iſt

V, 14. **Die Zahl 1 in drei Stücke zu zerlegen, ſo daß, wenn man zu jedem Stücke dieſelbe gegebene Zahl addirt, die drei Summen Quadrate werden.**

Die gegebene, zu jedem der Stücke zu addirende Zahl ſei 3. Nennen wir nun wieder die drei Stücke A, B, C, ſo ſoll $A+3=m^2$, $B+3=n^2$, $C+3=p^2$, alſo ihre Summe $A+B+C+9=m^2+n^2+p^2$ ſein; aber $A+B+C$ iſt $=1$, alſo $10=m^2+n^2+p^2$. Demnach ſoll man die Zahl 10 in drei Quadrate zerlegen, ſo jedoch, daß jedes größer als 3 wird, damit die drei geſuchten Zahlen A, B, C poſitiv ausfallen können. Wir nehmen von 10 ein Drittel, das iſt $3\frac{1}{3}$, und unterſuchen, welchen quadratiſchen Bruch wir zu $3\frac{1}{3}$ addiren müſſen, damit die Summe ein Quadrat werde. Wir nehmen Alles neunfach, und ſuchen, welchen quadratiſchen Bruch wir zu 30 addiren müſſen, damit die Summe ein Quadrat werde. Der Bruch ſei $\frac{1}{x^2}$, ſo ſoll $30+\frac{1}{x^2}$, oder $30x^2+1$ ein Quadrat werden. Diophant ſetzt $30x^2+1=(5x+1)^2$, und findet $x=2$, alſo $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}$. Wenn man alſo zu 30 den Bruch $\frac{1}{4}$ zu addiren hat, ſo hat man zu $3\frac{1}{3}$ den Bruch $\frac{1}{36}$ zu addiren, und die Summe giebt das Quadrat $\frac{121}{36}$, deſſen Wurzel $\frac{11}{6}$ iſt. Aber 10 beſteht aus den beiden Quadraten 9 und 1, 1 aber aus den Quadraten $\frac{16}{25}$ und $\frac{9}{25}$, demnach iſt 10 zuſammengeſetzt aus den Quadraten 9, $\frac{16}{25}$ und $\frac{9}{25}$, deren Wurzeln 3, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ ſind. Nun muß man die Wurzeln der geſuchten drei Quadrate der Zahl $\frac{11}{6}$ nahe zu bringen ſuchen. Diophant bringt alſo dieſe Zahlen auf den gleichen Nenner 30, ſo ſind die drei Wurzeln $\frac{90}{30}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{18}{30}$, und $\frac{11}{6}$ wird $\frac{55}{30}$. Nun iſt 3 oder $\frac{90}{30}$ um $\frac{35}{30}$ größer, dagegen $\frac{24}{30}$ um $\frac{31}{30}$, und $\frac{18}{30}$ um $\frac{37}{30}$ kleiner als $\frac{55}{30}$. Wollte man alſo die Wurzeln der drei geſuchten Quadrate $3-\frac{35}{30}$, $\frac{4}{5}+\frac{31}{30}$, $\frac{3}{5}+\frac{37}{30}$ ſetzen, ſo würde jedes dieſer Quadrate genau $\frac{121}{36}$, ihre

Summe alſo $\frac{363}{36}$, alſo um $\frac{1}{12}$ größer als 10 werden. Darum ſetzt Diophant wieder, wie vorher ſtatt des Nenners 30 das Symbol x, und bildet die drei Wurzeln $3-35x$, $\frac{4}{5}+31x$, $\frac{3}{5}+37x$, wo x alſo nicht genau, aber beinahe $\frac{1}{30}$ ſein wird, und ſetzt nun wieder die Summe der drei Quadrate gleich 10; dieſe Summe iſt aber $10-116x+3555=10$, woraus $x=\frac{116}{3555}$ gefunden wird, alſo um $\frac{1}{1422}$ kleiner als $\frac{1}{30}$. Die Wurzeln der drei Quadrate ſind demnach $\frac{1321}{711}$, $\frac{1288}{711}$, $\frac{1285}{711}$, alſo die Quadrate $\frac{1745041}{505521}$, $\frac{1658944}{505521}$, $\frac{1651225}{505521}$. Zieht man von jedem dieſer Quadrate 3 ab, ſo erhält man die drei geſuchten Stücke der Einheit, nämlich 228478, 142381, 134662, alle drei dividirt durch 505521. Diophant bricht übrigens ſeine Rechnung ab, nachdem er den Werth für x gefunden hat.

Bei dieſer Aufgabe, wie bei der vorigen kommt es darauf an, daß, wenn wir $30x^2+1$ zu einem Quadrat machen, x größer als 1 gefunden werde. Setzen wir nun $30x^2+1=(px+1)^2$, ſo wird $x=\frac{2p}{30-p^2}$. Es muß alſo $2p>30-p^2$, alſo $p^2+2p>30$, demnach $p>-1+\sqrt{31}$ werden. Demnach iſt auch hier 5 die kleinſte ganze Zahl, welche für p geſetzt werden darf, nicht aber, wie Schulz in den Anmerkungen zu V, 12. ſagt, zugleich die größte. Denn da von x nur das Quadrat gebraucht wird, ſo iſt es von keinem Belange, wenn der Werth für x negativ ausfällt, und es wäre in dem Falle nur $(px-1)^2$ ſtatt $(px+1)^2$ zu denken, und Diophant hätte ſicher auch $30x^2+1=(px-1)^2$ geſetzt, wenn er Grund gehabt hätte, mit dem Werthe $p=5$ unzufrieden zu ſein.

Bei der Aufgabe V, 16. 17. führt Diophant die Auflöſung auch auf die eben erörterte Operation der παρισότης zurück, begnügt ſich aber damit, bloß den Gang des Verfahrens anzudeuten und die Ausführung, als aus den vorhergehenden Aufgaben bekannt, dem Leſer zu überlaſſen.

5. Auflöſung durch bloße Reflexion.

Es finden ſich in Diophant's Werk einige Aufgaben, welche ohne alle Rechnung durch bloße Betrachtung und Benutzung der ſich

geſtaltenden Verhältniſſe gelöſt werden. Ganz rein indeß erſcheint dieſe Methode nur in zwei einander ſehr ähnlichen Beiſpielen IV, 31. 32., in welchen ſie auf eine einfache und überraſchende Weiſe zum Reſultate führt. Außerdem werden mit Hilfe der Reflexion häufig Aufgaben auf früher gelöſte, oder auch auf in frühern Aufgaben gelehrte Methoden zurückgeführt. Beide Anwendungen dieſer ſinnreichen Auflöſungsart will ich durch Beiſpiele belegen.

IV, 31. Vier Quadratzahlen zu finden, ſo daß ihre Summe zu der Summe ihrer Wurzeln addirt eine gegebene Zahl giebt.

Die Auflöſung lautet wörtlich ſo: „Die gegebene Zahl ſei 12. Da, wenn man zu der Summe eines Quadrats und ſeiner Wurzel $\frac{1}{4}$ addirt, ein Quadrat herauskommt, deſſen Wurzel, wenn man $\frac{1}{2}$ davon ſubtrahirt, die Wurzel des urſprünglichen Quadrats giebt; da ferner die vier Zahlen zu ihren Quadratwurzeln addirt gleich 12, und wenn man noch die vier Viertel addirt, 12 und $\frac{4}{4}$, das iſt 13 geben: ſo muß man die Zahl 13 in vier Quadrate zerlegen. Wenn ich dann von der Wurzel eines jeden $\frac{1}{2}$ ſubtrahire, ſo habe ich die Wurzeln der geſuchten vier Quadrate. Die Zahl 13 beſteht nun aber aus den beiden Quadraten 4 und 9; jedes von dieſen läßt ſich wieder in zwei Quadrate zerlegen, nämlich in $\frac{64}{25}$, $\frac{36}{25}$, $\frac{144}{25}$ und $\frac{81}{25}$. Wenn ich nun die Wurzel eines jeden, nämlich $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{9}{5}$ nehme, und von jeder $\frac{1}{2}$ ſubtrahire, ſo erhalte ich als die Wurzeln der geſuchten vier Quadrate $\frac{11}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{19}{10}$, $\frac{13}{10}$; die Quadrate ſelbſt alſo ſind $\frac{121}{10}$, $\frac{49}{100}$, $\frac{361}{100}$, $\frac{169}{100}$."

Die Sache iſt alſo, in Gleichungen dargeſtellt, ganz einfach folgende:

$$(w^2+w)+(x^2+x)+(y^2+y)+(z^2+z)=12$$

alſo

$$(w^2+w+\tfrac{1}{4})+(x^2+x+\tfrac{1}{4})+(y^2+y+\tfrac{1}{4})+(z^2+z+\tfrac{1}{4})=13$$

$$(w+\tfrac{1}{2})^2+(x+\tfrac{1}{2})^2+(y+\tfrac{1}{2})^2+(z+\tfrac{1}{2})^2=13.$$

Zerlegt man nun 13 in vier Quadrate, z. B. $\frac{64}{25}$, $\frac{36}{25}$, $\frac{144}{25}$, $\frac{81}{25}$, und ſetzt $(w+\frac{1}{2})^2=\frac{64}{25}$, $(x+\frac{1}{2})^2=\frac{36}{25}$, $(y+\frac{1}{2})^2=\frac{144}{25}$, $(z+\frac{1}{2})^2$

$=\frac{81}{25}$, ſo wird $w=\frac{8}{5}-\frac{1}{2}=\frac{11}{10}$, $x=\frac{6}{5}-\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$, $y=\frac{12}{5}-\frac{1}{2}$ $=\frac{19}{10}$, $z=\frac{9}{5}-\frac{1}{2}=\frac{13}{10}$. Ebenſo iſt die folgende Aufgabe gelöſt.

IV, 32. Vier Quadratzahlen zu finden, ſo daß ihre Summe um die Summe ihrer Wurzeln vermindert eine gegebene Zahl giebt.

Diophant nimmt an, die gegebene Zahl ſei 4. Da $w^2-w+\frac{1}{4}$ ebenſo wie $w^2+w+\frac{1}{4}$ ein Quadrat iſt, ſo hat man wiederum nur die um 1 vermehrte gegebene Zahl in vier Quadrate zu zerlegen, dann aber zu der Wurzel eines jeden $\frac{1}{2}$ zu addiren; ſo erhält man die Wurzeln der vier geſuchten Quadrate. Diophant wählt in beiden Aufgaben die gegebene Zahl ſo, daß die um 1 größere, welche in vier Quadrate zerlegt werden ſoll, zuerſt in zwei Quadrate zerlegbar iſt. Da das aber nicht nöthig iſt, weil jede Zahl ohne Ausnahme ſich als die Summe von vier Quadraten darſtellen läßt, ſo ſind beide Aufgaben für jede gegebene Zahl ohne Ausnahme möglich. Ferner iſt für die zweite Aufgabe jede beliebige Zerlegung der um 1 vermehrten gegebenen Zahl zuläſſig; bei der erſten Aufgabe dagegen hat man darauf zu achten, daß keins der Quadrate, in welche die Zahl zerlegt wird, kleiner als $\frac{1}{4}$ werde, weil man von der Wurzel $\frac{1}{2}$ abziehen ſoll.

Die übrigen Beiſpiele, welche durch bloßes Raiſonnement aufgelöſt ſind, ſind nicht ſo vollſtändig durchgeführt, als die beiden vorliegenden. Indem Diophant die Auflöſung einer Aufgabe entweder auf eine ſchon erklärte Aufgabe, oder auf eine bekannte Operation zurückführt, bricht er entweder hier ganz ab, oder er ſetzt mit Zahlen, welche durch die erwähnte Operation gefunden werden können, die Auflöſung weiter fort. Ein Beiſpiel der zweiten Art iſt

III, 16. Drei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat iſt, und von denen je zwei zuſammen genommen die dritte um ein Quadrat übertreffen.

Ich ſuche zuerſt drei Quadratzahlen, deren Summe ein Quadrat iſt. Wenn ich aber die beiden Quadrate 4 und 9 addire, und nun ſuche, welche Quadratzahl zu 13 addirt ein Quadrat giebt, ſo finde ich 36. So ſind dieſe drei Quadratzahlen zuſammen auch eine Quadratzahl. Nun bin ich dahin geführt, drei Zahlen zu ſuchen, von denen je zwei die dritte um eine gegebene Zahl übertreffen, und zwar die Summe der erſten und zweiten die dritte um 4,

die Summe der zweiten und dritten die erſte um 9, die Summe der dritten und erſten die zweite um 36. Das iſt aber ſchon gelehrt worden (nämlich in der Aufgabe I, 18.), und die erſte Zahl iſt 20, die zweite $6\frac{1}{2}$, die dritte $22\frac{1}{2}$.

Wir haben dieſe Auflöſung ſchon einmal in einer andern Beziehung und mit einer andern Auflöſung betrachtet. Iſt nämlich

$$A+B+C=a^2$$
$$A+B-C=b^2$$
$$A-B+C=c^2$$
$$-A+B+C=d^2$$

ſo folgt aus den drei letzten Gleichungen $A+B+C=b^2+c^2+d^2$; folglich muß $b^2+c^2+d^2=a^2$ ſein. Indem Diophant alſo zuerſt drei Quadratzahlen, b^2, c^2, d^2 ſucht, deren Summe eine Quadratzahl, a^2, iſt, verwandelt er die Auflöſung ſeiner Aufgabe in die der beſtimmten Anfabe: drei Zahlen zu finden, von denen der Überſchuß der Summe je zweier über die dritte gegeben iſt. Dieſe Aufgabe iſt ganz leicht; man darf nämlich nur, um die einzelnen Zahlen A, B, C zu finden, von den drei letzten Gleichungen je zwei zu addiren, ſo wird $A=\frac{b^2+c^2}{2}$, $B=\frac{b^2+d^2}{2}$, $C=\frac{c^2+d^2}{2}$. Dieſe Auflöſung beruht auf den früheren Aufgaben II, 11. und I, 18.

Einige hübſche Beiſpiele der zweiten Art, in denen die Auflöſung zwar nicht ganz durchgeführt, aber der Gang der Rechnung vollſtändig und klar angegeben wird, bietet uns das fünfte Buch in den Aufgaben 15. 16. 17. 23. 27. 28. 29. Ich will von dieſen einige ganz verſchiedenartige auswählen.

V, 17. **Eine gegebene Zahl in vier Zahlen zu theilen, ſo daß die Summe von je dreien eine Quadratzahl wird.**

„Die gegebene Zahl ſei 10. Da nun die drei erſten eine Quadratzahl machen, und ebenſo die drei folgenden von der zweiten an, ferner die drei folgenden von der dritten, und ebenſo die drei folgenden von der vierten an, ſo machen die vier Zahlen dreimal genommen vier Quadrate aus. Aber die vier Zahlen dreimal genommen machen 30. Ich muß alſo 30 in vier Quadrate zerlegen, ſo daß jedes kleiner als 10 iſt. Das läßt ſich ſo machen: wenn ich durch die Methode der Beinahegleichheit jedes Quadrat dem Werthe von $7\frac{1}{2}$ nähere, und dann jedes von 10 abziehe, ſo finde

ich die geſuchten Zahlen. Wenn ich aber bedenke, daß 30 zuſammengeſetzt iſt aus den Quadraten 16, 9, 4, 1, ſo nehmen wir 9 und 4 als zwei der geſuchten an, da beide kleiner als 10 ſind. Es bleibt dann noch übrig, die Zahl 17 in zwei Quadrate zu theilen, ſo daß jedes kleiner als 10 iſt. Wenn ich aber 17, wie ich früher gelehrt habe, in zwei Quadrate theile, ſo daß eines von ihnen größer als $8\frac{1}{2}$ und kleiner als 10 iſt, ſo werden beide kleiner als 10 ſein. Wenn wir dann jedes der beiden Quadrate von 10 abziehen, ſo finden wir die beiden übrigen geſuchten Zahlen; zwei nämlich, 6 und 1, hatten wir ſchon gefunden; und ſo iſt die Aufgabe gelöſt."

Diophaut giebt hier alſo zwei Wege an, auf denen die Zahl 30 in vier Quadrate zerlegt werden kann; der eine iſt die Anwendung der V, 12. gelehrten Methode der Beinahegleichung, der zweite die V, 13. auseinandergeſetzte Methode, eine Zahl in zwei Quadrate zu theilen, die innerhalb gewiſſer Grenzen liegen. Setzt man $4-x$ als die Wurzel eines dieſer Quadrate, ſo iſt das andere Quadrat $17-(4-x)^2=1+8x-x^2$. Dieſer Ausdruck ſoll Quadrat werden, was an und für ſich leicht iſt, wenn man ihn $=(mx-1)^2$ ſetzt; aber beide Quadrate, in welche 17 getheilt, wird, ſollen innerhalb der Grenzen $\frac{17}{2}$ und 10 liegen. Die daraus entſtehende Bedingungsgleichung für m zeigt, daß 4 die einzige ganze Zahl iſt, welche für m geſetzt werden darf. Setzt man nun $1+8x-x^2=(4x-1)^2$, ſo wird $x=\frac{16}{17}$, alſo $4x-1=\frac{47}{17}$, $4-x=\frac{52}{17}$, die Quadrate dieſer Wurzeln ſind $\frac{2209}{289}$ und $\frac{2704}{289}$, alſo, wenn man dieſelben von 10 ſubtrahirt, ſind die beiden noch übrigen geſuchten Zahlen $\frac{681}{289}$ und $\frac{186}{289}$.

V, 23. Einen gegebenen Bruch in drei andere Brüche zu zerlegen, ſo daß dieſe Quadrate werden, wenn man den Kubus der Summe davon abzieht.

„Der gegebene Bruch ſei $\frac{1}{4}$, und man ſoll $\frac{1}{4}$ in drei Brüche theilen, ſo wie die Aufgabe beſagt. Daher wird jeder von ihnen, wenn man $\frac{1}{64}$ davon abzieht, ein Quadrat werden müſſen. Wenn man alſo von der Summe aller drei $\frac{3}{64}$ abzieht, ſo wird man drei Quadrate erhalten. Wenn man dann zu jedem dieſer Quadrate $\frac{1}{64}$ addirt, ſo hat man die geſuchten Brüche. Das iſt aber ganz

leicht; denn es kommt darauf hinaus, den Bruch $\frac{13}{64}$ in drei Quadrate zu zerlegen, was ganz leicht iſt.“

Nennt man die drei Brüche x, y, z, ſo iſt $x+y+z=\frac{1}{4}$, und es ſoll $x-\frac{1}{64}=m^2$, $y-\frac{1}{64}=n^2$, $z-\frac{1}{64}=p^2$, alſo $x+y+z-\frac{3}{64}=m^2+n^2+p^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{64}=\frac{13}{64}$ ſein. Nennt man alſo den gegebenen Bruch $\frac{1}{a}$, ſo kommt es darauf an, $\frac{1}{a}-\frac{3}{a^3}$ oder $\frac{a^2-3}{a^3}$ in drei Quadrate zu zerlegen. Ob das immer möglich iſt, werden wir in dem folgenden Kapitel unterſuchen.

In den einander ähnlichen Aufgaben V, 27—29. begnügt Diophant ſich bloß zu ſagen, wie jede dieſer Aufgaben auf eine der drei unmittelbar vorher dageweſenen zurückzuführen ſei; z. B. 27.

Drei Quadratzahlen zu finden, ſo daß das Product von je zweien ein Quadrat bleibt, wenn man 1 dazu addirt.

„Da ich verlange, daß das Product der erſten und zweiten, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat wird, ſo wird, wenn ich alles mit der dritten, die auch Quadratzahl iſt, multiplicire, das Product aller drei zu der dritten addirt ein Quadrat ſein müſſen; wie auch, wenn man dieſes Product zu der erſten und zu der zweiten addirt. Dieſe Aufgaben haben wir aber ſchon gezeigt; darum löſen die dort gefundenen Zahlen auch dieſe Aufgabe.

Es dürfte hier der rechte Ort ſein, über eine bedeutende Lücke einige Worte zu ſprechen, auf welche wir durch die Zurückführung einer Aufgabe auf eine vorgeblich ſchon gelöſte aufmerkſam gemacht werden. Wir leſen nämlich V, 22. folgende Aufgabe und Auflöſung.

Drei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat iſt, ſo daß der Kubus ihrer Summe, wenn man jede der drei Zahlen davon abzieht, ein Quadrat zum Reſt läßt.

„Und hier haben wir wieder die Zahl 2 wie vorher zu zerlegen. Auch iſt der Kubus von 2 gleich 8. (Im Texte ſteht: *καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τοῦ δευτέρου ϙοῦ κῦ μονάδας η̄.*) Es ſollen alſo, wenn man jede der Zahlen von 8 abzieht, Quadrate übrig bleiben. Daher muß man die Zahl 22 in drei Quadrate zerlegen, deren jedes größer als 6 iſt. Wenn wir dann jedes von dieſen von 8 abziehen, ſo finden wir die drei geſuchten Zahlen. Es iſt aber früher gezeigt worden, wie man 26 (muß 22 heißen) in drei Quadrate zerlegen müſſe, ſo daß jedes von ihnen größer als 6 wird.“

Zuerſt iſt zu bemerken, daß die hier etwas dunkel, aber doch verſtändlich angedeutete Auflöſung nicht zu der Aufgabe paßt; die Auflöſung ſetzt nämlich, unter Beibehaltung der drei letzten Bedingungen, als erſte voraus, daß die Summe der drei Zahlen einer gegebenen Zahl 2 gleich, nicht, wie es in der Aufgabe heißt, daß die Summe eine Quadratzahl ſei. Daher haben auch Bachet und Schulz in ihren Überſetzungen die Worte der Aufgabe demgemäß geändert, wenngleich der erſtere, was zu loben iſt, den Griechiſchen Text ſo gegeben hat, wie er ihn gefunden.

Zweitens aber iſt keine Aufgabe vorhergegangen, auf welche ſich die erſten Worte der Auflöſung beziehen könnten, welche im Texte heißen: καὶ γίνεται ἡμῖν πάλιν τὸν β̄ διελεῖν ὡς καὶ πρότερον. Vergleichen wir aber dieſe Aufgabe mit der vorhergehenden und nachfolgenden, ſo zeigt ſich, daß die vorhergehende 21. der in den Worten des Griechiſchen Textes und in meiner Überſetzung ausgedrückten, dagegen die folgende 23. der in der Auflöſung vorausgeſetzten ganz analog iſt. Die Aufgabe 21. ſagt nämlich:

Drei Zahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat iſt, ſo daß der Kubus der Summe, wenn man jede der Zahlen dazu addirt, ein Quadrat giebt.

Dagegen lautet die Aufgabe 23., die wir ſchon oben erwähnt haben, folgendermaßen:

Einen gegebenen Bruch in drei andere Brüche zu zerlegen, ſo daß jeder derſelben, wenn man den Kubus der Summe davon abzieht, ein Quadrat wird.

Dieſe Erſcheinung macht es wahrſcheinlich, daß der Raum von der 21. bis zu der 23. Aufgabe, der jetzt von drei Aufgaben ausgefüllt wird, von denen die mittlere aus zweien zuſammengefloſſen iſt, urſprünglich ſechs Aufgaben umfaßt habe. Nennen wir nämlich die drei geſuchten Zahlen x, y, z, die Summe derſelben, wenn ſie Quadratzahl ſein ſoll, q^2, wenn ſie einer gegebenen Zahl gleich ſein ſoll, a, ſo wird die Verſtümmelung des Textes vollkommen klar werden, wenn wir folgende ſechs Aufgaben zuſammenſtellen und betrachten.

1. $x+y+z=q^2$, $q^6+x=m^2$, $q^6+y=n^2$, $q^6+z=p^2$.
2. $x+y+z=q^2$, $q^6-x=m^2$, $q^6-y=n^2$, $q^6-z=p^2$.
3. $x+y+z=q^2$, $x-q^6=m^2$, $y-q^6=n^2$, $z-q^6=p^2$.
4. $x+y+z=a$, $a^3+x=m^2$, $a^3+y=n^2$, $a^3+z=p^2$.

5. $x+y+z=a,\quad a^3-x=m^2,\quad a^3-y=n^2,\quad a^3-z=p^2.$
6. $x+y+z=a,\quad x-a^3=m^2,\quad y-a^3=n^2,\quad z-a^3=p^2.$

Die erſte dieſer Aufgaben iſt vollſtändig ausgeſprochen und gelöſt in der Aufgabe 21., die ſechſte ebenſo in der Aufgabe 23. Die zweite iſt ausgeſprochen in den Worten der Aufgabe 22., aber durch ein Verſehen des Abſchreibers iſt mit Überſpringung eines Stücks des Textes ſtatt ihrer eigenen die Auflöſung der fünften beigefügt worden. Uns fehlt alſo das Stück von der Auflöſung der zweiten bis zu den Textesworten der fünften incluſive. Wenn wir das Fehlende durch Einſchaltung andeuten, ſo verhält ſich das Vorhandene zu dem Fehlenden folgendermaßen:

1. Aufgabe. Auflöſung.
2. Aufgabe. (Auflöſung).
3. (Aufgabe. Auflöſung).
4. (Aufgabe. Auflöſung).
5. (Aufgabe). Auflöſung.
6. Aufgabe. Auflöſung.

Nehmen wir nun an, daß die zweite und dritte Aufgabe der erſtern analog durch Algebra gelöſt worden ſeien, und überlaſſen wir dieſelben ihrem Schickſal, daß dagegen die ganz fehlende vierte ſich an die folgenden beiden angeſchloſſen habe, ſo war ihre Auflöſung vielleicht folgender Art:

Da $x+y+z=a$, $a^3+x=m^2$, $a^3+y=n^2$, $a^3+z=p^2$, ſo iſt, wenn man die drei letzten Gleichungen addirt, $3a^3+x+y+z$, das iſt $3a^3+a=m^2+n^2+p^2$. Nun iſt $x=m^2-a^3$, $y=n^2-a^3$, $z=p^2-a$. Nun kommt es darauf an, die gegebene Zahl $3a^3+a$ in drei Quadrate m^2, n^2, p^2 zu zerlegen, deren jedes größer als a^3, aber kleiner als a^3+a iſt, (weil jede der drei Zahlen x, y, z kleiner als a werden muß). Diophant hat, wie aus der Auflöſung der Aufgabe 22. erhellt, $a=2$ geſetzt. Demnach führt ſeine Aufgabe darauf hinaus, die Zahl 26 in drei Quadrate zu zerlegen, ſo daß jedes größer als 8, aber kleiner als 10 iſt, was nach den früher gelehrten Methoden ſich leicht bewerkſtelligen läßt. Die Zahl 26 iſt nämlich die Summe der Quadrate $16+9+1$, von denen 9 bereits für dieſen Zweck brauchbar iſt, weil es zwiſchen 8 und 10 liegt. Es iſt alſo nur noch übrig, den Reſt 17 in zwei Quadrate zu theilen, die innerhalb derſelben Grenzen liegen.

Laſſen wir nun in Gedanken dieſe Auflöſung vorausgehen, ſo

wird die Auflöſung der Aufgabe 22., wenn wir ihr als Aufgabe die fünfte der aufgeſtellten zutheilen, völlig verſtändlich. Auch hier iſt $a=2$ angenommen; es ſoll alſo $x+y+z=2$, $8-x=m^2$, $8-y=n^2$, $8-z=p^2$ ſein. Die drei letzten Bedingungen ergeben $3\cdot 8-(x+y+z)$, das iſt $22=m^2+n^2+p^2$. Nun iſt $x=8-m^2$, $y=8-n^2$, $z=8-p^2$, aber $x+y+z=2$. Demnach hat man die Zahl 22 in drei Ausdrücke zu zerlegen, ſo daß jedes derſelben kleiner als 8, aber größer als 6 werde, damit nämlich die Differenzen $8-m^2$ u. ſ. w. kleiner als 2 werden.

Dieſen ganz analog iſt dann die Auflöſung der Aufgabe 23., in welcher nur ſtatt der Zahl a, welche in drei andere zerlegt werden ſoll, ein Bruch ſubſtituirt iſt, weil, wenn $x+y+z=a$, und $x-a^3$, $y-a^3$, $z-a^3$ Quadrate ſein ſollen, dieſe letztern Bedingungen nur möglich ſind, wenn a, x, y, z Brüche ſind. Die Auflöſung ſelbſt habe ich oben ſchon mitgetheilt.

Ich muß noch erwähnen, daß ſchon Bachet die Lücke an dieſer Stelle bemerkt und die drei fehlenden Aufgaben in ſeinem Commentar zu V, 22. gelöſt hat. Aber er ſowohl als Schulz ſtellt die Sache ſo dar, als wären zwiſchen V, 21. und 22. drei vollſtändige Aufgaben mit ihrer Auflöſung ausgefallen. Keinen von Beiden haben die Textesworte in der Aufgabe 22. auf die Erklärung der Entſtehung dieſer Lücke hingeführt. Der Fehler iſt, wie geſagt, ſo entſtanden, daß der Abſchreiber, nachdem er die nach V, 21. folgende Aufgabe richtig hingeſchrieben, aus Verſehen dazu die Auflöſung einer ſpätern ſtellte, und nach dieſer wieder regelmäßig weiter ſchrieb.

6. Auflöſung in allgemeinen Ausdrücken.

Wir haben oben ſchon ein Beiſpiel berührt, in welchem Diophant gleich durch die Form, welche er den durch das Symbol der Unbekannten ausgedrückten geſuchten Zahlen gab, alle erforderlichen Bedingungen der Aufgabe löſte. Er ſuchte nämlich V, 21. drei Zahlen, deren jede eine um 1 verminderte Quadratzahl und deren Summe eine Biquadratzahl ſein ſollte. Indem er die eine Zahl x^4-2x^2, die zweite x^2+2x, die dritte x^2-2x ſetzte, hatte er bereits die ganze Aufgabe gelöſt. Denn jede der drei Zahlen iſt ein um 1 vermindertes Quadrat, und die Summe von allen dreien iſt x^4, alſo eine Biquadratzahl. Eine ſolche Auflöſung nennt Dio-

phant eine unbeſtimmte, und er ſagt bei dieſem Beiſpiel, in welchem eine Auflöſung der Art gar nicht einmal ſein Zweck war: *καὶ ἐν ἀορίστοις ἀριθμοῖς λέλυται τὸ ζητούμενον.* Aber weder ſind die hier gefundenen Ausdrücke die ganz allgemeine Form dreier Zahlen, welche die verlangten Bedingungen erfüllen, noch hat überhaupt Diophant eine klare Vorſtellung von einer ganz allgemeinen Auflöſung, das heißt, von der Auffindung der Unbekannten in einer völlig erſchöpfenden, alle mögliche Zahlen in ſich ſchließenden Formel. So wie es ihm bei der gewöhnlichen Auflöſung genügt, irgend welche Zahlen gefunden zu haben, die das Verlangte leiſten, ſo iſt es ihm bei der Auflöſung *ἐν τῷ ἀορίστῳ* völlig hinreichend, überhaupt eine Formel gefunden zu haben, welche die Auflöſung löſt, unbekümmert darum, ob es nicht etwa noch Zahlen gebe, die ebenfalls die Auflöſung löſen, ohne die von ihm aufgeſtellte Form zu haben. Auch liegt der Sinn, den wir mit einer allgemeinen Auflöſung verbinden, gar nicht in den Worten, mit denen er die allgemeine Auflöſung definirt. Es heißt nämlich **IV**, 20. am Ende: *τὸ γὰρ ἀορίστως ζητεῖν ἐστὶν ἵνα ἡ ὑπόστασις τοιαύτη ᾖ, ἵνα ὅσου τις θέλει τὸν ἀριθμὸν εἶναι, ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ποιήσας σώσῃ τὸ ἐπίταγμα.* „Denn das heißt eine Aufgabe *unbeſtimmt* löſen, wenn der Ausdruck für die geſuchte Zahl ſo beſchaffen iſt, daß, welchen Werth man auch der Unbekannten geben mag, dieſer in die allgemeinen Ausdrücke eingeſetzt immer die Aufgabe löſt.“ Und **IV**, 37. am Ende: *τὸ δὲ ἐν τῇ ἀορίστῳ τοιοῦτόν ἐστιν, ἵνα τὸν ἀριθμὸν ὅσων ἂν τις θέλει μονάδων εἶναι ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις.* „Die Auflöſung in unbeſtimmten Ausdrücken iſt eine ſolche, daß die Unbekannte in den Ausdrücken für die geſuchten Zahlen jeden beliebigen Werth bekommen kann.“ Die ganz allgemeine Formel kann Diophant ſchon darum nicht geben, weil er die gegebenen Größen nicht durch Symbole bezeichnen kann. Indeß giebt er in ſeinen Beiſpielen wenigſtens die allgemeine Regel, nach welcher die Formel in jedem einzelnen Falle zu finden iſt. Es ſind die an und für ſich leichten Aufgaben **IV**, 37. 39. 41. und die etwas ſchwierigere **IV**, 20. Wir wollen ſehen, wie Diophant bei der Aufſuchung ſeiner allgemeiner Formeln zu Werke geht.

IV, 37. *Zwei unbeſtimmte (allgemeine) Zahlenausdrücke zu finden, ſo daß das Product zu ihrer Summe addirt eine gegebene Zahl ausmacht.*

Die gegebene Zahl ſei 8. Die eine der geſuchten Zahlen ſei

x, die andere 3, ſo iſt das Product beider ſammt ihrer Summe $4x+3$, und das iſt gleich 8; daher wird $x=\frac{5}{4}$. Die erſte Zahl iſt alſo $\frac{5}{4}$, die zweite 3. Jetzt bedenke ich, wie es gekommen iſt, daß $x=\frac{5}{4}$ wurde. Offenbar daher, daß ich 5 durch 4, den Coeffi=cienten von x, dividirt habe. Aber 5 iſt der Überſchuß von 8 über 3; 4 dagegen iſt die um 1 größere Zahl als die zweite der geſuch=ten. Wenn ich alſo die zweite Zahl ganz beliebig annehme, und ſie von 8 ſubtrahire, und den Reſt durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl dividire, ſo werde ich die erſte erhalten. Sei z. B. die zweite Zahl $x-1$; dieſes ſubtrahire ich von 8, ſo bleibt $9-x$; dieſes dividire ich durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl, das iſt durch x, ſo wird $\frac{9-x}{x}$ die erſte Zahl. Und wir haben in unbe=ſtimmten Ausdrücken (ἐν τῷ ἀορίστῳ) zwei Zahlen gefunden, ſo daß ihr Product zu ihrer Summe addirt 8 ausmacht.

IV, 39. **Zwei allgemeine Zahlenausdrücke zu fin=den, ſo daß ihr Product weniger ihrer Summe eine ge=gebene Zahl ausmacht.**

Die gegebene Zahl ſei 9. Die erſte der geſuchten ſei x, die zweite 3, ſo iſt ihr Product weniger ihrer Summe $2x-3=8$, alſo $x=5\frac{1}{2}$. Daher iſt die erſte Zahl $5\frac{1}{2}$, die zweite 3. Ich un=terſuche nun wieder, woher $x=5\frac{1}{2}$ geworden iſt. Offenbar, weil ich 11 durch 2 dividirt habe. Aber 11 iſt die Summe der gege=benen und der zweiten geſuchten Zahl; 2 aber iſt die um 1 ver=minderte zweite Zahl. Wenn ich alſo die zweite Zahl ganz beliebig annehme, dazu die gegebene Zahl addire, und dieſe Summe durch die um 1 verminderte zweite Zahl dividire, ſo werde ich die erſte finden. Sei die zweite Zahl $x+1$, dieſes zu 8 addirt giebt $x+9$; dieſes dividire ich durch die um 1 verminderte zweite, das iſt, durch x, ſo wird $\frac{x+9}{x}$ die erſte Zahl. Wir haben dann in unbeſtimm=ten Ausdrücken zwei Zahlen gefunden, ſo daß ihr Product weniger ihrer Summe gleich 8 iſt.

IV, 41. **Zwei allgemeine Zahlenausdrücke zu fin=den, ſo daß ihr Product zu ihrer Summe ein gegebenes Verhältniß hat.**

Es ſei beſtimmt, daß das Product das Dreifache der Summe ſein ſoll. Die erſte Zahl ſei x, die zweite 5, ſo iſt ihr Product $5x$; das ſoll das Dreifache von $x+5$ ſein; daher iſt $3x+15=5x$, alſo $x=7\frac{1}{2}$. Die erſte Zahl iſt alſo $7\frac{1}{2}$, die zweite 5.

Ich unterſuche nun, wie das Reſultat $x = 7\frac{1}{2}$ entſtanden iſt; es kommt her von der Diviſion der 15 durch 2. Aber 15 iſt das Product der zweiten Zahl in den Exponenten des gegebenen Verhältniſſes (ἀλλ' οἱ ιε̅ ὁ δευτέρου πολλαπλασίων ἐστὶν ἐπὶ τὸν λόγον); die 2 aber iſt der Überſchuß der zweiten Zahl über den Exponenten. Wenn ich alſo die zweite Zahl ganz beliebig nehme, und ſie in den Exponenten des Verhältniſſes multiplicire, und das Product durch den Überſchuß der zweiten Zahl über den Exponenten dividire, ſo erhalte ich die erſte Zahl. Die zweite ſei x; dieſe in den Exponenten multiplicirt, giebt $3x$; wenn ich dieſes dividire durch den Überſchuß der zweiten Zahl über den Exponenten, nämlich durch $x-3$, ſo wird die erſte Zahl $\frac{3x}{x-3}$.

In allen drei Beiſpielen iſt alſo die Regel, welche Diophant giebt, ganz allgemein und für jede gegebene Zahl geltend, und es iſt nur ein Mangel ſeiner Symbolik, daß er die Regel in ihrer Allgemeinheit nicht in eine Formel überſetzen kann. Die Regel IV, 37. ſagt: Wenn die eine Zahl $x-1$ iſt, ſo iſt die andere $\frac{a-x+1}{x}$. Die Regel IV, 39.: Wenn die eine Zahl $x+1$ iſt, ſo iſt die andere $\frac{a+x+1}{x}$. Bei dem dritten Beiſpiel iſt zu bedenken, daß Diophant durchgehends unter dem Verhältniß immer das Vielfache verſteht, das heißt, daß er nur Verhältniſſe ſtatuirt, deren Exponenten ganze Zahlen ſind. Er nimmt alſo an, das Product der beiden Zahlen verhalte ſich zu ihrer Summe, wie $m:1$; iſt dann die eine Zahl x, ſo iſt die andere $\frac{x-m}{mx}$. Setzten wir allgemeiner das Verhältniß $m:n$, und die erſte Zahl x, ſo würde die zweite $\frac{mx}{nx-m}$ werden.

Etwas complicirter, aber darum nicht weniger allgemein gelöſt iſt das Beiſpiel

IV, 20. **Drei Zahlen in allgemeinen Ausdrücken zu finden, ſo daß das Product von je zweien ein Quadrat wird, wenn man 1 dazu addirt.**

„Da ich verlange, daß das Product der erſten und zweiten um 1 vermehrt eine Quadratzahl werde, ſo werde ich dieſes Product haben, wenn ich von irgend einem Quadrate 1 abziehe. Ich bilde das Quadrat von x mit irgend einem Coefficienten (πλάσσω τετρά-

τετράγωνον ἀπὸ ςς̃ ὅσων δήποτε) und der Zahl 1, z. B. $x+1$, ſo iſt das Quadrat x^2+2x+1; wenn ich davon 1 abziehe, ſo wird der Reſt x^2+2x das Product der erſten und zweiten Zahl ſein. Die zweite Zahl ſei x, ſo iſt die erſte $x+2$. Da ich ferner verlange, daß das Product der zweiten und dritten Zahl um 1 vermehrt eine Quadratzahl werde, ſo werde ich, wenn ich von irgend einer Quadratzahl 1 ſubtrahire, das Product der zweiten und dritten haben. Ich bilde das Quadrat von $3x+1$, welches $9x^2+6x+1$ iſt, ſo wird das Product der zweiten und dritten Zahl $9x^2+6x$. Die zweite Zahl iſt aber x; alſo die dritte $9x+6$. Da ich endlich will, daß auch das Product der erſten und dritten Zahl ein Quadrat werden ſoll, wenn man 1 addirt, ſo muß $9x^2+24x+13$ ein Quadrat ſein." — Hätte nun Diophant nicht eine allgemeine, ſondern eine gewöhnliche Auflöſung in beſtimmten Zahlen verlangt, ſo wäre nichts leichter, als dieſen Ausdruck zu einem Quadrate zu machen. Nun aber wendet er die Methode der Zurückrechnung an, um durch eine neue Annahme ſtatt der oben willkührlich gewählten Quadrate von $x+1$ und von $3x+1$ auf einen Endausdruck zu gelangen, der ſchon ſeiner Form nach Quadrat iſt. Er fährt alſo ſo fort: „Nun iſt zwar der Coefficient von x^2 ein Quadrat (καὶ ἔχω τὰς δυνάμεις τετραγωνικάς); wenn nun auch die beſtimmte Zahl (13) ein Quadrat, und das doppelte Product der Wurzeln beider Quadratzahlen (des Coefficienten von x^2 und der beſtimmten Zahl) dem Coefficienten von x gleich wäre, ſo wären die drei Bedingungen allgemein gelöſt. Aber die 13 ſind entſtanden aus dem Product der 6 und der 2, zu welchem 1 addirt iſt. Die 2 aber rührt her von dem doppelten Product des x in 1, die 6 von dem doppelten Product von $3x$ in 1. Ich will alſo, daß der doppelte Coefficient von x in der einen Wurzel mit dem doppelten Coefficienten von x in der andern Wurzel multiplicirt und um 1 vermehrt ein Quadrat gebe (θέλω οὖν δὶς τοὺς ςς^{οὺς} ἐπὶ δὶς τοὺς ςς^{οὺς} μετὰ μ̊ ᾱ ποιεῖν τετράγωνον). Aber das Doppelte mit dem Doppelten multiplicirt iſt das Vierfache. Ich will alſo, daß das vierfache Product der Coefficienten um die Einheit vermehrt ein Quadrat gebe. Wenn man aber zu dem vierfachen Producte irgend zweier Zahlen das Quadrat ihres Unterſchiedes addirt, ſo erhält man ein Quadrat. Wenn ich alſo das Quadrat des Unterſchiedes gleich 1 ſetze, ſo wird das vierfache Product der Zahlen, um 1 vermehrt, ein Quadrat ſein. Wenn aber das

Quadrat des Unterſchiedes 1 iſt, ſo iſt der Unterſchied ſelbſt 1. Darum muß man die obigen Quadrate ſo bilden, daß die Coeffi-cienten von x in den Wurzeln zwei zunächſt auf einander folgende Zahlen ſind, z. B. von $x+1$ und von $2x+1$. Das Quadrat von $x+1$ iſt x^2+2x+1, alſo das Product der erſten und zweiten Zahl x^2+2x; die zweite Zahl ſei x, ſo iſt die erſte $x+2$. Ferner da das Quadrat von $2x+1$ gleich $4x^2+4x+1$ iſt, ſo iſt das Product der zweiten und dritten Zahl $4x^2+4x$; die zweite iſt aber x, alſo die dritte $4x+4$. Es iſt alſo in allgemeinen Ausdrücken erlangt, daß das Product von je zweien um die Ein-heit vermehrt ein Quadrat iſt, und man kann x annehmen wie man will.

Es hat bei dieſer Auflöſung den Anſchein, als ob Diophant eine der Bedingungen, welche nöthig iſt, um die Formel $9x^2+24x+13$ in eine quadratiſche Form zu verwandeln, vernachläſſigt habe. Es muß nämlich, damit dieſer Ausdruck ein allgemeines Quadrat ſei, zuerſt ſtatt 13 eine Quadratzahl erlangt werden, und ſodann muß ſtatt 24 das doppelte Product der Wurzeln der ſtatt 9 und und 13 zu ſubſtituirenden Quadrate in die Formel kommen. Von dieſer letzten Bedingung ſpricht Diophant gar nicht, dagegen führt er einen ſcheinbar willkührlichen Satz ein, nach welchem die An-nahme ſo zu machen iſt, daß man für 13 eine Quadratzahl er-halte. Indeß iſt nur ſein Vortrag inſofern fehlerhaft, als er die Einführung dieſes Satzes und die dadurch zugleich bewirkte Erfül-lung der zweiten Bedingung nicht gehörig motivirt; die Sache aber iſt ganz richtig, wie die Ausführung in allgemeinen Zeichen beweiſt. Nennen wir die drei geſuchten Zahlen, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, und ſetzen $\boldsymbol{AB}+1=(mx+1)^2$, $\boldsymbol{BC}+1=(nx+1)^2$, und $\boldsymbol{B}=x$, ſo wird $\boldsymbol{A}=m^2x+2m$, $\boldsymbol{C}=n^2x+2n$. Nun ſoll auch noch $\boldsymbol{AC}+1$ ein Quadrat werden. Aber $\boldsymbol{AC}+1$ wird $=m^2n^2x^2+2mn(m+n)x+4mn+1$. Damit dieſer Ausdruck die allgemeine Form eines Quadrats habe, muß 1) $4mn+1=p^2$, 2) $2mn(m+n)=2mnp$, alſo $m+n=p$ ſein. Demnach muß $4mn+1=(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$, alſo $1=m^2-2mn+n^2$, folglich $m-n$ oder $n-m=1$, $n=m+1$ ſein. Das iſt aber eben das Reſultat, welches Diophant herausgebracht hat. Setzen wir alſo $\boldsymbol{B}=x$, $\boldsymbol{A}=m^2x+2m$, ſo wird $\boldsymbol{C}=(m\pm1)^2x+2(m\pm1)$.

Fragen wir nun, welchen Zweck dieſe vereinzelten allgemein gelöſten Aufgaben haben, ſo ergiebt ſich die Antwort hierauf ſofort,

wenn wir die Stellung, welche dieſe Aufgaben einnehmen, berück- ſichtigen. Alle dieſe hier erörterten Aufgaben ſind als Hilfsaufgaben für zuſammengeſetztere in Zahlen zu löſende zu betrachten, welche den Zweck haben, für die folgende Aufgabe die Annahme ſo zu beſtimmen, daß von den n Bedingungen $(n-1)$ ſogleich durch die Annahme erledigt werden. Die eben betrachtete Aufgabe IV, 20. lehrt in allgemeinen Ausdrücken drei Zahlen finden, ſo daß das Product von je zweien um 1 vermehrt ein Quadrat wird. Die nächſtfolgende Aufgabe verlangt, vier Zahlen unter derſelben Bedingung zu finden. Auf die vorhergelöſte Aufgabe geſtützt nun ſetzt Diophant $AB+1=(x+1)^2$, $AC+1=(2x+1)^2$, $AD+1=(3x+1)^2$, und $A=x$, ſo wird $B=x+2$, $C=4x+4$, $D=9x+6$, und es ſind außer den drei hingeſchriebenen Bedingungen, der vorigen Aufgabe gemäß, auch noch die beiden erledigt, daß $BC+1$ und $CD+1$ Quadrate ſind. Es bleibt alſo nur noch übrig, daß auch $BD+1$ Quadratzahl werde. Aber $BD+1$ iſt $=9x^2+24x+13$; dieſer Ausdruck iſt alſo noch zu einem Quadrate zu machen, wodurch der Werth von x beſtimmt wird. Ganz ähnlich verhält es ſich mit den drei übrigen Aufgaben dieſer Art. Alle drei ſetzten ſich vor, zwei Zahlen unter gewiſſen Bedingungen zu ſuchen; die die nächſtfolgende Aufgabe verlangt dann drei Zahlen unter denſelben Bedingungen. Die ſechs Aufgaben IV, 37—42. ſind demnach folgende:

37. In allgemeinen Ausdrücken: $AB+A+B=a$; Reſultat: $B=x-1$, $A=\frac{a-x+1}{x}$.

38. In Zahlen: $AB+A+B=a$, $BC+B+C=b$, $AC+A+C=c$. Sei $B=x-1$, ſo iſt $A=\frac{a-x+1}{x}$, $C=\frac{b-x+1}{x}$, und die beiden erſten Bedingungen ſind erfüllt, die dritte bleibt zur Beſtimmung des x übrig.

39. In allgemeinen Ausdrücken: $AB-A-B=a$; Reſultat: $B=x+1$, $A=\frac{a+x+1}{x}$.

40. In Zahlen: $AB-A-B=a$, $BC-B-C=b$, $AC-A-C=c$. Sei $B=x+1$, ſo iſt $A=\frac{a+x+1}{x}$, $C=\frac{b+x+1}{x}$, und zwei Bedingungen ſind erfüllt; die dritte giebt x.

41. Jn allgemeinen Ausdrücken: $AB=m(A+B)$. Es wird $B=x$, $A=\frac{mx}{x-m}$.

42. Jn Zahlen: $AB=m(A+B)$, $BC=n(B+C)$, $AC=p(A+C)$. Sei $B=x$, ſo iſt $A=\frac{mx}{x-m}$, $C=\frac{nx}{x-n}$, und zwei Bedingungen ſind erfüllt; die dritte giebt x.

Außer dieſen vier vollſtändigen Aufgaben aber finden wir dieſelbe Methode häufig innerhalb anderer Aufgaben angewandt, und wir haben in den bisher bei verſchiedenen Gelegenheiten mitgetheilten Beiſpielen bereits Fälle kennen gelernt, in denen Diophant die in den Nebenaufgaben concret gefundenen Zahlen in x multiplicirte, wenn die Natur der Aufgabe es mit ſich brachte, daß jede Zahlen in dem gefundenen Verhältniſſe daſſelbe leiſteten. Wir haben z. B. oben die Aufgabe IV, 26. betrachtet. Sie befahl, eine gegebene Zahl in drei andere zu zerlegen, ſo daß das Product aus allen dreien ein Kubus wird, deſſen Wurzel der Summe der Unterſchiede von je zweien gleich iſt. Wenn nun drei Zahlen, a, b, c, die Eigenſchaft haben, daß ihr Product abc ein Kubus iſt, deſſen Wurzel die Summe der Unterſchiede $(a-b)+(b-c)+(a-c)$ oder $2(a-c)$ iſt, ſo haben jede drei Zahlen, die ſich wie a, b, c verhalten, dieſelbe Eigenſchaft. Denn wenn $abc=8(a-c)^3$ iſt, und man ſubſtituirt ma, mb, mc für a, b, c, ſo iſt das Product derſelben m^3abc; der Kubus der Summe der Unterſchiede aber $8(ma-mc)^3=8m^3(a-c)^3$; da aber $abc=8(a-c)^3$ war, ſo iſt auch $m^3nbc=8m^3(a-c)^3$. Nun findet Diophant, daß die Zahlen $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{5}$ und $\frac{5}{3}$, dieſer Forderung genügen; daher auch jedes gleichartige Vielfache derſelben. Zuerſt nun ſchafft er die Nenner weg, indem er alle drei Zahlen mit 15 multiplicirt; dann werden noch die Zahlen 40, 27, 25 dieſelbe Eigenſchaft haben. Nun ſollen aber die drei Zahlen nicht bloß dieſe Eigenſchaft haben, es ſoll auch ihre Summe einer gegebenen Zahl, 4, gleich ſein. Um noch dieſe Bedingung erfüllen zu können, betrachtet Diophant die drei gefundenen Zahlen als Coefficienten von x, und ſetzt nun die geſuchten Zahlen $40x$, $27x$, $25x$, wie wir oben geſehen haben. — Sehr oft findet ſich dieſes Verfahren in dem ſechſten Buche angewandt, deſſen Aufgaben über die rechtwinkligen Dreiecke zum großen Theil der Art ſind, daß einen Theil den in der Aufgabe beſtimmten Bedingungen alle ähnlichen Dreiecke gemein

haben. Es kommt da alſo zunächſt darauf an, die Form des geſuchten Dreiecks zu beſtimmen. Iſt die gefunden, ſo ſagt Diophant: τάσσω τὸ τρίγωνον ἐν ἀριϑμοῖς, d. h. ich multiplicire die gefundenen Seiten des Dreiecks in x. Ich will von dieſem an und für ſich einfachen Verfahren keine Beiſpiele weiter ausführen, ſondern begnüge mich auf die Aufgaben VI, 3. 4. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 13. 15. 17. zu verweiſen.

7. Willkührliche Beſtimmungen und Annahmen.

Wenn ich hier von willkührlichen Beſtimmungen, deren ſich Diophant als Auflöſungsmittel bedient, ſprechen will, ſo habe ich nicht ſolche Willkührlichkeiten im Sinne, welche als unmittelbare und nothwendige Folge ſeiner unvollkommenen Zeichenſprache erſcheinen. Wenn er z. B. den Ausdruck $6x+1$ zu einem Quadrate machen will, und nun ſagt, ich ſetze $6x+1=25$, ſo iſt $x=4$, ſo iſt das allerdings eine willkührliche Annahme. Aber Jedermann ſieht ohne weitere Erklärung ſogleich ein, daß er ſtatt 25 jede beliebige Quadratzahl hätte ſetzen, und ſo durch allmählige Subſtitution beliebig viele Werthe für x hätte herleiten können, daß alſo Diophant's Verfahren im Grunde ebenſo allgemein iſt als das unſrige, mit dem Unterſchiede, daß jenes die Zahlenwerthe für x ſucceſſive liefert, welche wir in der allgemeinen Formel $x=\frac{m^2-1}{6}$ auf einmal vor Augen ſehen. Von ſolchen verzeihlichen Mängeln, die durch die Mangelhaftigkeit ſeiner Symbolik bedingt ſind, ſpreche ich hier nicht. Vielmehr will ich hier dasjenige Verfahren Diophant's erörtern, vermöge deſſen er durch irgend eine willkührliche Vorausſetzung neue Bedingungen in die Aufgabe hineinlegt, die den Worten derſelben fremd ſind. Dieſes verzweifelten Hilfsmittels, welches natürlich nur bei unbeſtimmten Aufgaben anwendbar iſt, bedient ſich Diophant ſo häufig und in ſo mannigfacher Geſtalt, daß es mir in der That ſchwer wird, einige allgemeinere Geſichtspuncte aufzuſtellen, unter welche die einzelnen Fälle ſich mit Überſichtlichkeit unterordnen laſſen. Zwei Klaſſen ſolcher willkührlichen Beſtimmungen laſſen ſich indeß leicht aus der großen Maſſe herausfinden; die erſte begreift den Fall, in welchem von mehren Unbekannten eine von vorn herein als beſtimmte gegebene Zahl angenommen wird; die zweite Klaſſe begreift den Fall, wenn irgend eine Relation zwi-

Digitized by Google

ſchen zwei oder mehren Unbekannten durch die Form, die Diophant denſelben giebt, als gegeben vorausgeſetzt wird, wodurch den Bedingungen der Aufgabe eine neue hinzugefügt wird. Die Beiſpiele für beide Klaſſen ſind ſo häufig, daß es ſich nicht der Mühe belohnt, ſie alle namhaft zu machen. Zu der erſten Klaſſe gehört z. B. die Aufgabe

I, 14. Zwei Zahlen zu finden, deren Product zu ihrer Summe ein gegebenes Verhältniß habe.

Diophant nimmt an, daß das Product dreimal ſo groß als die Summe ſein ſoll. Demnach würden wir, wenn wir die Zahlen x und y ſetzten, die Gleichung erhalten $xy = 3(x+y)$, alſo $y = \frac{3x}{x-1}$. Diophant ſetzt dagegen die eine Zahl x, die andere 12, woraus die erſte ſich $= 4$ ergiebt.

Dieſer ähnlich nimmt Diophant in den Aufgaben I, 25. 26. 27. 28. II, 19. V, 7. 30. 31. und andern für eine der geſuchten Zahlen eine beſtimmte Zahl an.

Beiſpiele der zweiten Klaſſe ſind die Aufgaben II, 1—5., in welchen zu der Beſtimmung der Aufgabe durch die willkührliche Annahme noch das Verhältniß der beiden geſuchten Zahlen als gegeben angenommen wird. Ähnlich geſchieht das in der Aufgabe

II, 18. Drei Zahlen zu finden, ſo daß, wenn jede an die folgende einen beſtimmten Theil ihrer ſelbſt und außerdem eine gegebene Zahl abgiebt, die Reſultate nach der gegenſeitigen Mittheilung am Ende gleich werden.

Die erſte Zahl ſoll an die zweite ein Fünftel und die Zahl 6, die zweite an die Dritte ein Sechſtel und die Zahl 7, die dritte an die erſte ein Siebentel und die Zahl 8 abgeben. Nennen wir nun, um Brüche zu vermeiden, die erſte Zahl $5x$, die zweite $6y$, die dritte $7z$, ſo giebt die erſte $x+6$ ab und empfängt $z+8$; die zweite giebt $y+7$ und empfängt $x+6$; die dritte giebt $z+8$ und empfängt $y+7$; demnach wird nach dieſer Mittheilung die erſte $4x+z+2$, die zweite $x+5y-1$, die dritte $y+6z-1$. Dieſe drei Ausdrücke ſollen einander gleich ſein; man erhält alſo zwei Gleichungen unter den drei Unbekannten, und wenn man daraus y und z durch x ausdrückt, ſo bleibt die erſte Zahl $5x$, die zweite wird $\frac{57x+54}{13}$, die dritte $\frac{119x+84}{26}$. Will man ganze Zah-

len erhalten, ſo ſetze man $x=26n+10$, ſo wird die erſte $130n+50$, die zweite $114n+48$, die dritte $119n+49$. Dieſes iſt der allgemeine Ausdruck aller Zahlen, welche der Aufgabe genügen. Was thut aber Diophant? Er ſetzt die erſte Zahl $=5x$, die zweite $=6x$, er fügt alſo der urſprünglichen Aufgabe noch die Bedingung hinzu, daß die beiden erſten Zahlen ſich wie 5 zu 6 verhalten, wodurch die unbeſtimmte Aufgabe in eine beſtimmte verwandelt wird. Denn indem nun unter unſern allgemeinen Formeln noch die Bedingung ſtattfinden ſoll, daß $130n+50:114n+48=5:6$ iſt, ſo erhält n einen beſtimmten Werth, nämlich $-\frac{2}{7}$, und die drei Zahlen werden $\frac{90}{7}, \frac{108}{7}, \frac{105}{7}$.

Wenn Diophant VI, 19. zwei Zahlen ſucht, ſo daß der Kubus der einen um 2 größer iſt als das Quadrat der andern, und dann die erſte $x-1$, die zweite $x+1$ ſetzt, ſo löſt er ja nicht mehr jene Aufgabe, wie ſie allgemein geſtellt war, ſondern er fügt durch dieſe Annahme die neue Bedingung hinzu, daß die beiden Zahlen die Differenz 2 haben. Die Willkührlichkeit iſt gerade an dieſer Stelle um ſo unverantwortlicher, als gerade aus dieſer Annahme die Operation eine Wendung erhält, welche auf keinen andern Fall anwendbar iſt. Es wäre ein vergebliches Bemühen, auf demſelben Wege zwei Zahlen unter den obigen Bedingungen zu ſuchen, deren Differenz nicht 2 iſt. Offenbar iſt in einem Falle, wie dieſer, die begangene Willkühr von weit mehr Bedeutung, als in den vorhererwähnten, in denen immer noch der Vorwurf dadurch abgewehrt werden konnte, daß man ſagte: es kann ja ſtatt der hier eingeführten Beſtimmung irgend eine andere gemacht werden. Indem ich alſo die beiden erwähnten Klaſſen von Willkührlichkeiten übergehe, wende ich mich hier zu ſolchen Beiſpielen, in welchen durch die willkührliche Beſtimmung entweder, wie in dem angeführten Beiſpiele VI, 19. eine partielle Auflöſung erſchlichen wird, die nicht von allgemeiner Anwendbarkeit iſt, oder auf der andern Seite der Knoten, um deſſen Löſung es ſich handelt, eigenmächtig zerhauen wird.

Ein merkwürdiges Beiſpiel von einer erſchlichenen Auflöſung bietet uns die oben bei Gelegenheit der Grenzmethode ausgeführte Aufgabe V, 13. Dieſe Aufgabe verlangte, die Zahl 1 in zwei Stücke zu theilen, ſo daß, wenn man zu jedem derſelben eine andere gegebene Zahl addirt, beide Summen Quadrate werden. Nennen wir das eine Stück A, das andere B, und die gegebenen Zah-

len a und b, ſo haben wir die drei Gleichungen $A+B=1$, $A+a=x^2$, $B+b=y^2$. Die Addition der beiden letzten Gleichungen giebt $A+B+a+b$, das iſt, $a+b+1=x^2+y^2$. Daraus folgt die Determination, die Diophant ausgelaſſen hat, daß die gegebenen Zahlen ſo beſchaffen ſein müſſen, daß ihre Summe, wenn man 1 dazu addirt, die Summe von zwei Quadraten ſein könne. Diophant ſetzt $a=2$ und $b=6$, ſo wird $a+b+1=9$; anſtatt nun, um die Auflöſung allgemein gültig darzuſtellen, 9 als eine Zahl zu betrachten, die ſich in zwei Quadrate zerlegen läßt, betrachtet er ſie als Quadratzahl, ſo daß ſein ganzes folgendes Verfahren nicht mehr anwendbar iſt, wenn die Zahl $a+b+1$ bloß als Summe zweier Quadratzahlen ausfällt; ein Fall, in dem die Auflöſung immer noch möglich bleibt.

Aber wir wollen weiter gehen und ſehen, was Diophant aus folgender Aufgabe macht.

IV, 7. Man ſoll zu einem Kubus und zu einem Quadrate ein anderes Quadrat addiren, und die Summen ſollen verwechſelt dieſelbe Eigenſchaft haben. (Κύβῳ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ.)

Das heißt, man ſoll drei Zahlen w^3, y^2, z^2 ſuchen, ſo daß w^3+z^2 ein Quadrat, dagegen y^2+z^2 ein Kubus werde. Da nun y^2+z^2 ein Kubus ſein ſoll, ſo ſei, ſagt Diophant, dieſe Summe gleich w^3. Durch dieſe ganz willkührliche Beſtimmung wird aber der Aufgabe eine völlig neue Geſtalt gegeben. Nun heißt es: Man ſoll zwei Quadratzahlen finden, ſo daß ihre Summe ein Kubus, die Summe der erſten und der doppelten zweiten aber ein Quadrat werde; und ſtatt der obigen Gleichungen erhalten wir nun dieſe: $y^2+z^2=w^3$, $y^2+2z^2=t^2$. Von dieſer Aufgabe, welche ein ganz ſpecieller Fall der urſprünglich gegebenen iſt, giebt Diophant zwei verſchiedene Auflöſungen, die nicht das Anſprechende der ſonſtigen Diophantiſchen Manier haben. Die erſte iſt dieſe. Es ſoll w^3+z^2 ein Quadrat werden. Wenn ich aber irgend zwei Zahlen nehme, und zu der Summe ihrer Quadrate ihr doppeltes Product addire, ſo erhalte ich immer wieder ein Quadrat. Wenn ich alſo irgend zwei Zahlen nehme, ſo ſetze ich die Summe ihrer Quadrate gleich w^3, ihr doppeltes Product aber gleich z^2. Aber z^2 iſt ein Quadrat; daher müſſen die Zahlen ſo gewählt werden, daß ihr doppeltes Product ein Quadrat iſt. Die

eine Zahl ſei x, die andere $2x$, damit ihr doppeltes Product ein Quadrat werde. Darum ſetze ich die erſte Zahl $w^3 = 5x^2$, der Summe der Quadrate der angenommenen Zahlen, ihr doppeltes Product aber, nämlich $4x^2 = z^2$, ſo iſt $y^2 = w^3 - z^2 = x^2$. So iſt die Bedingung erfüllt, daß $y^2 + z^2$ der erſten Zahl w^3 gleich und zugleich, daß die Summe der erſten und dritten, $w^3 + z^2$, ein Quadrat iſt. Es bleibt nur noch übrig, den Ausdruck für w^3, nämlich $5x^2$, zu einem Kubus zu machen. Sei alſo $5x^2 = x^3$, ſo iſt $x = 5$. Der geſuchte Kubus iſt alſo 125, das Quadrat 25, und das zweite Quadrat, welches man zu beiden addiren ſoll, iſt 100; καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις. — In der zweiten Auflöſung ſucht Diophant zuerſt, um der Gleichung $y^2 + 2z^2 = t^2$ zu genügen, zwei Quadrate, ſo daß die Summe des einen und des doppelten andern ein Quadrat ſei. Zu dem Ende ſetzt er das eine Quadrat $= x^2$, das andere $= 4$, ſo ſoll $2x^2 + 4$ ein Quadrat ſein, und zwar bildet er das Quadrat von $2x - 2$, das iſt $4x^2 - 8x + 4$, ſo wird $x = 4$. Die beiden geſuchten Quadrate werden alſo 4 und 16 ſein. Dieſe gefundenen Zahlen nun macht er zu Coefficienten von x^2, und ſetzt $y^2 = 4x^2$, $z^2 = 16x^2$, demnach wird ihre Summe $20x^2$ der geſuchte Kubus ſein müſſen. Damit nun $20x^2$ ein Kubus werde, ſetzt Diophant wieder $20x^2 = x^3$, ſo wird $x = 20$. Die drei geſuchten Zahlen ſind alſo, die Kubikzahl 8000, die erſte Quadratzahl 1600, die zweite Quadratzahl, die addirt werden ſoll, $= 6400$. Τοῦτο δὲ ἀπειραχῶς δείκνυται.

Nachdem die Aufgabe einmal durch die willkührliche Annahme, daß die zu einem Kubus zu machende Summe der beiden geſuchten Quadrate dem geſuchten Kubus gleich ſein ſoll, auf dieſe ſpecielle Form reducirt iſt, iſt es leicht, beide Diophantiſche Auflöſungen allgemeiner darzuſtellen. Da ſowohl $w^3 + z^2$ als $w^3 - z^2$ ein Quadrat werden ſoll, ſo ſetzt Diophant w^3 gleich der Summe zweier Quadrate, z^2 gleich dem doppelten Producte der Wurzel. Damit aber z^2 ein Quadrat werde, muß, wenn die eine der angenommenen Zahlen m iſt, die andere $2mp^2$ ſein. Dann wird $w^3 = m^2(1 + 4p^4)$, $z^2 = 4m^2p^2$, alſo $w^3 + z^2 = m^2(2p^2 + 1)^2$, $w^3 - z^2$, daß iſt $y^2 = m^2(2p^2 - 1)^2$, und es bleibt nur noch übrig den Ausdruck für w^3 zu einem Kubus zu machen; das geſchieht aber, wenn wir $m^2(4p^4 + 1) = m^3q^3$ ſetzen, ſo wird $m = \frac{4p^4 + 1}{q^3}$. Demnach werden die Wurzeln der drei geſuchten Zahlen $w = \frac{4p^4 + 1}{q^2}$,

$y=\frac{(4p^4+1)(2p^2-1)}{q^3}$, $z=\frac{2p(4p^4+1)}{q^3}$. Bei Diophant iſt $p=q=1$. In der zweiten Auflöſung fängt Diophant damit an, daß er zuerſt zwei Quadrate p^2, n^2 ſucht, ſo daß $2p^2+n^2$ ein Quadrat wird. Setzt man die Wurzel dieſes Quadrats $=2mp-n$, ſo wird $p=\frac{2mn}{2m^2-1}$. Nun ſetzt Diophant $y^2=n^2x^2$, $z^2=\frac{4m^2n^2}{(2m^2-1)^2}x^2$, ſo ſoll die Summe dieſer beiden Quadrate ein Kubus werden. Es wird aber $y^2+z^2=n^2x^2\left(1+\frac{4m^2}{(2m^2-1)^2}\right)=n^2x^2\cdot\frac{4m^4+1}{(2m^2-1)^2}$; dieſes ſei $=q^3x^3$, ſo wird $x=\frac{n^2(4m^4+1)}{q^3(2m^2-1)^2}$, alſo $w=\frac{n^2(4m^4+1)}{q^2(2m^2-1)^2}$, $y=\frac{n^3(4m^4+1)}{q^3(2m^2-1)^2}$, $z=\frac{2mn^3(4m^4+1)}{q^3(2m^2-1)^3}$, und die Conformität dieſer Formeln mit den vorher gefundenen leuchtet ein, obgleich ihr äußeres Ausſehen etwas abweichend iſt. Bei Diophant iſt $n=2$, $m=1$, $q=1$.

Zu entſchuldigen iſt die kleine Willkühr in den Aufgaben V, 1. 2., in welchen drei ſtetig proportionirte Zahlen geſucht werden, deren jede, wenn man eine gegebene Zahl, 12, davon ſubtrahirt oder dazu addirt, zum Reſt oder zur Summe ein Quadrat giebt. Nun iſt der allgemeine Ausdruck dreier ſtetig proportionirter Zahlen y, xy, x^2y, es ſollen alſo in der erſten Aufgabe die Formeln $y-12$, $xy-12$, x^2y-12 Quadrate werden. Nach ſeiner Art hätte Diophant nun für y irgend eine Zahl annehmen können, welche ein Quadrat übrig läßt, wenn man 12 davon abzieht, z. B. 28. Dann blieben noch zwei Bedingungen zu erfüllen, daß nämlich $28x-12$ und $28x^2-12$ Quadrate werden. Dieſe doppelte Gleichung kann er aber nicht löſen; darum ſucht er für y nicht im Allgemeinen eine Zahl, ſondern eine Quadratzahl, welche um ein Quadrat größer iſt als 12, z. B. $\frac{169}{4}$; dann werden die beiden andern Zahlen $\frac{13}{2}x$ und x^2, und die zu Quadraten zu machenden Ausdrücke ſind jetzt $\frac{13}{2}x-12$ und x^2-12, wo der Coefficient von x^2 die Einheit iſt, in welchem Falle die Auflöſung, wie wir in dem vorigen Kapitel geſehen haben, keine Schwierigkeit hat.

Weſentlichere Einwürfe aber laſſen ſich gegen folgende Auflöſung machen, wenn auch die Willkührlichkeit daſelbſt weniger in der Sache, als in der Darſtellung liegt.

V, 19. Drei Zahlen zu finden, ſo daß der Kubus

ihrer Summe ein Kubus bleibt, wenn man jede der drei Zahlen davon abzieht.

Diophant ſetzt die Summe der drei Zahlen x, jede der drei Zahlen aber gleich x^3 mit einem Coefficienten von der Form $\frac{m^3-1}{m^3}$, ſo iſt der Kubus der Summe, wenn man die einzelne Zahl davon abzieht, $=\frac{1}{m^3}x^3$, alſo ſicher ein Kubus. Es kommt alſo nur noch darauf an, daß die Summe der drei Zahlen wirklich $=x$ ſei. Wir haben alſo, wenn wir die drei Zahlen $\frac{m^3-1}{m^3}x^3$, $\frac{n^3-1}{n^3}x^3$ und $\frac{p^3-1}{p^3}x^3$ ſetzen, die Gleichung

$$\left(\frac{m^3-1}{m^3}+\frac{n^3-1}{n^3}+\frac{p^3-1}{p^3}\right)x^3=x$$

oder $$1-\frac{1}{m^3}+1-\frac{1}{n^3}+1-\frac{1}{p^3}=\frac{1}{x^2}$$

oder $$3-\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{p^3}\right)=\frac{1}{x^2}.$$

Es kommt alſo darauf an, drei Kubikzahlen zu finden, deren Summe von 3 abgezogen ein Quadrat zum Reſte läßt. Wenn aber die oben für die drei Zahlen angenommenen Ausdrücke poſitiv werden ſollen, ſo muß jede der drei Zahlen m, n, p größer als 1, alſo muß auch jede der drei hier geſuchten Kubikzahlen $\frac{1}{m^3}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{p^3}$ kleiner als 1 ſein. Damit das letztere geſchehe, nimmt Diophant ohne weitern Grund an, daß ſchon ihre Summe kleiner als 1 ſei. Halten wir dieſe Annahme nun einmal feſt, ſo folgt daraus, daß $\frac{1}{x^2}$ größer als 2 und kleiner als 3 ſein müſſe. Unter den unzähligen Quadraten, welche innerhalb dieſer Grenzen liegen, nimmt Diophant $\frac{9}{4}$ für $\frac{1}{x^2}$, ſo ſtellt ſich nun die Aufgabe ſo: die Zahl $3-\frac{9}{4}$, das iſt, $\frac{3}{4}$ in drei Kubikzahlen zu zerlegen. Man gebe dem Bruche $\frac{3}{4}$ einen kubiſchen Nenner, z. B. 216, ſo ſoll man alſo $\frac{162}{216}$, oder mit andern Worten den Zähler 162 in die Summe von drei Kubikzahlen zerlegen. „Nun beſteht, ſagt Diophant, die Zahl 162 aus dem Kubus 125 und der Differenz der beiden Kubi 64 und 27 (nämlich $162=125+37$). Wir haben aber in den Porismen den Satz, daß die Differenz zweier Kubi allemal auch die Summe zweier Kubi iſt. Wir kehren zu der urſprünglichen Auf-

gabe zurück, und nehmen für die drei Kubikzahlen jede der drei gefundenen. Für die Summe aber nehmen wir wieder x an; ſo trifft es zu, daß der Kubus der Summe, wenn man jede der drei Zahlen davon abzieht, einen Kubus zum Reſt läßt; es iſt alſo nur noch nöthig, daß die drei Zahlen zuſammen gleich x ſind; die Summe der drei Zahlen iſt aber $\frac{9}{4}x^3$, alſo $x = \frac{2}{3}$."

Abgeſehen von der willkührlichen Annahme $\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{p^3} > 1$, da doch aus der Natur der Aufgabe nur die Bedingung $\frac{1}{m^3} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{p^3} < 3$ folgt, da jeder der drei Kubi an und für ſich kleiner als 1 ſein muß, ſo ſcheint die ganze Auflöſung, wie ſie von Diophant dargeſtellt iſt, auf dem zufälligen Umſtande zu beruhen, daß 162 die Summe eines Kubus und der Differenz zweier andern Kubi iſt, und es erhellt aus dem Vortrage nicht, wie man ſich zu benehmen habe, wenn man ſtatt des willführlich angenommenen Quadrats $\frac{9}{4}$ ein anderes gewählt hätte. Wir können es daher Bachet nicht eben verargen, wenn er geſteht, daß aus dem angeführten Grunde die ganze Auflöſung ihm dunkel geblieben ſei[1]. Jedenfalls hätte

1) Haec propositio, ſagt er in ſeinem Commentar, est de numero eorum, quas ut ad nos pervenerunt, fateor me non satis assequi. Quamvis enim de illius solutioae satis mihi constet, ut infra putebit, duo tamen sunt, quae totam ejus tructationem valde imperfectam mihi videri faciunt. Primum enim licet ingeniose inferat Diophantus invenieados esse tres cubos, quorum quilibet sit unitate minor, ita ut summa eorum a ternario sublata, relinquat quadratum; unde concludit curandum esse ut tres cubi simul sint unitate minores, sic enim quilibet multo magis erit unitate minor, quare sequitur qaadratum qui relinquitur, summam cuborum naferendo a ternario, debere esse mnjorem quam 2 minorem quam 3.; licet inqunm huec subtiliter edisserat Diophuntus, aon docet tamea quomodo tnlis inveniendus sit quadratus, et cur $2\frac{1}{4}$ sumat potius quam alium quemlibet ex infinitis qui cadunt inter 1 et 3 (ſoll heißen 2 et 3). Certe, ut ex processu apparet, talis deligendus est quadrntus, quo a ternario sublato, relinquatur numerus ex tribus cubis compositus. Id ergo qui fieri possit urte certa, docere debuit Diophantus, neque enim in promptu est si loco quadrati $2\frac{1}{4}$ sumatur quadratus $2\frac{7}{9}$, quomodo residuum de 3, puta $\frac{2}{9}$ dividi possit in tres cubos, eademque de aliis ratio. Quamobrem casu factum videtur, ut sumpserit author $2\frac{1}{4}$. quo de 3 sublato relinquitur $\frac{3}{4}$ ex tribus cubis compositus. Deinde porisma, quod hic assumitur, quale sit non est facile divinare, cum Graeca Diophaati hoc loco mutila

Diophant, um ſeiner Auflöſung eine wiſſenſchaftliche Form zu geben, zeigen müſſen, daß ſein Verfahren in jedem Falle anwendbar ſei und wie man namentlich die Kubikzahl 125 ſo zu wählen habe, daß der Reſt die Differenz zweier Kubikzahlen werde. Das Verdienſt auch über dieſe an und für ſich ſchöne Aufgabe zuerſt das gehörige Licht verbreitet zu haben, hat wiederum der ſchon oft genannte Fermat ſich erworben. Zunächſt hat Fermat das von Diophant ausgeführte Poriſma, daß die Differenz zweier Kubi allemal auch die Summe zweier Kubi ſei, allgemein bewieſen[2]), während Bachet es nur für den in der Note erwähnten beſtimmten Fall kannte. Sodann aber hat der Erſtere gezeigt, daß es immer möglich ſei, z ſo zu finden, daß der Ausdruck $3-z^2$ ſich mit Hilfe dieſes Poriſma's in die Summe dreier Kubikzahlen zerlegen laſſe. Setzt man nämlich $z=mx-1$, ſo wird $3-z^2=2+2mx-m^2x^2$, und dieſen Ausdruck ſoll man in drei Kubi zerlegen. Es kommt alſo darauf an, zwei Kubi ſo anzunehmen, daß, wenn man ſie von dem gefundenen Ausdrucke ſubtrahirt, für den dritten Kubus eine Formel übrig bleibt, in welcher x nur in der zweiten und dritten Potenz vorkommt, ſo daß man x rational finden kann, wenn man den Reſt gleich einer in x^3 multiplicirten Kubikzahl ſetzt. Es muß alſo die Summe der beiden erſten Kubi die Glieder $2+2mx$ ent-

---

sint. (Es heißt nämlich im Texte: ἔχομεν δὲ ἐν τοῖς πορίσμασιν ὅτι πάντων δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ κυ…, offenbar verſtümmelt; der Sinn kann aber kein anderer ſein als der, den Bachet in ſeiner Überſetzung ausgedrückt hat.) Si vero libeat amplecti quod nostra versione exhibemus, sane docuimus ad secundam quarti. *Duorum cuborum intervallum dividi posse in duos cubos, dummodo major datorum cuborum excedat duplum minoris.* Sed quomodo omnium duorum cuborum intervallum dividatur in duos cubos, ignotum mihi adhuc. Nam nec operationes loco citato allatae, nec canon ibidem traditus locum habent, cum duplum minoris cubi excedit majorem. Itaque penes eruditos judicium esto, utrum ex propositionis hujus depravatione hujusmodi difficultates ortum habeant, an vero ipsi Diophanto imputandae sint, qui cum forte quadratum $2\frac{1}{4}$ invenisset, quo de 3 sublato superest $\frac{3}{4}$ compositus ex tribus cubis, arduum problema utcumque potuit explicavit, melioribus destitutus auxiliis.

2) In ſeinem Doctrinae analyticae inventum novum vor Varia opera Mathem. Petri de Fermat und vor der Toulouſer Ausgabe Diophant's p. 10. Daſſelbe Verfahren iſt gelehrt in ſeiner Observatio ad Dioph. IV, 2. (zu Bachet's quaestio prima) p. 133. Siehe das folgende Kapitel.

halten. Das erlangen wir aber, wenn wir die beiden Kubi ſetzen $(1+mx)^2$ und $(1-\frac{1}{3}mx)^3$. Dann iſt

der erſte Kubus $= 1 + 3mx + 3m^2x^2 + m^3x^3$
der zweite $= 1 - mx + \frac{1}{3}m^2x^2 - \frac{1}{27}m^3x^3$
ihre Summe $= 2 + 2mx + \frac{10}{3}m^2x^2 + \frac{26}{27}m^3x^3$.

Wenn wir nun dieſe Summe von $2+2mx-m^2x^2$ ſubtrahiren, ſo bleibt für den dritten Kubus der Ausdruck $-\frac{13}{3}m^2x^2 - \frac{26}{27}m^3x^3$ übrig. Setzen wir dieſen Kubus $=(pmx)^3$, ſo wird $x = -\frac{117}{(27p^3+26)m}$. Nun waren die Wurzeln der drei Kubi $1+mx$, $1-\frac{1}{3}mx$, und pmx; dieſe Wurzeln ſind alſo $\frac{27p^3-91}{27p^3+26}$, $\frac{27p^3+65}{27p^3+26}$, und $-\frac{117p}{27p^3+26}$, die Wurzel des Quadrats, das von 3 abgezogen wurde, war aber $z = mx - 1$ oder $1 - mx$, es iſt alſo $z = \frac{27p^3+143}{27p^3+26}$. Da nun aber der eine Kubus negativ geworden iſt, ſo haben wir $3-z^2$ nicht geradezu in die Summe dreier Kubikzahlen, ſondern in eine Kubikzahl und in die Differenz zweier andern zerlegt, und wir müſſen alſo vorher noch dieſe Differenz nach dem angeführten Poriſma in die Summe zweier Kubikzahlen verwandeln. Aber dieſe von Fermat angegebene Auflöſung iſt nicht allgemein und ſchließt namentlich den Diophantiſchen Fall aus; während nämlich Diophant $z=\frac{2}{3}$ ſetzt, finden wir keinen rationalen Werth für p, wenn wir die gefundene Formel für z dieſem Werthe gleich ſetzen. Es kam, wie wir ſahen, darauf an, zwei Kubi zu bilden, deren Summe die Glieder $2+2mx$ enthält. Da aber das m aus der Rechnung verſchwunden iſt, ſo können wir es gleich von vorne herein als einflußlos $=1$ ſetzen. Wir ſetzen alſo $z = 1-x$, ſo wird $3-z^2 = 2+2x-x^2$. Bilden wir nun die Kubi von $1+kx$ und von $1+lx$, ſo werden deren erſte beiden Glieder $1+3kx$ und $1+3lx$; es ſoll alſo $3k+3l=2$, oder $k+l=\frac{2}{3}$ ſein; ſei $k-l=2n$, ſo iſt $k=\frac{1}{3}+n$, $l=\frac{1}{3}-n$, und wir bilden nun die Kubi von $1+(\frac{1}{3}+n)x$ und $1+(\frac{1}{3}-n)x$, ſo wird der erſte Kubus

$$1+(1+3n)x+(\tfrac{1}{3}+2n+3n^2)x^2+(\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{3}n+n^2+n^3)x^3$$

der zweite Kubus

$$1+(1-3n)x+(\tfrac{1}{3}-2n+3n^2)x^2+(\tfrac{1}{27}-\tfrac{1}{3}n+n^2-n^3)x^3$$

alſo ihre Summe

$$2+2x+(\tfrac{2}{3}+6n^2)x^2+(\tfrac{2}{27}+2n^2)x^3.$$

Ziehen wir dieſe Summe nun von $2+2x-x^2$ ab, ſo behalten wir für den dritten Kubus die Formel übrig

$$-(\tfrac{5}{3}+6n^2)x^2-(\tfrac{2}{27}+2n^2)x^3.$$

Dieſe ſetzen wir $=p^3x^3$, ſo wird $x=-\frac{\frac{5}{3}+6n^2}{\frac{2}{27}+2n^2+p^3}$ $=-\frac{162n^2+45}{27p^3+54n^2+2}$. Nun war $z=1-x$, und die Wurzeln der drei Kubikzahlen $1+(\frac{1}{3}+n)x$, $1+(\frac{1}{3}-n)x$, und px; demnach iſt $z=\frac{27p^3+216n^2+47}{27p^3+54n^2+2}$

die Wurzel des erſten Kubus $=\frac{27p^3-162n^3-45n-13}{27p^3+54n^2+2}$

» » » zweiten » $=\frac{27p^3+162n^3+45n-13}{27p^3+54n^2+2}$

» » » dritten » $=-\frac{162n^2p+45p}{27p^3+54n^2+2}$

In dieſen Formeln bleibt nur übrig, p und n ſo zu beſtimmen, daß z^2 kleiner als 3 und größer als 2 wird.

Übrigens dürfte vielleicht der mangelhafte Vortrag dieſer Auflöſung nicht auf Rechnung Diophant's, ſondern vielmehr auf Rechnung der Zeit oder irgend eines ſorgloſen Abſchreibers zu ſetzen ſein; ebenſo wie die unvollkommene Behandlung der Aufgaben **II, 1—5.** und einiger andern. Analog der zu enge gezogenen Bedingung $\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{p^6}<1$ iſt die in der Aufgabe **III, 12.**; indem hier zwei Zahlen geſucht werden ſollen, deren Product ein Quadrat iſt, ſagt Diophant: Wenn ich für die beiden Zahlen Quadrate ſuche, ſo wird ihr Product gewiß ein Quadrat ſein. In **III, 17.** wird auf ähnliche Weiſe willkührlich angenommen, daß von drei geſuchten Zahlen zwei Quadratzahlen ſeien.

Reich an Beiſpielen von ſolchen Annahmen, die zwar ſichtbar zum Ziele führen, deren Princip und Veranlaſſung aber von Diophant nicht erläutert wird, iſt das ſechſte Buch. Nehmen wir z. B. die Aufgabe

VI, 3. Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß der durch eine Zahl ausgedrückte Flächeninhalt, wenn man eine gegebene Zahl dazu addirt, ein Quadrat wird.

Die gegebene Zahl ſei 5. Geſetzt das Dreieck wäre der Form nach gegeben und hätte die Seiten $3x$, $4x$, $5x$, ſo wird der Flächeninhalt, wenn man die gegebene Zahl dazu addirt, $6x^2+5$, und das ſoll ein Quadrat ſein. Es ſei gleich $9x^2$, ſo wird $3x^2=5$.

Es müßten ſich alſo, wenn x rational werden ſollte, die Coefficienten wie Quadratzahlen zu einander verhalten. Wir müſſen alſo ein rechtwinkliges Dreieck und ein Quadrat ſuchen, ſo daß, wenn man von dem Quadrate den Flächeninhalt des Dreiecks abzieht, dieſe Differenz der fünfte Theil eines Quadrats wird, weil 5 die gegebene Zahl iſt. — Bis hieher iſt das Verfahren ganz verſtändlich. Setzen wir nämlich die gegebene Zahl a, und die Katheten des Dreiecks mx und nx, ſo ſoll mnx^2+a ein Quadrat werden. Dieſes Quadrat ſei p^2x^2, ſo wird $x^2=\frac{a}{p^2-mn}$. Es kommt alſo darauf an, m, n und p ſo zu beſtimmen, daß der Coefficient $\frac{a}{p^2-mn}$ ein Quadrat wird. Anſtatt daß nun Diophant, wie er ſonſt zu thun pflegt, auf eine überzeugende Weiſe deducirt, wie die Zahlen p, m, n beſchaffen ſein müſſen, ſchlägt er hier einen ganz eigenthümlichen Weg ein, der zwar, wie der Erfolg zeigt, ſicher zum Ziele führt, bei dem man aber nicht einſieht, was ihn bewogen habe, gerade dieſen und keinen andern Weg einzuſchlagen. Er bildet nämlich das geſuchte Dreieck aus den Zahlen x und $\frac{1}{x}$ (ein rechtwinkliges Dreieck aus zwei Zahlen bilden, πλάσσειν τρίγωνον ὀρθογώνιον ἀπὸ δύο ἀριθμῶν, heißt, die Hypotenuſe gleich der Summe der Quadrate, die eine Kathete gleich der Differenz der Quadrate, und die zweite Kathete gleich dem doppelten Producte der beiden Zahlen ſetzen); ſo ſind die Katheten $x^2-\frac{1}{x^2}$ und 2, alſo der Inhalt $x^2-\frac{1}{x^2}$. Das geſuchte Quadrat bildet er von der Wurzel $x+\frac{2a}{x}$, ſo iſt das Quadrat $x^2+4a+\frac{4a^2}{x^2}$, demnach das Quadrat weniger dem Inhalt des Dreiecks $4a+\frac{4a^2+1}{x^2}$, und dieſer Ausdruck ſoll mit a multiplicirt ein Quadrat werden; wenn wir aber mit a multipliciren, ſo wird er $=4a^2+\frac{4a^3+a}{x^2}$, und multipliciren wir nun noch mit x^2, ſo ſoll $4a^2x^2+4a^3+a$ ein Quadrat werden. Wir ſehen alſo, daß die Annahme der Zahlen x und $\frac{1}{x}$ für das Dreieck und $x+\frac{2a}{x}$ für die Wurzel des geſuchten Quadrats ſehr kunſtvoll ſo gewählt iſt, daß in der zuletzt erhaltenen Formel der Coefficient von x^2 ein Quadrat wird. Aber iſt darum dieſe

dieſe Annahme überzeugend und ſtellt ſie ſich in der Weiſe, wie ſie vorgetragen iſt, als nothwendig dar? Keinesweges. Wie übrigens nun die Auflöſung zu Ende geführt wird, iſt klar und bedarf keiner weitern Erörterung.

Ähnliche unerklärte, ich möchte ſagen, dogmatiſche Verfahrungsweiſen finden wir in den Aufgaben **VI**, 4. 5. 6. 8. 10. und öfter. Ein Beiſpiel der Art, welches denſelben Fehler noch mit dem einer ganz willkührlich eingeführten Beſtimmung verbindet, werden wir in dem folgenden Kapitel zu betrachten Gelegenheit finden.

Über die Art, wie Diophant in der Aufgabe **VI**, 19. die Nebenaufgabe behandelt, *eine Kubikzahl zu finden, welche um 2 größer iſt, als eine Quadratzahl*, haben wir oben ſchon geſprochen. Hier wollen wir noch einmal die ganze Aufgabe betrachten. Sie heißt

Ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, ſo daß der Inhalt und die Hypotenuſe zuſammen eine Quadratzahl, der Umfang aber eine Kubikzahl ausmacht.

Der Inhalt ſei $=x$, die Hypotenuſe aber irgend ein Quadrat weniger x, z. B. $16-x$. Da wir den Inhalt x geſetzt haben, ſo iſt das Product der Katheten $2x$; aber $2x$ iſt das Product von x und 2; ſetzen wir alſo eine Kathete 2, ſo iſt die andere x, und der Umfang 18; und das iſt keine Kubikzahl. Aber 18 iſt entſtanden aus der Addition einer Quadratzahl (16) und der Zahl 2. Wir müſſen alſo eine Quadratzahl ſuchen, welche um 2 vermehrt eine Kubikzahl giebt. Nachdem nun Diophant ſein ſchon erörtertes Verfahren angewendet hat, welches durchaus auf keinen zweiten Fall anwendbar iſt, ſondern geradezu auf die beiden Zahlen 25 und 27 hinſteuert, ſubſtituirt er in der Annahme für die Hypotenuſe den Ausdruck $25-x$ ſtatt $16-x$; ſo wird, wenn die übrigen Vorausſetzungen dieſelben bleiben, nun der Umfang 27, alſo eine Kubikzahl, und es bleibt nur noch übrig, daß das aus den Seiten 2, x und $25-x$ beſtehende Dreieck rechtwinklich ſei; darum muß $x^2+4=(25-x)^2$ ſein, woraus man $x=\frac{621}{50}$ findet. Demnach ſind die Seiten des geſuchten Dreiecks 2, $\frac{621}{50}$ und $\frac{629}{50}$. Die Aufgabe iſt alſo inſofern gelöſt, als Diophant ein Dreieck angiebt, welches die verlangten Eigenſchaften hat. Da die Aufgabe aber unbeſtimmt iſt, ſo gebe man doch einem Schüler auf, auf dem

von Diophant gelehrten Wege ein zweites Dreieck zu finden, welches ebenfalls den Forderungen der Aufgabe entſpricht. Ich wäre in der That neugierig, zu erfahren, wie er das anſtellen wollte, vorausgeſetzt, daß ihm die, wie es ſcheint, Diophant ſelbſt unbekannte Methode, aus der gefundenen Auflöſung ſeiner Nebenaufgabe andere Auflöſungen herzuleiten, unbekannt wäre. Diophant verwandelt wiederum die geſtellte Aufgabe in eine ganz andere, indem er gleich von vorne herein die eine Kathete als gegeben betrachtet. Wollten wir uns dieſer Willkühr enthalten, und das Geforderte allgemeiner darſtellen, ſo würden wir, wenn wir mit Diophant den Inhalt $=x$, die Hypotenuſe $=n^2-x$ ſetzen, und das Product der Katheten $2x$ in die unbeſtimmten Factoren, etwa mx und $\frac{2}{m}$ zerlegen. Dadurch kämen wir auf die zwiefache Forderung, daß $(n^2-x)^2 = m^2x^2+\frac{4}{m^2}$, und außerdem $n^2+(m-1)x+\frac{2}{m}$ eine Kubikzahl ſein ſollte. Wenn wir die erſte Gleichung nach x auflöſen, ſo finden wir $x=\frac{-n^2\pm\sqrt{m^2n^4-4+\frac{4}{m^2}}}{m^2-1}$. Aber den Ausdruck hinter dem Wurzelzeichen hat Diophant ſelbſt uns auf eine ſehr einfache Weiſe zwiefach rational zu machen gelehrt, indem wir denſelben entweder $=m^2n^4$ oder $=\frac{4}{m^2}$ ſetzen. Die erſte Annahme würde ergeben $m=1$, würde uns alſo auf die Diophantiſche Vorausſetzung zurückführen; die zweite dagegen giebt $m=\frac{4}{n^2}$. Dann wird $x=\frac{2n^2}{1-\frac{4}{n^4}}=\frac{2n^6}{n^4-4}$. Setzen wir nun die beiden Werthe für x und m in die zweite Formel, $n^2+(m-1)x+\frac{2}{m}$, ſo nimmt dieſe die Geſtalt an $2n^2+\frac{2n^4(2-n^2)}{n^4-4}=2n^2-\frac{2n^4}{n^2+2}=\frac{4n^2}{n^2+2}$, und dieſer Ausdruck ſoll Kubikzahl werden; das wird geſchehen, wenn ſich verhält $4n^2:n^2+2=k^3:l^3$, oder wenn wir für $\frac{l}{k}$ den einfachen Ausdruck p anwenden, wenn $4n^2:n^2+2=1:p^3$, wenn alſo $4n^2p^3=n^2+2$, alſo $n^2=\frac{2}{4p^3-1}=\frac{4}{8p^3-2}$. Da in dieſem Bruche der Zähler bereits Quadratzahl iſt, ſo kommt es nur darauf an, auch den Nenner zu einem Quadrate zu machen, und da ſind

wir gerade wieder auf die Diophantiſche Zwiſchenaufgabe gelangt, eine Kubikzahl $8p^3$ zu ſuchen, welche um 2 vermindert Quadratzahl wird. Leider wird, wenn wir hier den bekannten Fall anwenden und $8p^3=27$ ſetzen, wodurch wir $n=\frac{2}{3}$ erhalten, x negativ, alſo auch die eine durch mx ausgedrückte Kathete negativ, was hier die Bedeutung hat, daß nicht der Umfang, oder die Summe der Hypotenuſe und beider Katheten, ſondern die Summe der Hypotenuſe und der Differenz der Katheten eine Kubikzahl wird. Man muß ſich alſo nach andern Werthen von p umſehen. Übrigens war es hier bloß meine Abſicht, zu zeigen, wie die vorliegende Aufgabe ohne die Diophantiſche willkührliche Annahme auf der einen, und ohne eben ungeheuren Kraftaufwand auf der andern Seite ſich hätte lö-ſen laſſen.

Eine ähnliche Willkühr erlaubt ſich Diophant in der folgenden Aufgabe VI, 20. Aber genug hiervon.

Ich hätte unter den Diophantiſchen Auflöſungsmethoden vielleicht noch den

8. Gebrauch des rechtwinkligen Dreiecks

anführen ſollen. Aber die unter dem Namen des rechtwinkligen Dreiecks in rationalen Zahlen bekannte Theorie hat nichts ihr ausſchließlich Eigenthümliches. Die Auffindung eines ſolchen Dreiecks iſt nichts anderes, als eine ganz gewöhnliche Zahlenaufgabe, welche Diophant, ohne den Namen zu nennen, in den Aufgaben II, 8. 9. 11. unter verſchiedener Geſtalt löſt, und welche, wie wir bei einer andern Gelegenheit geſehen haben, bereits von Pythagoras berührt, von Platon oder Archytas um etwas ergänzt und von Euklides in einem Lemma zu X, 29. der Elemente vollſtändig vorgetragen worden iſt. Die Redensart, ein rechtwinkliges Dreieck finden, iſt in der Arithmetik weiter nichts, als ein abgekürzter Ausdruck für den rein arithmetiſchen Ausſpruch des Satzes, Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl iſt. Diophant bedient ſich dieſer Theorie unter dem abgekürzten geometriſchen Namen ſehr oft, und dieſelbe iſt ſeitdem, namentlich bei den Mathematikern des ſiebzehnten Jahrhunderts, ſehr beliebt geworden. Außerhalb des ſechſten Buchs, deſſen Aufgaben ſämmtlich den Zweck haben, ſolche rechtwinklige Dreiecke

unter gewiſſen Bedingungen zu finden, erwähnt und bedient ſich Diophant dieſer Theorie in den Aufgaben III, 22. V, 8. 9. 11. 24. 30.

Hier nun will ich dieſen Gegenſtand abbrechen. Wohl fühle ich, wie unvollkommen und wenig genügend gerade dieſes Kapitel ausgefallen iſt; wohl aber darf ich auch hoffen, wenn irgendwo, ſo hier bei billigen Leſern und Beurtheilern freundliche Nachſicht zu finden. Neben der unendlichen Mannigfaltigkeit der Diophantiſchen Methoden, welche gar keiner erſchöpfenden Darſtellung fähig iſt, dürfte wohl noch der gänzliche Mangel an Vorarbeiten über dieſen Gegenſtand zu meiner Entſchuldigung dienen, wenn es mir hier nicht gelungen iſt, das Weſen des großen Mathematikers in ſeinem wahren Lichte zu zeigen und in ſeine Elemente zu zergliedern. Die Lectüre ſeines Werkes iſt, wie ich ſchon oben erwähnte, das einzige Mittel, welches zu einem vollſtändigen und treuen Bilde und zu der richtigen Würdigung dieſes Vaters der Algebra führen kann, und ſchwerlich hat ſchon irgend Jemanden die darauf verwandte Mühe gereut. Wenn es daher manchem Verehrer dieſes Heroen der Wiſſenſchaft ſcheint, als habe ich demſelben des Lobes nicht genug geſpendet, wenn Mancher in der Aufdeckung auch der Schwächen des Auctors eine ungebührliche Herabſetzung deſſelben ſehen will, ſo kann ich darauf nur erwiedern, daß mein Zweck nicht war, unſerm Auctor nach Verlauf von anderthalb Jahrtauſenden eine Leichenrede zu halten, ſondern Geſchichte zu ſchreiben.

Digitized by Google

Zehntes Kapitel.

Diophant's Porismata.

Bekanntlich iſt oft und vielfach über den eigentlichen Begriff des etwas dunklen Wortes Porisma, πόρισμα, disputirt worden, und es iſt ſo viel klar, daß dieſer Ausdruck bei den Griechiſchen Mathematikern eine zwiefache Bedeutung hat. Zuerſt heißt πόρισμα ein Folgeſatz, **corollarium**, ein Satz, deſſen Wahrheit aus dem Beweiſe eines andern unmittelbar folgt, der alſo keines eigenen Beweiſes mehr bedarf; und er hat, wie P r o k l u s ſagt, ſeinen Namen daher, weil er ſich ohne unſer Zuthun als Nebengewinn eines wiſſenſchaftlichen Beweiſes ergiebt. In dieſer Bedeutung kommt das Wort ſehr oft in den Euklidiſchen Elementen und in allen ſpätern Schriften vor. Über die zweite Bedeutung dagegen geben uns die Griechiſchen Mathematiker nicht ſo klare Hinweiſungen, und wir ſind hier mehr an ein Errathen, als ein ſicheres Definiren gewieſen, zumal die beiden Schriften des Alterthums, welche den Titel πορίσματα führten, verloren gegangen ſind, nämlich die Porismen von Euklides und von Diophantus. Proklus begnügt ſich anzudeuten, daß der Ausdruck Porisma auch noch in einem andern Sinne gebraucht werde, hält es aber für überflüſſig, genau zu erklären, welcher Sinn dieſes geweſen [1]. Die einzige Auctorität, an die wir

1) Er ſpricht über dieſen Gegenſtand an zwei Stellen; p. 58. 59. (ad Eucl. I, 1.): τὸ δὲ πόρισμα λέγεται μὲν καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινῶν, οἷον τὰ Εὐκλείδει γεγραμμένα πορίσματα· λέγεται δὲ καὶ ἰδίως, ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλο τι συναποφανῇ (Ed. συναφανῇ) θεώρημα, μὴ προθεμένων ἡμῶν, ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασι, ὥσπερ τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάρεργον. Und p. 80. (ad Eucl. I, 15.) heißt es: ἕν τι τῶν γεωμετρικῶν ἐστὶν ὀνομάτων τὸ πό-

uns in dieſer Hinſicht mit einiger Sicherheit halten können, iſt Pappus, welcher in der Vorrede zum ſiebenten Buch ſeiner Sammlungen bei Gelegenheit der Porismen Euklid's ſich etwa ſo ausdrückt: „Die Porismen gehören weder zu den Theoremen, noch zu den Problemen, ſondern ſtehen ihrer Form und ihrem Weſen nach zwiſchen beiden mitten inne, ſo daß ſie ſowohl als Theoreme, als auch als Probleme ausgeſprochen werden können. Daher kommt es, daß einige Geometer dieſelben für Theoreme, andere für Probleme gehalten haben, indem ſie ſich an die bloße Form des Satzes hielten. Die Alten aber haben den Unterſchied dieſer drei Gattungen beſſer aufgefaßt, wie aus ihren Definitionen erhellt. Nach ihnen bezweckt ein Theorem die Beweisführung für das, was der Satz ausſpricht; ein Problem die Conſtruction deſſen, was vorgelegt iſt; ein Porisma dagegen bezweckt die Auffindung und Erforſchung des Vorgelegten. Dieſe Definition des Porisma's iſt von den Neuern geändert worden, welche nicht alles aufſuchen können, ſondern auf dieſe Elemente geſtützt nur zeigen, daß das, was geſucht wird, iſt, nicht aber dieſes ſelbſt aufſuchen."[2]) Laſſen wir nun

ρισμα· τοῦτο δὲ σημαίνει διττόν· καλοῦσι γὰρ πορίσματα, καὶ ὅσα θεωρήματα συγκατασκευάζεται ταῖς ἄλλων ἀποδείξεσιν, οἷον ἕρμαια καὶ κέρδη τῶν ζητούντων ὑπάρχοντα, καὶ ὅσα ζητεῖται μὲν, εὑρέσεως δὲ χρήσει, καὶ οὔτε γενέσεως μόνης, οὔτε θεωρίας ἁπλῆς. ὅτι μὲν γὰρ τῶν ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, θεωρῆσαι δεῖ, καὶ ὄντων δὴ τῶν πραγμάτων ἐστὶν ἡ τοιαύτη γνῶσις, τὴν δὲ γωνίαν δίχα τεμεῖν ἢ τρίγωνον συστήσασθαι, ἢ ἀφελεῖν ἢ θέσθαι, ταῦτα πάντα ποίησίν τινος ἀπαιτεῖ· τοῦ (δὲ) δοδέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν, ἢ δύο δοδέντων συμμέτρων μεγεθῶν τὸ μέγιστον καὶ κοινὸν μέτρον εὑρεῖν, ἢ ὅσα τοιάδε, μεταξύ πώς ἐστι προβλημάτων καὶ θεωρημάτων· οὔτε γὰρ γενέσεις εἰσὶν ἐν τούτοις τῶν ζητουμένων, ἀλλ' εὑρέσεις, οὔτε θεωρία ψιλή· δεῖ γὰρ ὑπ' ὄψιν ἀγαγεῖν καὶ πρὸ ὀμμάτων ποιήσασθαι τὸ ζητούμενον· τοιαῦτα ἄρα ἐστὶ καὶ ὅσα πορίσματα Εὐκλείδης γέγραφε, βιβλία προβλημάτων συντάξας.

2) Pag. 245. der Ausgabe von 1660 nach Commandin's Überſetzung: **Horum autem species omnes neque theorematum sunt, neque problematum, sed mediam quodammodo inter haec formam ac naturam habent, ita ut eorum propositiones formari possint, ut theorematum vel ut pro-**

den weder aus dieſen, noch aus Proklus Worten ganz klar hervorgehenden Sinn, den die Alten mit dem Begriff des Porisma verbunden haben ſollen, als unſern Zweck nicht berührend außer Acht, und halten uns an das, was nach Pappus die Neuern unter Porisma verſtanden wiſſen wollten, ſo ſcheint mir aus der angeführten Stelle hervorzugehen, als hätten die Neuern mit dem Namen der Porismata ſolche Sätze belegt, die neben dem als Theorem ausgeſprochenen Satze noch eine auszuführende Operation oder Conſtruction in ſich ſchließen, mit andern Worten, ſolche Sätze, welche die Möglichkeit einer zu bewerkſtelligenden Operation ausſprechen, die alſo, als Lehrſatz ausgeſprochen, die Ausführung einer Operation, als Aufgabe ausgeſprochen, einen ihre Möglichkeit beſtimmenden Lehrſatz vorausſetzen. Ein ſolches Porisma wäre z. B. der Satz: die Differenz zweier gleichnamigen Potenzen durch die Differenz ihrer Wurzeln dividiren. Ebenſo aber kann man die Operation als bereits vollzogen vorausſetzen, und den Satz drittens als Theorem ſo ausſprechen: die Differenz zweier gleichnamigen Potenzen, durch die Differenz ihrer Wurzeln dividirt, giebt zum Quotienten die Summe der um einen Grad niedrigeren Potenzen und aller in geometriſcher Progreſſion zwiſchen denſelben liegenden Glieder.

Dieſer Gattung nun gehört eins der drei Diophantiſchen Porismen, das V, 19. citirte, entſchieden an, wie wir ſogleich ſehen werden, nicht aber die beiden andern V, 3. 5. citirten. Dieſe beiden letztern lehren reſpective zwei und drei Zahlen bilden, welche

blematum. quo factum est, ut ex multis Geometris alii quidem ea genere esse theoremata, alii vero problemata opinati sint, dum ad solam tantum propositionis formam respicerent. Horum autem trium differentiam veteres multo melius cognovisse ex definitionibus perspicuum est. dixerunt enim theorema esse, quod proponitur in ipsius propositi demonstrationem. Problema, quod affertur in constructionem propositi. Porisma vero, quod proponitur in porismum, hoc est, in inventionem et investigationem propositi. immutata autem est haec porismatis definitio a junioribus, qui nequeunt omnia investigare, sed his elementis utuntur, et ostendunt solummodo quod hoc est, quod quaeritur, non autem illud ipsum investigant. cumque ex definitione ipsa et ex iis, quae nobis tradita sunt, redarguerentur ab accidente sic porisma definierunt. Porisma est quod hypothesi deficit a locali theoremate. etc.

ſpecielle Beziehungen zu zwei von Diophant geſtellten Aufgaben haben. Faſſen wir dieſe Erſcheinung zuſammen mit dem Umſtande, daß Diophant außerdem eine bedeutende Anzahl von Sätzen als bekannt citirt, ohne ausdrücklich die Porismen zu nennen, und daß dieſe Sätze unter einander ſehr verſchiedener Art ſind und mit den drei aus den Porismen erwähnten bald mehr bald weniger Ähnlichkeit haben, ſo dürften wir wohl zu den Schlüſſen berechtigt ſein, daß Diophant den Begriff der Porismen in einem weiteren, als dem gewöhnlichen Sinne gebraucht und daß er mit dieſem Titel eine Sammlung von Lehrſätzen aus der Zahlenlehre belegt habe, die mit ſeinen Büchern arithmetiſcher Aufgaben in einer engen Verbindung ſtanden. Da nun einerſeits ein Theil dieſer Sätze, wie wir ſehen werden, ganz ſpecielle Wahrheiten enthält, die ohne weiteres wiſſenſchaftliches Intereſſe zu haben nur gerade für die eine oder die wenigen Aufgaben berechnet ſind, in welchen der Verfaſſer von ihnen Gebrauch macht, andrerſeits aber der Verfaſſer der Aufgaben immer ohne weitere Erklärung geradezu auf dieſe Sätze verweiſt, und dieſelben nicht nur als bekannt, ſondern auch als dem Leſer zur Hand ſeiend vorausſetzt: ſo ergiebt ſich daraus die ziemlich wahrſcheinliche Hypotheſe, daß dieſe unter dem beſondern Titel der Porismen citirte Sammlung von Sätzen aus der Zahlentheorie ein integrirender Theil des ganzen, Ἀριθμητικά benannten, Werks geweſen ſei und eins oder mehre von den auf dem Titel und in der Einleitung angekündigten dreizehn Büchern, in die das ganze Werk getheilt ſein ſollte, ausgemacht habe. Wir haben oben in unſerm ſechſten Kapitel geſehen, daß dieſe Sammlung dann nicht füglich anderswo, als zwiſchen dem erſten und zweiten Buche der Aufgaben geſtanden haben könne. Aber dieſe Unterſuchungen gehören nicht mehr hieher. Wir wollen, ſtatt uns dabei weiter aufzuhalten, zu der nähern Erörterung der Lehrſätze ſchreiten, welche Diophant anführt oder vorausſetzt.

Der erſte Platz gebührt billiger Weiſe den drei namentlich angeführten Porismen. Das erſte gehört zu

V, 3. Die Aufgabe heißt: *Zu einer gegebenen Zahl drei andere zu finden, ſo daß ſowohl jede von ihnen, als auch das Produet von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl dazu addirt.* Und nun heißt es: καὶ ἐπεὶ ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἑκάτερός τε καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ αὐτοῦ δοδέντος ποιῇ

τετράγωνον, γεγόνασιν ἀπὸ δύο τετραγώνων τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς, ἐκτίϑεμαι οὖν δύο τετραγώνους τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς u. ſ. w. „Und da wir in den Porismen den Satz haben, daß, wenn zwei Zahlen ſo beſchaffen ſind, daß ſowohl jede von ihnen als das Product beider ein Quadrat wird, wenn man dieſelbe gegebene Zahl dazu addirt, dieſe Zahlen dann aus zwei auf einander folgenden Quadraten entſtanden ſind, ſo u. ſ. w.“ In Formeln ausgedrückt ſagt alſo der Satz: wenn $x+a=m^2$, $y+a=n^2$ und $xy+a=p^2$ iſt, ſo iſt $m=n+1$. Nun fragt ſich, ob der Satz in dieſer Geſtalt ganz allgemein wahr iſt. Allerdings läßt ſich mit Umkehrung der Ausſage ſehr leicht beweiſen, daß wenn m und n um 1 verſchiedene Zahlen ſind, unmittelbar aus den erſten beiden Bedingungen die dritte folge. Haben wir nämlich die Gleichungen $x+a=m^2$, $y+a=(m+1)^2$, ſo wird $x=m^2-a$, $y=(m+1)^2-a$, alſo

$$\begin{aligned} xy+a &= m^2(m+1)^2-a[m^2+(m+1)^2-1]+a^2 \\ &= m^2(m+1)^2-2am(m+1)+a^2 \\ &= [m(m+1)-a]^2 \end{aligned}$$

Wir haben alſo auf ſynthetiſchem Wege gefunden, daß, wenn man zwei Zahlen x, y ſo annimmt, daß man von zwei aufeinanderfolgenden Quadraten dieſelbe Zahl a abzieht, dann auch das Product der beiden Zahlen, wenn man a hinzu addirt, ein Quadrat wird. Es iſt aber die Frage, ob es außer dieſem Falle nicht noch andere Weiſen gebe, welche x und y beſtimmen lehren; zu dem Ende wollen wir den Satz analytiſch betrachten. Sei alſo $x=m^2-a$, $y=n^2-a$, ſo wird

$$\begin{aligned} xy+a &= m^2n^2-m^2a-n^2a+a+a^2 \\ &= m^2n^2-a(m^2+n^2-1)+a^2=p^2 \end{aligned}$$

Dieſer Ausdruck wird Quadrat werden, wenn das Quadrat des Coefficient von a gleich dem vierfachen erſten Gliede iſt, das heißt, wenn wir $p=mn-a$, $p^2=m^2n^2-2amn+a^2$ ſetzen. Dann wird alſo $m^2+n^2-1=2mn$, oder $m^2-2mn+n=1$, $m-n=\pm 1$. Das iſt aber gerade der Diophantiſche Satz. Betrachten wir nun aber die Gleichung

$$m^2n^2-am^2-an^2+a+a^2=p^2$$

als eine unbeſtimmte Gleichung, in welcher wir einen Werth der Unbekannten m, nämlich $n\pm 1$, gefunden haben, und verſuchen wir, aus dieſem bekannten Werthe andere herzuleiten, ſo werden wir $m=z+(n\pm 1)$ ſetzen müſſen. Dann verwandelt ſich unſere Gleichung in folgende

$$(n^2-a)x^2+2(n\pm1)(n^2-a)x+[n(n\pm1)-a]^2=p^2$$

deren Auflöſung ohne Schwierigkeit erlangt werden kann, da hier das abſolute Glied ein Quadrat iſt. Wenn wir nun $p=(n^2-a)Qx-[n(n\pm1)-a]$ ſetzen, ſo erhalten wir nach der Ausführung, die ich dem Leſer überlaſſe,

$$x=\frac{2(n\pm1)(nQ+1)-2aQ}{(n^2-a)Q^2-1}$$

$$\text{alſo}\quad m=\frac{(n\pm1)(nQ+1)^2-aQ[(n\pm1)Q+2]}{(n^2-a)Q^2-1}$$

Nehmen wir Beiſpiels halber $a=5$, wie bei Diophant, und etwa $n=4$, ſo müßte nach der Diophantiſchen Regel m entweder $=3$ oder $=5$ ſein. Demnach wäre $y=11$, und x entweder $=4$ oder $=20$; alſo xy entweder $=44$ oder $=220$, und beide Zahlen werden Quadrate, wenn man 5 dazu addirt. Unſere Formel aber ſubſtituirt uns für dieſe Annahme noch unendlich viele andere Werthe für m, wenn wir dem Q, welches jede beliebige ganze und gebrochene Zahl ſein kann, ſucceſſive andere Werthe geben. Setzen wir z. B. $Q=1$, ſo wird $m=9$, alſo $x=81-5=76$, $xy=836$, $xy+5=841=(29)^2$. Es folgt aus dieſer Deduction, daß das Diophantiſche Porisma, ſo wie er es ausgeſprochen hat, nicht richtig iſt, indem m und n nicht nothwendig zwei aufeinanderfolgende Zahlen ſind.

In der Aufgabe werden nun aber drei Zahlen geſucht, und es treten zu den drei durch das Porisma erledigten Bedingungen noch drei andere hinzu; es ſollen nämlich, wenn die dritte Zahl z iſt, auch noch die Ausdrücke $z+a$, $xz+a$, $yz+a$ Quadrate werden. Nun werden aber unter der Vorausſetzung $n=m+1$ die beiden letzten Bedingungen erfüllt, wenn man $z=2(x+y)-1=2m^2+2m+1-4a$ ſetzt. Es wird dann nämlich

$$xz+a=[m(2m+1)-2a]^2$$
$$yz+a=[m(2m+3)-(2a-1)]^2$$

und wahrſcheinlich hat das Zutreffen dieſer beiden Bedingungen einen entſcheidenden Einfluß auf die Geſtalt des Porisma's gehabt.

Bei der folgenden Aufgabe V, 4., welche die ſechs analogen Formeln $x-a$, $y-a$, $z-a$, $xy-a$, $xz-a$, $yz-a$ zu Quadraten zu machen befiehlt, wendet Diophant, ohne ein Porisma oder ſonſt einen Satz namhaft zu machen, die ganz ähnliche Vorausſetzung an, daß nämlich $x-a=m^2$, $y-a=(m+1)^2$, und ebenſo die folgende, daß $z=2(x+y)-1$ ſein müſſe, wodurch wieder fünf Bedingungen erledigt werden.

Bachet's Erweiterung des von Diophant gebrauchten Porisma's iſt als durchaus verunglückt zu bezeichnen. Sein Satz lautet **Porismatum lib. II. prop. 11.** ſo: **Si a duobus quadratis auferatur idem numerus sigillatim, et residua per intervallum laterum dividantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu, adscito numero qui a quadratis detractus est, quadratus evadit.** Der Satz iſt zwar ganz wahr, indem er ſagt, daß die Formel $\frac{m^2-a}{m-n}\cdot\frac{n^2-a}{m-n}+a$ ein Quadrat wird; wenn wir alſo $x=\frac{m^2-a}{m-n}$, $y=\frac{n^2-a}{m-n}$ ſetzen, ſo wird $xy+a$ ein Quadrat ſein. Aber nun wird weder $x+a$, noch $y+a$ ein Quadrat. Bachet hat alſo, indem er von den geſuchten drei Bedingungen eine allgemein löſt, die beiden andern aufgegeben. Daſſelbe gilt von den folgenden ähnlichen Sätzen 12—14.

Wir gehen zu dem zweiten Porisma über, welches zu der Aufgabe gehört

V, 5. Drei Quadratzahlen zu finden, ſo daß das Product von je zweien, ſowohl wenn man beide Factoren, als wenn man die dritte Zahl hinzu addirt, ein Quadrat werde. *Καὶ ἔχομεν πάλιν ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι πᾶσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς προσευρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς, ὃς ὢν διπλασίων συναμφοτέρου καὶ δυάδι μείζων, τρεῖς ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἐάν τε προσλάβῃ συναμφότερον, ἐάν τε λοιπὸν ποιεῖ τετράγωνον.* „Und wir haben abermals in den Porismen den Satz, daß, wenn man zu zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen eine andere Zahl nimmt, welche um zwei größer iſt als die doppelte Summe jener beiden, man dann drei Zahlen von der Beſchaffenheit hat, daß das Product von je zweien ſowohl wenn die Summe der beiden multiplicirten, als auch wenn die dritte Zahl dazu addirt wird, ein Quadrat wird." Durch dieſes Porisma iſt alſo die Aufgabe ſchon inſoweit gelöſt, daß es nur noch darauf ankommt, dieſe dritte Zahl zu einem Quadrat zu machen. Der Satz ſagt alſo, wenn man die drei Zahlen x^2, $(x+1)^2$, $4x^2+4x+4$ hat, ſo wird das Product von je zweien ein Quadrat, ſowohl wenn die Summe beider, als auch wenn die dritte dazu addirt wird. In der Bearbeitung und Verallgemeinerung dieſes Porisma's iſt Bachet nicht glücklicher geweſen, als bei dem vorigen; er dehnt nämlich den Diophantiſchen Satz in ſeinem

Porismatum lib. II. prop. 16. ſo aus: Datis duobus quadratis. si sumatur duplum summae illorum, et quadrati intervalli laterum: habentur tres numeri, quorum bini quem producunt mutuo ductu, is si adsumat productum ex quadrato intervalli laterum, sive in amborum summam, sive in reliquum, quadratum facit. Das heißt, wenn man zwei Quadrate m^2, n^2 hat, und dazu als dritte Zahl $z=2(m^2+n^2)+2(m-n)^2$ nimmt, ſo ſind folgende ſechs Formeln Quadrate:

$$m^2n^2+(m-n)^2(m^2+n^2),\quad m^2n^2+(m-n)^2z$$
$$m^2z+(m-n)^2(m^2+z),\quad m^2z+(m-n)^2n^2$$
$$n^2z+(m-n)^2(n^2+z),\quad n^2z+(m-n)^2m^2$$

Zwar haben wir hier einen Satz, der allgemeiner iſt als das von Diophant beigebrachte Porisma, der aber zur Auflöſung der vorgelegten Aufgabe nur dann geeignet wird, wenn man $m-n=1$ ſetzt, das heißt, wenn man ihn wieder auf jenes Porisma reducirt. Indeß muß ich geſtehen, daß auch ich mir nicht getraue, den Diophantiſchen Satz zu verallgemeinern.

Eine zweite Anwendung dieſes Porisma's macht Diophant bei der folgenden Aufgabe

V, 6. *Drei Zahlen zu finden, ſo daß jede von ihnen um 2 vermindert ein Quadrat wird, außerdem aber das Product von je zweien ein Quadrat wird, ſowohl wenn man die Summe beider, als wenn man die dritte Zahl davon ſubtrahirt.*

Um dieſer Aufgabe zu genügen, darf man nach Diophant nur Zahlen annehmen, deren jede um 2 größer iſt als die Zahlen der vorigen Aufgabe; ſetzt man alſo die drei geſuchten Zahlen x^2+2, $(x+1)^2+2$, x^2+4x+6, ſo lehrt die Probe, daß alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden, und daß nur noch nöthig iſt, die letzte Zahl -2, alſo die Formel $4x^2+4x+4$ zu einem Quadrate zu machen. Wollte man ſtatt der in der Aufgabe gegebenen Zahl 2 im Allgemeinen a ſetzen, ſo läßt ſich leicht zeigen, daß a keinen andern Werth als eben 2 haben kann.

Das dritte Porisma haben wir ſchon einmal in den Händen gehabt; es ſteht in der Auflöſung der Aufgabe V, 19., und heißt ohne Zweifel ſo: *Die Differenz zweier Kubikzahlen läßt ſich immer auch in die Summe zweier Kubikzahlen zerlegen.* Diophant will, wie wir oben geſehen haben, den Bruch $\frac{3}{4}$ oder den gleichgeltenden $\frac{162}{216}$ in drei Kubi zerlegen, findet aber ſtatt

Digitized by Google

deſſen $\frac{162}{216} = \frac{125}{216} + \frac{64}{216} - \frac{27}{216}$, alſo die Summe von einem Kubus und der Differenz zweier andern Kubi. Und darauf heißt es in dem Texte: ἔχομεν δὲ ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι πάντων δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ πυ… Es waltet indeß bei der Ergänzung dieſer verſtümmelten Stelle durchaus kein Zweifel ob, da der Sinn nur einer ſein kann. Da aber Diophant die wirkliche Zerlegung der Differenz $\frac{64}{216} - \frac{27}{216}$ in die Summe zweier Kubi nicht ausführt, ſondern in dieſer Hinſicht ſich begnügt, auf die Porismen zu verweiſen, ſo wiſſen wir nicht, wie ſein Verfahren beſchaffen und welcher Grad von Allgemeinheit demſelben eigen geweſen ſei. Unter den Neueren hat zuerſt Vieta, einer der erſten Beförderer der Diophantiſchen Analyſis in Europa, wahrſcheinlich durch dieſe Stelle dahin geführt, dieſe und zwei ähnliche Aufgaben gelöſt. Die drei Aufgaben ſtehen am Ende des vierten Buchs ſeiner Zetetica, und lauten ſo:

1. ***Datis duobis cubis, invenire numero*** (d. h. in rationalen Zahlen, ἐν ἀριθμοῖς) ***duos alios cubos, quorum summa aequalis sit differentiae datorum.***

Wenn $a^3 - b^3 = x^3 + y^3$ ſein ſoll, ſo findet er $x = \frac{a(a^3 - 2b^3)}{a^3 + b^3}$ und $y = \frac{b(2a^3 - b^3)}{a^3 + b^3}$. Dann folgt die umgekehrte Aufgabe

2. ***Datis duobus cubis, invenire numero duos alios cubos, quorum differentia aequet summam datorum.***

Wenn $a^3 + b^3 = x^3 - y^3$, ſo findet er $x = \frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}$ und $y = \frac{b(2a^3 - b^3)}{a^3 - b^3}$. Dieſe beiden Aufgaben löſen zugleich in zwei verſchiedenen Formeln die Aufgabe, einen gegebenen Kubus auf unzählige Weiſe in die Summe dreier Kubi zu zerlegen.

3. ***Datis duobus cubis, invenire numero duos alios cubos, quorum differentia aequet differentiam datorum.***

Wenn $a^3 - b^3 = x^3 - y^3$, ſo iſt $x = \frac{b(2a^3 - b^3)}{a^3 + b^3}$, $y = \frac{a(2b^3 - a^3)}{a^3 + b^3}$; und dadurch iſt zugleich die Aufgabe gelöſt, die Summe zweier Kubi in die Summe zweier andern Kubi zu zerlegen.

Betrachten wir nun zunächſt die erſte Aufgabe, ſo iſt klar, daß der Werth für x negativ werden wird, wenn $a^3 < 2b^3$ iſt. Daher

Digitized by Google

eben rührt der Scrupel, den *Bachet* in ſeiner Anmerkung zu der Diophantiſchen Aufgabe ausſpricht; und auch in ſeinem Commentar zur zweiten Aufgabe des vierten Buchs, wo er die drei Vieta'ſchen Aufgaben ausführt, fügt er die Determination hinzu, daß das Doppelte des kleinern gegebenen Kubus nicht größer ſein dürfe, als der größere. Wenn wir aber die dritte Aufgabe ins Auge faſſen, ſo ergiebt ſich daraus gerade die umgekehrte Determination; damit hier nämlich y poſitiv werde, muß gerade $2b^3 > a^3$ ſein. Demnach ergänzen die erſte und dritte Aufgabe einander vollſtändig in der Art, daß in jedem Falle, wenn die eine von ihnen ein negatives Reſultat giebt, die andere ein poſitives liefert. Auf dieſe Bemerkung hat *Fermat* ſein Verfahren gegründet, die Differenz irgend zweier Kubi in die Summe zweier Kubi zu zerlegen, indem, wenn der größere Kubus kleiner iſt als das Doppelte des kleinern, er ſich zuerſt der dritten Formel bedient und die gegebene Differenz zweier Kubi in die Differenz zweier andern zerlegt; dieſe zweite Differenz dann zerlegt er nach der erſten Formel in die Summe zweier Kubi. Demnach iſt die von Diophant geforderte Zerlegung wirklich in allen Fällen möglich. Die Stellen aus Fermat's Schriften, in welchen er dieſe Theorie berührt, habe ich in der Note 2. des vorigen Kapitels angeführt.

Nach Beleuchtung dieſer drei als *Porismen* namhaft gemachten Sätze wenden wir uns zu den übrigen Zahlenſätzen, von denen Diophant bei ſeinen Auflöſungen Gebrauch macht. Alle dieſe Sätze laſſen ſich in zwei große Klaſſen theilen, von denen die erſte Klaſſe ſolche Sätze enthält, die man *identiſche Formeln* nennt, und welche zum Theil algebraiſche Übertragungen der im zweiten Buche der Euklidiſchen Elemente geometriſch ausgeſprochenen Wahrheiten ſind; die zweite Klaſſe dagegen ſolche Sätze in ſich begreift, die ſich auf die *Zerlegung der Zahlen in Quadratzahlen* beziehen.

Über die Sätze der *erſten Klaſſe* werden wir zum größern Theil flüchtig hinwegeilen können, und ich führe die meiſten derſelben bloß der Vollſtändigkeit wegen hier an.

1.) $x(4x \pm 1) \mp x$ iſt allemal ein Quadrat. **II**, 27. 28.

2.) $x^2 + y^2 \pm 2xy$ iſt immer ein Quadrat. **II**, 31. 32. **IV**, 17. — Eukl. **II**, 4.

3.) $x^2 + (2x + 1)$ und $x^2 - (2x - 1)$ ſind immer Quadrate. **II**, 33. 34.

4.) $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+ab$ iſt immer ein Quadrat. Iſt alſo eine Zahl A auf verſchiedene Weiſe das Product zweier andern, ab, cd, ef, ſo ſind $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, $\left(\frac{c-d}{2}\right)^2$, $\left(\frac{e-f}{2}\right)^2$ u. ſ. w. lauter Quadrate, die zu A addirt wieder Quadrate zur Summe geben. **II**, 35. 36. **III**, 12. 14. **IV**, 6. 14. 17. **V**, 30. 31. — Eukl. **II**, 5.

5.) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab$ iſt immer ein Quadrat. **III**, 13. **IV**, 18.

6.) $4ab+(a-b)^2$ iſt immer ein Quadrat. (Identiſch mit 4.) **IV**, 20.

7.) $a^2(a+1)^2+a^2+(a+1)^2$ iſt immer ein Quadrat. **III**, 17.

8.) $a(a^2-a)+a+(a^2-a)$ iſt immer ein Kubus. **IV**, 30.

9.) Wenn $2xy$ und $2xy-(x^2-y^2)$, oder $2xy$ und x^2+y^2-2xy zugleich Quadrate ſein ſollen, dann iſt $x=2y$. **II**, 32. **VI**, 12. Beide Sätze ſind zu enge ausgeſprochen. Da in dem letztern Falle die zweite Formel ihrer Natur nach Quadrat iſt, ſo iſt weiter nichts nöthig, als das $x=2n^2y$ ſei, damit auch $2xy$ ein Quadrat werde. Für den erſten Fall haben wir zunächſt dieſelbe Bedingung; es ſoll $2xy$ Quadrat werden; alſo muß x die Form $2n^2y$ haben. Es ſoll aber auch noch $2xy-(x^2-y^2)$ oder $y^2+2xy-x^2$, das heißt, wenn man $x=2n^2y$ ſubſtituirt, $y^2+4n^2y^2-4n^4y^2$, alſo auch $1+4n^2-4n^4$ ein Quadrat werden. Da nun hier der Fall $n=1$, welcher die Formel zum Quadrat macht, bekannt iſt, ſo kann man ſucceſſive andere Werthe für n finden, wenn man $z-1$ für n ſubſtituirt. Ein ſolcher Werth iſt z. B. $n=\frac{21}{41}$.

10.) $\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$. Dieſer Satz ſpielt bei Diophant eine eigenthümliche Rolle. Er iſt nirgend geradezu ausgeſprochen, obgleich er aus Eukl. Elem. **IX**, 35. längſt in noch viel allgemeinerer Geſtalt bekannt war. Ja die Art, wie die Aufgaben **IV**, 12. 13. gelöſt ſind, ſcheint ſogar anzudeuten, als ob Diophant den Satz nicht gekannt habe. Die Aufgabe 12. lehrt zwei Kubikzahlen finden, deren Differenz der Differenz ihrer Wurzeln gleich iſt, und Diophant führt dieſe Aufgabe auf die Bedingungsaufgabe, zwei Kubikzahlen zu finden, deren Differenz und Differenz der Wurzeln ſich zu einander wie zwei Quadratzahlen verhalten. Nach der Formel wäre alſo weiter nichts zu thun, als zwei Zahlen zu ſuchen,

ſo daß die Summe ihrer Quadrate zu ihrem Producte addirt eine Quadratzahl gäbe, eine Aufgabe, die keine Schwierigkeit hat und die Diophant ſelbſt V, 7. löſt. Statt dieſer allgemeinen Auflöſung geht Diophant von dem ſpeciellen Falle aus, daß die Differenz der Wurzeln bereits an und für ſich Quadratzahl ſei, z. B. 1, und ſucht nun zwei einander zunächſt liegende Kubi, deren Differenz ein Quadrat iſt. Ebenſo in der folgenden Aufgabe. Nichtsdeſtoweniger können wir uns überzeugen, daß Diophant die Formel $\frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$ gekannt und gebraucht habe, wenn wir uns die Mühe geben wollen, ein wenig zwiſchen den Zeilen zu leſen. Wir betrachten zu dem Ende die ſehr aphoriſtiſch behandelte Aufgabe V, 8. Drei rechtwinklige Dreiecke zu finden, welche einen gleichen Flächeninhalt haben. Die Auflöſung iſt wörtlich folgende: „Zuerſt muß man zwei Zahlen ſuchen, ſo daß ihr Product ſammt der Summe ihrer Quadrate ein Quadrat ausmacht. Das iſt aber ſchon (V, 7.) gezeigt worden, und es ſind die Zahlen 3 und 5, deren Product ſammt der Summe ihrer Quadrate dem Quadrate von 7 gleich iſt. Nun bilde ich drei rechtwinklige Dreiecke, das eine aus den Zahlen 7 und 3, das andere aus den Zahlen 7 und 5, und das dritte aus den Zahlen 7 und der Summe der beiden gefundenen, alſo aus 7 und 8. Die Dreiecke werden alſo ſein 40, 42, 58, 24, 70, 74, und 15, 112, 113, und alle drei Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt 840.“ — Allerdings liegt am Tage, daß dieſes Verfahren drei ſolche Dreiecke liefert, wie die Aufgabe verlangte; aber Diophant ſagt auch nicht ein Wörtchen über das Princip, welches ſeinem Verfahren zum Grunde liegt. Wir wollen verſuchen, uns dieſes ſelbſt zu entwickeln. Wenn wir aus drei Paaren von Zahlen m, n; p, q; r, s drei rechtwinklige Dreiecke bilden, ſo werden die Katheten (die uns hier allein angehen), in dem erſten $2mn$ und m^2-n^2, in dem zweiten pq und p^2-q^2, in dem dritten $2rs$ und r^2-s^2, alſo die drei Flächenräume $mn(m^2-n^2)$, $pq(p^2-q^2)$, $rs(r^2-s^2)$, und dieſe drei Ausdrücke ſollen einander gleich werden. Vergleichen wir nun dieſe drei Formeln mit dem Diophantiſchen Verfahren, ſo haben wir geſehen, daß in den drei Paaren von Zahlen, von denen die Dreiecke gebildet wurden, eine Zahl, 7, allen gemeinſchaftlich war. Das veranlaßt uns zu der Vermuthung, daß Diophant in dieſen allgemeinen Formeln zur Vereinfachung derſelben den drei Zahlenpaaren eine gemein-

meinſchaftliche Zahl gegeben habe. Nehmen wir alſo an, es ſei $m=p=s$, ſo können wir dieſen gemeinſchaftlichen Factor wegwerfen, und wir behalten als einander gleich zu ſetzen die drei Formeln $n(m^2-n^2)$, $q(m^2-q^2)$, $r(r^2-m^2)$. Es iſt alſo zunächſt

$$m^2n-n^3=m^2q-q^3$$

$$\text{alſo}\quad m^2=\frac{n^3-q^3}{n-q}=n^2+nq+q^2$$

Da haben wir den Grund der erſten Diophantiſchen Vorausſetzung, warum man nämlich zuerſt zwei Zahlen, n und q, ſuchen müſſe, ſo daß ihr Product ſammt der Summe ihrer Quadrate ein Quadrat gebe. Die Wurzel dieſes Quadrats iſt m, und die beiden erſten Dreiecke werden gebildet aus den Zahlen m, n und m, q. Nun bleibt nur noch p zu beſtimmen übrig. Zu dem Ende ſetzen wir die beiden letzten Ausdrücke einander gleich,

$$q(m^2-q^2)=r(r^2-m^2)$$

$$\text{nun iſt}\quad m^2=n^2+nq+q^2$$

$$\text{alſo}\quad m^2-q^2=n^2+nq$$

$$\text{folglich}\quad q(n^2+nq)=r(r^2-n^2-nq-q^2)$$

$$q(n^2+nr)+q^2(n+r)=r(r^2-n^2)$$

$$=r(r+n)(r-n)$$

wenn man alſo Alles durch $r+n$ dividirt, wird

$$qn+q^2=r(r-n)=r^2-rn$$

$$(q+r)n=r^2-q^2=(r+q)(r-q)$$

$$\text{folglich}\quad r=q+n$$

Darum wird das dritte Dreieck gebildet aus derſelben Zahl m und der Summe der beiden vorhergefundenen $n+q=r$. Leuchtet nun gleich ein, daß Diophant's Auflöſung dieſer Aufgabe auf ſehr particulären Vorausſetzungen beruht [3]), ſo haben wir doch daraus ent-

---

3) Bedeutend erweitert iſt dieſe Theorie von Fermat in ſeiner Observatio ad V, 8. Er lehrt daſelbſt nicht nur beliebig viele rationale rechtwinklige Dreiecke finden, welche alle einen gleichen Flächeninhalt haben, ſondern dehnt dieſe Methode auch auf einen gegebenen Flächenraum aus, oder was daſſelbe iſt, er lehrt, wie man unzählige rechtwinklige Dreiecke finden könne, welche alle gleichen Flächenraum mit einem gegebenen haben. Seine Methode iſt einfach die: wenn z die Hypotenuſe, b und d die Kathcten des gegebenen Dreiecks ſind, ſo bilde man ein neues Dreieck aus den Zahlen z^2 und $2bd$, und dividire die gefundenen Seiten durch $2z(b^2-d^2)$. Nach derſelben Methode bildet man aus dem zweiten das dritte, aus dem dritten das vierte, u. ſ. w. Indeß iſt auch dieſe Methode nicht allgemein.

nommen, daß ihm die Formel $\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$ nicht unbekannt geweſen ſein kann. Nicht ſo glücklich ſind unſere Nachforſchungen über die analoge Formel

11.) $\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$ geweſen. In den Sätzen V, 10. 11. wendet er ſie nicht an. Da er aber auch in den entſprechenden Sätzen V, 12. 13. die vorige Formel nicht gebraucht, die er doch gekannt hat, ſo können wir aus dieſer Nichtanwendung nicht zu voreilige Schlüſſe ziehen.

Wichtiger und intereſſanter aber, als dieſe rein formellen Sätze ſind die Sätze der zweiten Klaſſe, welche von der Zuſammenſetzung der Zahlen aus Quadraten oder von der Zerlegung derſelben in Quadrate handeln. Dieſe Sätze haben bei dem erſten Erſcheinen Diophant's, namentlich aber ſeit Fermat's geiſtreichen Unterſuchungen über dieſelben, bei den Mathematikern ein großes Aufſehen erregt und ihnen manches Kopfbrechen verurſacht, und mehre derſelben ſind bis in die neueſten Zeiten hin Gegenſtände gelehrter und ſcharfſinniger Forſchungen geblieben. Nicht alle dieſe Sätze ſind aber bei Diophant offen ausgeſprochen, ſondern ſie ergaben ſich zum Theil nur aus ſeinen Determinationen. Es iſt alſo bei manchen ſchwer zu entſcheiden, ob er bloß verſuchsweiſe die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Zerlegung einer gewiſſen Klaſſe von Zahlen in zwei oder drei Quadrate gekannt habe, oder ob er im Beſitze eines vollſtändigen wiſſenſchaftlichen Syſtems über dieſen ſchwierigen Gegenſtand geweſen ſei; unſicherer wenigſtens als irgendwo iſt bei den ſehr vereinzelten Winken, die Diophant giebt, hier eine auf ein ſogenanntes argumentum a silentio geſtützte Hypotheſe. Ich will nun die einzelnen Sätze nicht in der Reihenfolge, wie ſein Werk ſie uns darbietet, ſondern in wiſſenſchaftlicher Ordnung zuſammenſtellen, um den Überblick über das Vorhandene zu erleichtern, und zwar betrachten wir zuerſt die Zuſammenſetzung der Zahlen aus zwei, dann die aus drei und endlich die aus vier Quadraten.

1. Zuſammenſetzung der Zahlen aus zwei Quadraten.

II, 8. 9. Jede Quadratzahl läßt ſich auf unzählige Weiſe in die Summe zweier Quadrate zerlegen.

II, 10. Eine Zahl, welche an und für ſich die Summe

von zwei Quadraten iſt, läßt ſich auf unzählige Weiſe in zwei andere Quadrate zerlegen.

Über dieſe beiden Elementarſätze, von denen Diophant ſehr häufig Gebrauch macht, darf ich nur das erwähnen, daß hier bei der unendlichen Zerlegbarkeit nicht immer von ganzen Zahlen die Rede ſein kann.

III, 22. Wenn man zwei ganze Zahlen, deren jede die Summe von zwei Quadraten iſt, mit einander multiplicirt, ſo läßt ſich das Product auf zwiefache Weiſe in die Summe zweier Quadrate (in ganzen Zahlen) zerlegen.

Es iſt nämlich $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$
$$= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

Die Erweiterung, welche Fermat dieſem Satze gegeben hat, iſt bekannt und kann in ſeiner Anmerkung zu der bezeichneten Aufgabe nachgeſehen werden. Diophant bedient ſich dieſes Satzes, um vier rationale rechtwinklige Dreiecke über derſelben Hypotenuſe zu conſtruiren; ſein Verfahren iſt folgendes: Er geht von zwei beliebig gewählten Dreiecken aus, deren Seiten ſind

$$m^2+n^2,\quad m^2-n^2,\quad 2mn$$
$$p^2+q^2,\quad p^2-q^2,\quad 2pq$$

und multiplicirt zunächſt die Seiten eines jeden mit der Hypotenuſe des andern, ſo erhält er zunächſt zwei den angenommenen ähnliche Dreiecke für die gemeinſchaftliche Hypotenuſe $(m^2+n^2)(p^2+q^2)$. Sodann zerlegt er dieſes Product auf die oben angegebene Weiſe zweimal in zwei Quadrate, nämlich in $(mp+nq)^2+(mq-np)^2$ und in $(mp-nq)^2+(mq+np)^2$ und bildet zwei neue Dreiecke aus den Wurzeln dieſer Quadrate, das eine alſo aus den Zahlen $mp+nq$ und $mq-np$, das andere aus den Zahlen $mp-nq$ und $mq+np$. Demnach erhält er folgende vier Dreiecke:

$(m^2+n^2)(p^2+q^2)$,	$(m^2-n^2)(p^2+q^2)$, $\quad 2mn(p^2+q^2)$
„ „	$(m^2+n^2)(p^2-q^2)$, $\quad 2pq(m^2+n^2)$
„ „	$4mnpq+(m^2-n^2)(p^2-q^2)$, $\quad 2(mp+nq)(mq-np)$
„ „	$4mnpq-(m^2-n^2)(p^2-q^2)$, $\quad 2(mp-nq)(mq+np)$

Diophant's Beiſpiel iſt folgendes: „Wir nehmen, ſagt er, zwei rechtwinklige Dreiecke in den kleinſten Zahlen, z. B. 3·4·5 und 5·12·13, und multipliciren jedes mit der Hypotenuſe des andern, ſo wird das erſte Dreieck 39·52·65, das zweite 25·60·65; ſo haben wir alſo zwei Dreiecke, welche gleiche Hypotenuſen haben. Außerdem aber läßt ſich 65 noch von ſelbſt (φυσικῶς) zweimal in zwei Quadrate zerlegen, nämlich in 16 und 49, und in 64 und 1. *Das kommt aber daher, weil 65 das Product der Zahlen 5 und 13 iſt, deren jede ſich in zwei Quadrate zerlegen läßt.*“ Nun bildet er die beiden andern Dreiecke aus den Wurzeln der gefundenen Quadrate, nämlich aus 4 und 7, und aus 8 und 1, ſo wird das erſte 33·56·65, das zweite 16·63·65. Der Satz, daß das Product zweier Zahlen m^2+n^2 und p^2+q^2 ſich zweimal in die Summe zweier Quadrate zerlegen laſſe, erleidet indeß die Beſchränkung, daß ſich nicht $m:n=p:q$ verhalten, oder daß nicht eine der gegebenen Zahlen ein quadratiſches Vielfaches der andern ſein müſſe. Aber auch in Fällen, welche außerhalb dieſer Beſchränkung liegen, fällt die Zerlegung nicht immer der Art aus, daß die gefundenen Zahlen zur Bildung rechtwinkliger Dreiecke benutzt werden können. Z. B. 10 und 5 ſind beides Summen zweier Quadrate, ohne daß 10 ein quadratiſches Vielfaches von 5 wäre, und ihr Product 50 iſt auch zweimal die Summe zweier Quadrate, aber dieſe Quadrate ſind 49+1 und 25+25, von denen die letztern, weil ſie einander gleich ſind, die eine Kathete des Dreiecks $=0$, dagegen die andere der Hypothenuſe gleichmachen würden. Die Bedingung für dieſen Fall iſt die, daß ſich nicht $p:q = m+n:m-n$ verhalten dürfe. Beide Übelſtände vermeidet Diophant dadurch, daß er ſagt, die beiden beliebig angenommenen Dreiecke ſollen in den kleinſten Zahlen ausgedrückt werden. — Ich bemerke nur noch, daß dieſe Diophantiſche Anwendung des in Rede ſtehenden Satzes auf die Auffindung von vier rechtwinkligen Dreiecken über derſelben Hypotenuſe einerlei iſt mit der Aufgabe, eine Quadratzahl zu finden, die ſich in ganzen Zahlen viermal in die Summe zweier Quadrate zerlegen laſſe. Auch dieſe Anwendung des Satzes hat Fermat erweitert, wie wir gehörigen Orts ſehen werden.

V, 12. a) *Eine Zahl von der Form $4n+3$ kann nie in zwei Quadrate zerlegt werden.*

b) *Jede Primzahl von der Form $4n+1$ iſt die Summe zweier Quadrate.*

Beide Sätze folgen aus der dieſer Aufgabe beigefügten Determination. Man ſoll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, ſo daß, wenn man zu jedem Stücke eine gegebene Zahl addirt, beide Summen Quadrate werden. Die gegebene Zahl darf aber weder ungerade ſein, noch darf ihr Doppeltes eine um 1 größere Zahl haben, die von einer Primzahl gemeſſen wird[4]).

Nennt man die beiden geſuchten Stücke x und y, die gegebene Zahl a, ſo ſoll $x+y=1$, $x+a=m^2$, $y+a=n^2$ ſein. Addirt man die beiden letzten Gleichungen, ſo erhält man die Gleichung

$$2a+1=m^2+n^2.$$

Die gegebene Zahl a muß ſo beſchaffen ſein, daß ihr Doppeltes um 1 vermehrt in zwei Quadrate zerlegt werden kann. Nun ſagt

---

4) Leider iſt dieſe Determination in den Handſchriften arg entſtellt. Bachet giebt ſie im Texte ſo: δεῖ δὴ τὸν διδόμενον μήτε περισσὸν εἶναι, μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἡ μᵒ α̅. μείζονα ἔχῃ μέρος δ̅. ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α̅οῦ.ςοῦ; in dem Commentar giebt er für den zweiten Theil der Leſeart des Vaticaniſchen Codex, welche ebenſo unglücklich und faſt übereinſtimmend lautet: μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἀριθμὸν μονάδα α̅. μείζονα ἔχῃ μέρος τέταρτον, ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ. Bachet hat hin und her gerathen, und iſt zuweilen dem Wahren auf die Spur gekommen; weil er aber den Satz nicht kannte, auf den Diophant hinzielt, ſo iſt es ihm weder gelungen, den Text zu verbeſſern, noch die richtige Determination der Aufgabe zu geben. Das letztere hat Fermat gethan, ohne den Text weiter zu berückſichtigen. Erſt Schulz hat ſich an dieſe Correctur gewagt, aber, wie ich glaube, Einiges ſtehen laſſen, was ganz unhaltbar iſt. Er ſagt S. 518. ſo: „Es iſt kaum möglich, in die zweite Hälfte dieſes Satzes, ſo wie ſie im Texte ſteht, einen Sinn zu bringen. Man werfe aber die Worte μέρος τέταρτον, als ein Gloſſem eines Abſchreibers, aus dem Texte, und leſe ἔχειν ſtatt ἔχῃ, ὃς ſtatt ἢ, und τινὸς ſtatt des abgekürzten τοῦ, ſo iſt die Überſetzung u. ſ. w. Die letztere Bedingung hätte allerdings viel kürzer ausgedrückt werden können, aber der Verfaſſer hätte ein Mal die erſte Bedingung durch eine Verneinung ausgedrückt und wurde dadurch veranlaßt, auch die zweite auf dieſelbe Weiſe auszudrücken. Wie das μέρος τέταρτον in den Text gekommen ſei, iſt leicht zu erklären: denn da die gegebene Zahl eine gerade ſein ſoll, ſo muß das Doppelte derſelben durch 4 theilbar ſein, oder μέρος τέταρτον ἔχειν; dies bemerkte ein Leſer bei den Worten ὁ διπλασύων αὐτοῦ, und ein Abſchreiber, der das ganze nicht faßte, nahm es in den Text auf.“ — Wenn wir nach dieſer Correctur der Hauptfehler noch einige Kleinigkeiten berückſichtigen, ſo dürfte der zweite Theil nun ſo zu leſen ſein: μήτε τὸν διπλασίονα αὐτοῦ ἀριθμὸν μονάδι μείζονα ἔχειν, ὃς μετρεῖται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ.

Diophant zuerſt, die gegebene Zahl darf nicht ungerade ſein. Setzen wir nämlich a ungerade, etwa $=2p+1$, ſo iſt ihr um 1 vermehrtes Doppelte $4p+3$; bekanntlich kann aber keine Zahl von der Form $4p+3$ die Summe zweier Quadrate ſein, ein Satz, der, wie alle negativ ausgeſprochenen Sätze dieſer Art, ſich ſehr leicht beweiſen läßt. Demnach darf a nur gerade oder $2p$, alſo $2a+1 = 4p+1$ ſein, und der zweite Theil der Determination ſagt, daß dieſe Zahl $4p+1$ durch keine Primzahl gemeſſen werden dürfe, das heißt, daß ſie ſelbſt Primzahl ſein müſſe. In der That iſt jede Primzahl von der Form $4p+1$ die Summe zweier Quadratzahlen, und es iſt nicht wenig überraſchend, dieſen erſt von Euler bewieſenen, wenngleich ſchon von Fermat mit Beſtimmtheit ausgeſprochenen Satz bei Diophant als bekannt vorausgeſetzt zu finden. Werfen wir aber noch einen Blick auf das Verhältniß der Determination zu der vorliegenden Aufgabe, ſo zeigt ſich bald, daß dieſelbe zu enge iſt, und in dem Beſtreben, alle unzuläſſigen Zahlen aus der Aufgabe zu entfernen, zu weit geht. Gegen den erſten Theil iſt in dieſer Hinſicht nichts einzuwenden, wohl aber gegen den zweiten; denn es giebt eine große Menge von Zahlen, die die Form $4p+1$ haben und aus zwei Quadraten zuſammengeſetzt ſind, ohne Primzahlen zu ſein. Erſtens nämlich hat Diophant in dem vor dieſem angeführten Satze die Bemerkung ausgeſprochen, daß das Product zweier Zahlen, deren jede die Summe zweier Quadrate iſt, zweimal die Summe zweier Quadrate iſt, daß alſo die zuſammengeſetzte Zahl $(4m+1)(4n+1)$, wenn jeder Factor Primzahl iſt, gewiß die Summe zweier Quadrate ſein muß; multipliciren wir nun dieſe Zahl mit einer dritten Primzahl von der Form $4p+1$, ſo iſt auch $(4m+1)(4n+1)(4p+1)$ die Summe zweier Quadrate, und ſo ins Unendliche fort. Zweitens aber iſt klar, daß wenn man irgend eine Summe zweier Quadrate mit einer beliebigen Quadratzahl multiplicirt, das Product ebenfalls die Summe zweier Quadrate ſein muß. Demnach iſt eine Zahl von der Form $4n+1$ die Summe zweier Quadrate nicht allein, wenn ſie Primzahl iſt, ſondern auch, wenn ſie außer quadratiſchen Factoren nur Primfactoren von der Form $4n+1$, wenn ſie alſo die Form hat

$$m^2 \cdot [(4n+1)(4n_{,}+1)(4n_{,,}+1)(\cdots\cdots\cdots)]$$

In dieſer Allgemeinheit hat ſchon Fermat in ſeiner Observatio zu der vorliegenden Aufgabe die Determination ausgeſprochen. Vera

limitatio, ſagt er, haec est, generalis nempe et omnes numeros inutiles excludens. Oportet datum numerum non esse imparem, neque duplum ejus unitate auctum per maximum quadratum a quo mensuratur divisum dividi a quovis numero primo unitate minori quam multiplex quaternarii. Bei der deſolaten Verfaſſung des Textes bleibt übrigens Freunden von Conjecturen ein weites Feld geöffnet, wie viel von dem hier Angeführten ſie etwa in die Diophantiſchen Worte noch hineinlegen oder aus denſelben herausſchneiden wollen.

Einer ähnlichen Determination hatte die folgende Aufgabe V, 13. bedurft, welche die Zahl 1 ſo in zwei Stücke zu theilen verlangt, daß wenn man zu jedem derſelben eine andere gegebene Zahl addirt, dieſe Summen Quadrate werden. Hier kommt es alſo, wenn a und b die gegebenen Zahlen ſind, darauf an, daß $a+b+1$ ſich in zwei Quadrate zerlegen laſſe. Über die Willkühr, die Diophant ſich erlaubt, indem er a und b ſo annimmt, daß $a+b+1$ Quadratzahl wird, und auf dieſe Particularität geſtützt die Auflöſung durchführt, habe ich bei einer andern Gelegenheit geſprochen.

2. Zuſammenſetzung der Zahlen aus drei Quadraten.

V, 14. Eine Zahl von der Form $8n+7$ kann nie die Summe von drei Quadraten ſein.

Anders als in dieſer negativen Geſtalt wage ich den Satz im Geiſte Diophant's nicht auszuſprechen, und eigentlich habe ich ihm damit ſchon etwas zu Liebe gethan, indem ich durch dieſe negative Auffaſſung des Satzes einen offenbaren Mangel verdecke, an dem die Determination, welcher derſelbe entnommen iſt, leidet. Denn ſtrenge genommen ſpricht Diophant den unwahren Satz aus, daß jede Zahl, welche nicht die Form $8n+7$ hat, ſich in drei Quadratzahlen zerlegen laſſe. Die Aufgabe lautet nämlich, der zwölften analog: Man ſoll die Zahl 1 in drei Stücke theilen, zu jedem Stücke dieſelbe gegebene Zahl addiren, und alle drei Summen ſollen Quadrate werden. Sind nun die Stücke x, y, z, die gegebene Zahl a, ſo ſoll

$$x+y+z=1,\quad x+a=m^2$$
$$y+a=n^2$$
$$z+a=p^2$$

alſo $x+y+z+3a$, das iſt
$$3a+1=m^2+n^2+p^2 \text{ ſein.}$$

Es kommt alſo bei der Aufgabe darauf an, die Zahl a ſo zu geben, daß ihr um 1 vermehrtes Dreifache ſich in drei Quadrate zerlegen laſſe. Nun ſagt Diophant's Determination: Die gegebene Zahl darf aber weder 2, noch eine aus der Reihe der um 2 vermehrten Vielfachen von 8 ſein. Das heißt alſo, die gegebene Zahl darf nicht $8q+2$ ſein. Wenn aber a nicht $8q+2$ ſein darf, ſo kann $3a+1$ nicht $24q+7$ ſein. Demnach hat Diophant den Satz ausgeſprochen, daß eine Zahl von der Form $24q+7$ nicht die Summe dreier Quadrate werden könne. Aber der Theiler 3, der in der 24 ſteckt, iſt hier ohne Bedeutung, weil $24q+7$ durch 3 dividirt 1 zum Reſt läßt, alſo jene Zahl in Bezug auf den Diviſor 3 nicht nur die Summe von drei, ſondern auch von zwei Quadraten, ja ſelbſt Quadratzahl ſein könnte. Demnach bleibt als characteriſtiſches Merkmal nur die Form der Zahl in Bezug auf den Theiler 8 zu betrachten übrig, und dann iſt ſie $8q+7$. Nun ſind aber die Zahlen von der Form $8q+7$ nicht die einzigen, welche die Eigenſchaft haben, daß ſie ſich nicht in drei Quadrate zerlegen laſſen. Daraus folgt, daß die Diophantiſche Determination zu weit iſt, weil ſie nicht alle unbrauchbaren Zahlen ausſchließt, daß ſie alſo den entgegengeſetzten Fehler der vorhergehenden hat. Um ganz ſicher zu gehen, hätte Diophant nur noch beſtimmen dürfen, daß a nicht ungerade ſein dürfe; dadurch hätte er freilich eine große Menge brauchbarer Zahlen mit ausgeſchloſſen, aber auf der andern Seite die Möglichkeit verhütet, daß unbrauchbare Annahmen ſich einſchlichen. Wenn nämlich a eine gerade Zahl iſt, ſo wird $3a+1$ ungerade; und Legendre hat bewieſen, daß jede ungerade Zahl, die nicht die Form $8n+7$ hat, ſich in drei Quadrate zerlegen laſſe. Bei der Unzulänglichkeit aber, in welcher dieſe Determination gegeben iſt, können wir aus ihr in der That nichts weiter ſchließen, als daß Diophant den ſehr leicht zu beweiſenden negativen Satz gekannt habe, daß eine Zahl von der Form $8n+7$ ſich nicht als die Summe dreier Quadratzahlen darſtellen laſſe. Daß die Determination nicht alle

unbrauchbaren Zahlen ausſchließe, hat ſchon Bachet bemerkt, und namentlich die Zahlen von der Form $32n+9$ als ſolche bezeichnet, welche für a nicht angenommen werden dürfen. Die vollſtändige Beſchränkung, welcher die Annahme der Zahl a unterliegt, hat indeß wieder Fermat zuerſt ausgeſprochen, und zwar in folgender Geſtalt: Er ſchreibt zwei geometriſche Progreſſionen untereinander, von denen die obere Reihe die von 1 anfangenden ſucceſſive fortlaufenden Potenzen von 4, die untere Reihe die Achtfachen der darüber ſtehenden Glieder enthält, alſo

1	4	16	64	256	1024.....
8	32	128	512	2048	8192.....

und nun ſagt er, a dürfe keine Zahl ſein, welche entſteht, wenn man ein Glied der obern Reihe verdoppelt und dazu alle vorhergehenden Glieder derſelben Reihe addirt, und ferner keine Zahl, welche entſteht, wenn man die ſo gefundene Zahl zu einem Vielfachen des entſprechenden Gliedes der untern Reihe addirt. Daher dürfe a nicht ſein

$8n+2\cdot1$	oder	$8n+2$	(Diophant)
$32n+2\cdot4+1$	„	$32n+9$	(Bachet)
$128n+2\cdot16+4+1$	„	$128n+37$	
$512n+2\cdot64+16+4+1$	„	$512n+149$	

u. ſ. w.

Wenn wir den Satz allgemein ausdrücken und bedenken, daß die Summe der Potenzen von 4, von 1 bis 4^{p-1} genommen, $\frac{4^p-1}{3}$ iſt, ſo darf a nicht ſein $8\cdot4^pn+2\cdot4^p+\frac{4^p-1}{3}$, oder $8\cdot4^pn+\frac{7\cdot4^p-1}{3}$, demnach darf $3a+1$ nicht ſein $8\cdot4^pn+7\cdot4^p$, das iſt $4^p(8n+7)$, und wir erhalten daher den berühmten Satz, daß jede Zahl, welche nicht von der Form $8n+7$ oder ein Product einer Zahl dieſer Form in irgend eine Potenz von 4 iſt, ſich in die Summe dreier Quadrate zerlegen laſſe. Da nun alle dieſe Zahlen entweder ungerade Zahlen von der Form $8n+7$, oder gerade Zahlen von der Form $4n$ ſind, ſo folgen aus dieſem allgemeinen Satze als ſpeciellere die beiden: 1) Jede ungerade Zahl, welche nicht die Form $8n+7$ hat, und 2) jede gerade Zahl von der Form $4n+2$ iſt in drei Quadrate zerlegbar. Wie ich ſchon erwähnte, läßt ſich aus Diophant's Determination nicht entnehmen, wieviel von dieſen

Sätzen ihm bekannt geweſen ſei, wieviel nicht; und die Bemühung von Schulz, zu zeigen, daß Diophant beide letztgenannten Sätze genau gekannt habe, beruht auf einem Irrthum[5]). Den erſten der beiden letztgenannten Specialſätze ſcheint Diophant allerdings gekannt zu haben; für die Annahme ſeiner Bekanntſchaft mit dem letzten Satze haben wir aber gar keine Auctorität.

Bei den Aufgaben V, 15. 16., welche ebenfalls von der Zerlegbarkeit einer gegebenen Zahl in drei Quadratzahlen abhängen, fehlt die Determination, welche der zu V, 14. gegebenen eben betrachteten ziemlich conform ausfallen mußte.

Einer beſonderen Betrachtung wollen wir noch die Aufgaben V, 22. 23. unterwerfen. Die erſtere verlangt eine gegebene Zahl a in drei Stücke x, y, z zu zerlegen, ſo daß a^3-x, a^3-y, a^3-z Quadrate werden. Addirt man dieſe drei Formeln, ſo kommt es darauf an, die Zahl $3a^3-a$ in drei Quadrate zu zerlegen. Diophant giebt auch hier keine Determination und ſcheint alſo die

5) Schulz bemüht ſich nämlich zu zeigen, daß Diophant's Determination erſchöpfend ſei nnd alle unbrauchbaren Zahlen ausſchließe. Sein Beweis lſt folgender: „Daß dieſe Bedingung aber hinreichend ſei, läßt ſich leicht überſehen. Die „Zahl $3a+1$ iſt entweder ungerade oder gerade, erſteres wenn a eine gerade, „letzteres wenn a eine ungerade Zahl iſt. Wenn nun $3a+1$ ungerade und nicht „zugleich von der Form $8n+7$ iſt, ſo läßt ſie ſich nach dem angeführten Satze „bei Legendre gewiß in drei Quadrate theilen. Iſt aber $3a+1$ eine gerade „Zahl, ſo muß a ſelbſt eine ungerade Zahl, alſo von der Form $2n+1$ ſein, wo „n eine ungerade Zahl bedeutet (???). Daher wird $3a+1=6n+4$, „alſo das Doppelte einer Zahl von der Form $3n+2$, d. h. einer ungeraden „Zahl (???). Nun wird aber bei Legendre a. a. O. bewieſen, daß jede Zahl, „welche das Doppelte einer ungeraden Zahl iſt, ebenſalls die Summe von drei „Quadraten ſei. Es iſt alſo einleuchtend, daß die Zahl $3a+1$, inſofern ſie nicht „in die bezeichnete Reihe gehört, ſich jedes Mal in drei Quadrate zerſtückeln laſſe, „und ebenſo einleuchtend lſt es, daß Diophantus ſowohl dieſen, als den von Enler „bewieſenen Satz, daß jede Primzahl von der Form $4n+1$ dle Summe zweier „Quadrate ſei, genau gekannt haben müſſe.“ — Allerdings wird, wenn wir $a=2n+1$ und dann noch n ungerade ſetzen, der Ausdruck $3a+1$ das Doppelte einer ungeraden Zahl. Aber wer heißt uns n ungerade, das heißt, $a=4n+3$ ſetzen? Schulz hat alſo nur bewieſen, daß die Auflöſung immer möglich iſt, wenn a gerade und nicht $8n+2$, und wenn $a=4n+3$ iſi. Wie ſteht es aber mit $a=4n+1$? Unter dieſen giebt es zuläſſige und unzuläſſige a, die nur durch die Fermat'ſche Determination geſchieden werden können. Schon das Beiſpiel von Bachet, daß $a=9$, alſo $3a+1=28$ nicht zum Ziele führt, hätte den gelehrten Überſetzer aufmerkſam machen ſollen.

Möglichkeit der Ausführung in allen Fällen vorauszuſetzen. In der That iſt die Auflöſung immer möglich, wenn a ungerade, oder auch wenn a gerade-ungerade, das heißt, von der Form $4n+2$ iſt. In beiden Fällen erhält $3a^3-a$ die Form $4n+2$, welche ſich immer in drei Quadrate zerlegen läßt. Unmögliche Fälle ſind alſo nur in der Form $a=4n$ zu ſuchen. Um dieſe aufzufinden, ſetzen wir $3a^3-a$ der Formel gleich, welche die Unmöglichkeit der Zerlegbarkeit in drei Quadrate ausdrückt, ſo haben wir $3a^3-a$, oder

$$a(3a^2-1)=4^\nu(8n+7)$$

Ohne weiter auf eine Unterſuchung aller möglichen Fälle, in welchen dieſe Gleichung ſtatt haben kann, einzugehen, begnügen wir uns mit dem, was der bloße Augenſchein giebt, daß nämlich die Gleichung erfüllt wird, wenn wir $a=4^\nu$ ſetzen, weil dann zugleich allemal $3a^2-1=8n+7$ wird. Demnach wird die Zerlegung des Ausdrucks $3a^3-a$ in drei Quadrate allemal unmöglich ſein, wenn a eine Potenz von 4 iſt. Ebenſo darf a nicht $4^\nu(8n+1)$ ſein, wie eine der folgenden ähnliche Unterſuchung leicht ergiebt.

In der Aufgabe V, 23. ſoll $x+y+z=\frac{1}{a}$, und jede der Formeln $x-\frac{1}{a^3}$, $y-\frac{1}{a^3}$, $z-\frac{1}{a^3}$ ein Quadrat werden. Addirt man hier wieder die drei Ausdrücke, ſo kommt es darauf an, die Formel $\frac{1}{a}-\frac{3}{a^3}$, oder was daſſelbe iſt, a^3-3a in drei Quadrate zu zerlegen. Auch dieſe Operation iſt immer möglich, wenn $a=2n+1$ oder $=4n+2$ iſt. Wir wollen ferner unterſuchen, wie es ſteht, wenn a die Form $4n$ hat. Zuerſt leuchtet ein, daß wenn wir wieder

$$a(a^2-3)=4^\nu(8n+7)$$

ſetzen, der Werth $a=4^\nu$ dieſer Gleichung nicht genügt; denn für dieſen Werth von a erhält a^2-3 die Form $8n-3$ oder $8n+5$, welche nicht mit $8n+7$ identiſch ſein kann. Nun kann aber eine Zahl von der Form $8n+7$, wenn ſie nicht Primzahl iſt, nur entſtanden ſein aus Factoren $(8n+1)(8n+7)$, oder aus $(8n+3)(8n+5)$. Setzen wir alſo zunächſt

$$a(a^2-3)=4^\nu(8n+1)(8n+7)$$

und verſuchen, ob $a=4^\nu(8n+1)$ der Gleichung genügen könne; es leuchtet aber ein, daß das nicht möglich ſei, da a^2-3 in dem

Falle ebenfalls wieder die Form $8n-3$ erhält. Ebenſo wenig kann $a=4^r(8n+7)$ geſetzt werden. Setzen wir alſo ferner

$$a(a^2-3)=4^r(8n+3)(8n+5)$$

und nehmen $a=4^r(8n+3)$ an, ſo wird a^2-3 immer die Form $8n-3$, das iſt, $8n+5$, alſo $a(a^2-3)$ die Form $4^r(8n+7)$ haben. Demnach iſt $a=4^r(8n+3)$ ein Werth, welcher die Zerlegung der Formel a^3-3a in drei Quadrate unmöglich macht. Setzen wir z. B. $a=12=4\cdot3$, ſo iſt $a^3-3a=1728-36=1692$, und dieſe Zahl läßt ſich nicht in drei Quadrate zerlegen, weil ſie durch 32 dividirt den Reſt 28 läßt.

Der Zweck dieſer Unterſuchungen iſt allein der, nachzuweiſen, daß aus dem Fehlen einer Determination bei Diophant ſich nicht ſichere und kühne Schlüſſe ziehen laſſen. Da er die Determination nicht giebt, wo die Auflöſung nicht in allen Fällen möglich iſt, ſo folgt aus dem Fehler der Determination bei allgemein möglichen Aufgaben nicht, daß Diophant die allgemeine Möglichkeit derſelben auch klar gekannt habe.

3. Zuſammenſetzung der Zahlen aus vier Quadraten.

Diophant ſetzt in drei Aufgaben, IV, 31. 32. V, 17., voraus, daß eine durch keine Determination beſchränkte gegebene Zahl ſich in vier Quadrate zerlegen laſſe. Die eben gemachte Bemerkung macht es aber ungewiß, ob er wirklich den von Fermat aufgeſtellten Satz, daß jede Zahl ohne Ausnahme ſich in vier Quadrate zerlegen laſſe, als wiſſenſchaftlichen Lehrſatz gekannt habe. Ebenſo wie er bei den eben erläuterten Aufgaben keine Determination giebt, obgleich ſie nicht immer möglich ſind; ebenſo wie er bei der letztern von ihnen, wo er $a=4$ angenommen und die Auflöſung dahin geführt hatte, den Bruch $\frac{13}{64}$ in drei Quadrate zu zerlegen, ganz genügſam ſagt: ὅπερ ἐστὶ ῥᾴδιον, da es ihm doch ſehr ſchwer geworden wäre, wenn er $a=12$ geſetzt hätte; ebenſo gut iſt es möglich, daß der allgemeinen Form, in der die drei genannten Aufgaben erſcheinen, mehr eine ähnliche Überlieferung an das glückliche Ohngefähr, als eine wirkliche wiſſenſchaftlich begründete Kenntniß des in Rede ſtehenden Lehrſatzes zu Grunde liegt. Überdies iſt die Art, wie Diophant dieſe Aufgaben und zumal die Zerlegung der Zahlen in vier Quadrate behandelt, nicht geeignet, unſere Zweifel zu ſeinen

Gunſten zu zerſtreuen. In den Aufgaben IV, 31. 32. benutzt er den zufälligen Umſtand, daß die in vier Quadrate zu zerlegende Zahl die Summe zweier Quadrate iſt, in dem erſten Beiſpiel 13, im zweiten 5. Er ſagt z. B. τὰς $\overline{ιγ}$ ἄρα μονάδας διαιρεῖν δεῖ εἰς τέσσαρας τετραγώνους … διαιροῦνται δὲ οἱ $\overline{ιγ}$ εἰς δύο τετραγώνους, τόν τε $\overline{δ}$ καὶ τὸν $\overline{ϑ}$. καὶ πάλιν ἑκάτερος τούτων διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους etc. Aus dieſer Darſtellung erhellt weder, wie man die Zerlegung der vorliegenden Zahl in vier Quadrate anzuſtellen habe, wenn dieſelbe nicht auch die Summe von zwei Quadraten iſt, noch ob Diophant von der unbedingten Ausführbarkeit der Operation überzeugt geweſen ſei. Auch die beiden andern Aufgaben geben keinen Aufſchluß über Diophant's eigentliches Verhältniß zu dieſem Satze.

Es muß indeß der Anſicht eines Jeden überlaſſen bleiben, ſich dafür zu entſcheiden, ob die unvollkommene Darſtellung dieſer allgemein möglichen, ſo wie das Fehlen der Determinationen bei den einer Beſchränkung unterworfenen Auflöſungen auf Rechnung der allgemeinen Verſtümmelung des Werks im Laufe der Zeit, oder auf Rechnung Diophant's ſelbſt zu ſchreiben ſeien; mit andern Worten, ob namentlich die jetzt fehlenden Determinationen von Abſchreibern ausgelaſſen, oder von Diophant gar nicht gegeben ſeien, aus dem Grunde, weil er ſie nicht zu geben wußte.

Es bliebe nun noch die Frage zu erörtern übrig, in welcher Art Diophant die Lehrſätze, von denen wir hier gehandelt haben, und die, wie es ſcheint, unter dem beſonderen Titel der Porismata einen Theil ſeines arithmetiſchen Werks ausmachten, behandelt habe. Gewiß hat er ſie, da er ſich auf mehre derſelben als auf ausgemachte Wahrheiten beruft, nicht ohne Beweis gelaſſen, und die Analogie mit ſeinen Lehrſätzen über die Polygonalzahlen läßt vermuthen, daß er ſich der Euklidiſchen linearen Beweismethode bedient habe. Da uns hierüber jedoch alle, auch die entfernteſten leiſeſten Andeutungen fehlen, ſo thun wir am beſten, wenn wir dieſe Frage auf ſich beruhen laſſen und uns vor der Aufſtellung vager Hypotheſen hüten, die doch am Ende zu keinem, geſchweige denn zu einem einigermaßen befriedigenden Reſultate führen können.

Elftes Kapitel.

Diophant's Schrift über die Polygonalzahlen.

Dem Inhalte nach mit den arithmetiſchen Aufgaben nahe verwandt, deshalb auch wahrſcheinlich als ein ergänzender Theil derſelben zu betrachten aber in Form und Darſtellung von denſelben verſchieden iſt Diophant's kleine Abhandlung über die Theorie der Polygonalzahlen. Obgleich weder der Gegenſtand dieſer Schrift und noch viel weniger die Art, wie der Stoff behandelt wird, eigentlich der Algebra angehört, ſo kann ich mich doch nicht enthalten, eine, wenn auch möglichſt kurze Darſtellung derſelben in den Kreis unſerer Unterſuchungen zu ziehen, geſchähe es auch nur, um dadurch die Schilderung des in jeder Beziehung merkwürdigen Verfaſſers zu vollenden.

Boſſut ſcheint, wie ich oben ſchon einmal erwähnte, die Echtheit dieſer Schrift als einer Diophantiſchen, wenn nicht zu bezweifeln, ſo doch wenigſtens nicht für entſchieden zu halten. Eine ſolche Annahme aber widerſpricht nicht nur allen uns zu Gebote ſtehenden äußern Auctoritäten, indem dieſelbe in allen bekannten Manuſcripten unmittelbar dem ſechſten Buche der Aufgaben und unter Diophant's Namen angehängt iſt, ſondern auch vorzüglich der Inhalt und die Form derſelben. Obgleich in der Behandlungsart des Stoffes von den Aufgaben ganz verſchieden, hat ſie doch mit dieſen das gemein, daß ſie ebenſo wie das größere Werk in ihrer Art ganz originel iſt und ohne Analogie in der Griechiſchen Literatur daſteht. Es folgt daraus, daß wir es hier jedenfalls mit dem Werke eines großen Mathematikers zu thun haben und daß darum eben jeder Grund wegfällt, der uns etwa veranlaſſen könnte, der Ausſage der Handſchriften zu widerſtreiten.

Das Charakteriſtiſche dieſer Schrift iſt nämlich die den alten Arithmetikern fremde ganz univerſelle Auffaſſung und Darſtellung

des behandelten Gegenſtandes. Der Verfaſſer ſpricht hier nicht ſucceſſive von dreieckigen, viereckigen, fünfeckigen Zahlen, ſondern durchweg ganz allgemein von Polygonzahlen; er giebt die Regeln für die Bildung und Auffindung derſelben, und die Sätze, welche ihre Eigenſchaften ausſprechen, nicht wie die frühern Arithmetiker für jede einzelne Klaſſe derſelben beſonders, ſondern geht ſogleich von dem allgemeinen Begriffe der Polygonzahl aus und ſtellt Regeln und Sätze auf, welche alle dieſem allgemeinen Begriffe untergeordneten Fälle in ſich ſchließen und aus denen durch Subſtitution der Winkelzahl die Sätze für jede beſondere Klaſſe ſich herleiten laſſen. Von einer ſo univerſellen Auffaſſung hat Nikomachus noch keine Idee, und Hypſikles, auf den Diophant ſich in dem achten Satze beruft, hat, wie aus des Letztern Worten zu folgen ſcheint, ſich noch an die Vorſtellung der ſucceſſiven Entſtehung gehalten.

Der Zweck der kleinen Abhandlung war, wie aus der Vorrede hervorgeht, ein ziemlich beſchränkter. Diophant will eine wiſſenſchaftliche Definition und zugleich ein allgemeines Merkmal, welches eine Zahl als Polygonalzahl kenntlich macht, angeben und ſodann zeigen, in welcher gegenſeitigen Beziehung eine Polygonalzahl und ihre Seite zu einander ſtehen, ſo daß man aus einer die andern finden kann. Dem Hauptſatze gehen fünf Hilfsſätze vorher; dieſer Hauptſatz aber iſt der in der Bachet'ſchen Ausgabe mit **Propositio Octava** bezeichnete, dem dann noch ein kleiner, aber in den Ausgaben nicht vollendeter Anhang folgt. Die Bachet'ſche Eintheilung dieſer Schrift, gleichviel ob er ſie in den Handſchriften ſchon vorgefunden oder erſt ſelbſt bei der Ausgabe eingeführt hat, iſt nicht geeignet, die Überſicht über den innern Zuſammenhang des Werks zu erleichtern. Die Vorrede nennt er **Propositio prima**; ſeine **Propositio quinta** iſt der zweite Theil des Beweiſes der **Propositio quarta**. Die **Propositio nona** iſt ebenfalls kein eigener Satz, ſondern nur, wie Diophant ausdrücklich ſagt, eine planere Faſſung des vorhergehenden. Indem ich in der folgenden Darſtellung die Eintheilung ſo ändere, wie der Gang und die Natur des Gegenſtandes es erfordert, werde ich, um Verwirrungen zu vermeiden, die Bachet'ſche Eintheilung lateiniſch hinzufügen.

Einleitung. (**Prop. I.**) „Jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe, von der Drei an gerechnet, iſt eine Polygonzahl, und zwar die erſte (ihrer Gattung) nach der Einheit; und ſie enthält ſo viele Winkel als die Anzahl ihrer Einheiten ausdrückt; ihre Seite aber

iſt die der Eins nächſte Zahl, die Zwei. Demgemäß wird 3 eine dreieckige, 4 eine viereckige, 5 eine fünfeckige Zahl ſein, und ſo fort.“ — Dieſes iſt eine kurze Recapitulation des aus frühern Schriften als bekannt Vorausgeſetzten. Es folgt die Angabe des Zwecks dieſer Schrift.

„Wie es nun von den Qadratzahlen bekannt iſt, daß ſie aus der Multiplication einer Zahl in ſich ſelbſt entſtehen, ſo hat ſich es auch bewährt, daß jede Polygonzahl multiplicirt mit einer von der Zahl ihrer Winkel abhängigen Zahl, und addirt zu einem Quadrat, das ebenfalls von der Zahl ihrer Winkel abhängt, eine Quadratzahl zum Vorſchein bringt. Das nun will ich beweiſen und zugleich zeigen, wie man aus der gegebenen Seite die zugehörige Polygonalzahl, und aus der Polygonalzahl die Seite findet. Vorher aber werde ich einige Hilfsſätze (τὰ εἰς αὐτὰ λαμβανόμενα) beweiſen.“

Hilfsſätze.

Erſter Satz. (Prop. II.) „Wenn drei Zahlen von gleichem Unterſchiede ſind, ſo iſt das achtfache Product der beiden größern, addirt zu dem Quadrate der kleinſten, ein Quadrat, deſſen Wurzel iſt die Summe der größten und der doppelten mittlern.“

Über Diophant's Beweiſe werde ich unten ſprechen; hier begnüge ich mich, die Sätze an Formeln zu erläutern. Hat man drei Zahlen von gleichem Unterſchiede, a, $a+b$, $a+2b$, ſo iſt

$$\begin{aligned} 8(a+2b)(a+b)+a^2 &= 8(a^2+3ab+2b^2)+a^2 \\ &= 9a^2+24ab+16b^2 \\ &= (3a+4b)^2 \\ &= [(a+2b)+2(a+b)]^2 \end{aligned}$$

Zweiter Satz. (Prop. III.) „Wenn beliebig viele Zahlen von gleichem Unterſchiede ſind, ſo iſt der Unterſchied der größten und kleinſten gleich dem Producte aus dem beſtändigen Unterſchiede in die um 1 verminderte Anzahl der vorliegenden Zahlen.“

Hat man nämlich die arithmetiſche Reihe

a, $a+b$, $a+2b$ und ſo weiter,

ſo iſt deren n^{tes} Glied $a+(n-1)b$, alſo der Unterſchied zwiſchen dieſem und dem erſten Gliede gleich $(n-1)b$.

Dritter Satz. (Prop. IV. V.) „Wenn beliebig viele Zahlen von gleichem Unterſchiede ſind, ſo iſt das Product aus der

Summe

Summe der größten und kleinſten in die Anzahl der Zahlen gleich der doppelten Summe aller vorliegenden Zahlen.“

Dieſer Satz enthält die bekannte Formel für die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion. Nennt man nämlich die kleinſte Zahl a, die größte t, die Anzahl n, die Summe aller S, ſo iſt $S=(a+t)\frac{n}{2}$, oder, wie Diophant den Satz ausdrückt, $(a+t)n=2S$. Diophant beweiſt den Satz zuerſt für den Fall, daß n gerade (Prop. IV.), und dann für den Fall, daß n ungerade iſt (Prop. V.)

Dieſe drei Sätze gelten der arithmetiſchen Progreſſion im Allgemeinen und enthalten kurz die Elementarlehren derſelben. Mit dem folgenden Satze rückt der Verfaſſer dem Ziele um einen Schritt näher, indem er nun ſpeciell diejenige Progreſſion betrachtet, deren erſtes Glied 1 iſt.

Vierter Satz. (Prop. VI.) „Wenn beliebig viele Zahlen von der Einheit an von gleichem Unterſchiede ſind, ſo iſt das achtfache Product aus der Summe aller in den beſtändigen Unterſchied, addirt zu dem Quadrate des um 2 verminderten Unterſchiedes, eine Quadratzahl, deren um 2 verminderte Wurzel gleich ſein wird dem Producte des Unterſchiedes in die um 1 verminderte doppelte Anzahl aller vorliegenden Zahlen, die Einheit mitgerechnet.“

Nennen wir wie vorher die Anzahl n, den beſtändigen Unterſchied b, die Summe aller Glieder S, ſo ſoll nach dem Satze

$$8bS+(b-2)^2=[b(2n-1)+2]^2.$$

Es iſt aber $S=[(n-1)b+2]\frac{n}{2}$; dieſes ſubſtituirt, giebt

$$\begin{aligned} 8bS &= 4bn[(n-1)b+2] \\ &= 4b^2n^2-4b^2n+8bn \end{aligned}$$

dazu $(b-2)^2=b^2-4b+4$, giebt

$$\begin{aligned} 8bS+(b-2)^2 &= 4b^2n^2-4b^2n+8bn+b^2-4b+4 \\ &= b^2(4n^2-4n+1)+4b(2n-1)+4 \\ &= [b(2n-1)+2]^2. \end{aligned}$$

Zuſatz. (Prop. VII.) Dieſer Satz hat ebenſo wie die in dem vierten Satze auf ihn verweiſenden Worte, „ὅπερ ἑξῆς δειχθήσεται,“ ganz das Ausſehen eines apokryphiſchen Einſchiebſels. Sein Inhalt iſt kein anderer, als daß er geometriſch beweiſt, daß $b^2(2n-1)^2=[b(2n-1)]^2$ iſt.

Hauptſatz.

Fünfter Satz. (Prop. VIII.) „Nach dieſen Vorderſätzen nun[1]) behaupte ich, daß, wenn mehre Zahlen von der Einheit an von gleichem Unterſchiede ſind, die Summe aller eine Polygonzahl ſei; und zwar iſt die Anzahl ihrer Winkel um zwei größer als der beſtändige Unterſchied, ihre Seite aber iſt die Anzahl der vorgelegten Zahlen, die Einheit mitgerechnet.“

Nachdem Diophant den Beweis dieſes Satzes, den ich unten mittheilen werde, gegeben hat, fährt er ſo fort:

„Es iſt alſo bewieſen, was Hypſikles in der Definition (ἐν ὅρῳ) ſagt: wenn beliebig viele Zahlen von der Einheit an von gleichem Unterſchiede ſind, und dieſer Unterſchied 1 iſt, ſo iſt die Summe eine dreieckige Zahl; iſt der Unterſchied 2, ſo iſt die Summe eine viereckige Zahl, für 3 eine fünfeckige; die Anzahl ihrer Winkel iſt um zwei größer als der Unterſchied, und ihre Seiten ſind der Anzahl der vorgelegten Zahlen gleich. Daraus folgt für die dreieckigen Zahlen, die aus dem Unterſchiede 1 hervorgehen, daß ihre Seiten die größten der vorgelegten Zahlen, und das Product aus den größten in die um 1 größere Zahl gleich der doppelten bezeichneten dreieckigen Zahl iſt.“

Dieſer Satz, mit dem vierten Hilfsſatze combinirt, führt Diophant auf folgende Definition der Polygonzahlen (οὗτος ἔσται ὅρος τῶν πολυγώνων):

„Jede Polygonzahl, achtmal vervielfältigt durch die um 2 verminderte Anzahl ihrer Winkel, und addirt zu dem Quadrate der um 4 verminderten Anzahl der Winkel, giebt eine Quadratzahl.“

Das heißt, wenn P irgend eine Polygonzahl, a die Anzahl ihrer Winkel iſt, ſo iſt der Ausdruck

1) Im Texte ſteht: Τῶν προκειμένων ὄντων, λέγομεν etc. Ich glaube nicht, daß dieſe Worte anders zu verſtehen ſeien, als daß Diophant andeuten will, daß er nun zur Hauptſache komme. „Da ſich das nun ſo verhält,“ oder wie Bachet überſetzt. „*Cum sint quae proposuimus,*“ ſind jedenfalls richtigere Überſetzungen, als die Schulz'ſche: „Unter den nämlichen Annahmen.“ Die Annahmen werden hier, wie vorher, wieder genau angegeben, ſo daß alſo eine Berufung auf die früheren nicht ſtattfindet.

$$8(a-2)P+(a-4)^2$$

immer ein Quadrat. Um alſo zu unterſuchen, ob ein gegebenes P eine Polygonzahl von der Ordnung a ſei, multiplicire man ſie mit $8(a-2)$ und addire zu dem Producte $(a-4)^2$; iſt nun P eine Polygonzahl der geſuchten Ordnung, ſo iſt dieſe Summe ein Quadrat. Inſofern nennt Diophant dieſen Satz die Definition der Polygonzahlen. Iſt nun P eine dreieckige Zahl, alſo $a=3$, ſo wird die obige Formel $8P+1$, und dieſe iſt ein Quadrat. In dieſer ſpeciellen Form hat Diophant den Satz in ſeiner Aufgabe IV, 44. bereits angewandt, auch haben wir ihn in dem Commentar des Jamblichus über Nikomachus Arithmetik vorgefunden. In der allgemeinen Form aber erſcheint er wahrſcheinlich hier zuerſt. — Es iſt indeß wohl zu beachten, daß, wie ſchon Bachet bemerkt hat, der Satz ſich nicht umkehren läßt, wenn a größer als 4 iſt; es folgt nämlich daraus, daß $8(a-2)P+(a-4)^2$ ein Quadrat iſt, nicht, daß P eine Polygonzahl von der Ordnung a iſt, ſobald a nicht 3 oder 4 iſt. Iſt z. B. $a=5$, ſo wird die Formel $24P+1$, welche für $P=2$ Quadrat wird; aber 2 iſt keine fünfeckige Zahl.

Nennen wir nun die Seite des Polygons, oder die Anzahl der addirten Glieder der arithmetiſchen Reihe n, und vergleichen die eben dargeſtellte Formel mit der des vierten Satzes, ſo iſt n in beiden gleichbedeutend, dagegen $b=a-2$, $S=P$, demnach wird

$$8(a-2)P+(a-4)^2=[(a-2)(2n-1)+2]^2$$

und dieſe Formel enthält die Bedingung, nach welcher die Polygonalzahl und ihre Seite gegenſeitig von einander abhängen; es iſt nämlich

$$P=\frac{[(a-2)(2n-1)+2]^2-(a-4)^2}{8(a-2)}$$

und umgekehrt $n=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8(a-2)P+(a-4)^2}-2}{(a-2)}+1\right]$

Die Überſetzung dieſer beiden aus dem fünften und vierten Satze unmittelbar ſich ergebenden Formeln in Worte bilden die Bachet'ſche **Propositio nona**, welche wir, wenn wir ſie ja von dem fünften oder Hauptſatze trennen wollen, höchſtens als einen Zuſatz zu dieſem betrachten können.

In dieſem Satze nun hat Diophant ſeinen in der Einleitung ausgeſprochenen Zweck erreicht. Er hat nämlich gezeigt, wie man zwei von der Winkelzahl des Polygons abhängige Zahlen finden könne, ſo daß allemal, wenn man die Polygonzahl mit einer derſel-

ben multiplicirt und das Quadrat der andern hinzu addirt, dieſe Summe ein Quadrat wird; er hat ferner gezeigt, wie man zu jeder gegebenen Seite (oder Wurzel) die zugehörige Polygonzahl irgend einer Ordnung, und umgekehrt zu einer gegebenen Polygonzahl, ihre Seite finden könne. Mehr hat er ſich nicht vorgeſetzt. Deßungeachtet folgt noch als Anhang eine

Aufgabe. **(Prop. X.)** „Wenn eine Zahl gegeben iſt, zu unterſuchen, auf wievielerlei Weiſe ſie Polygonzahl ſein könne.“

Die Asführung dieſer an und für ſich intereſſanten Aufgabe iſt in allen Manuſcripten in der Mitte abgebrochen, und es iſt aus dem Bruchſtücke, obgleich es ſchon eine bedeutende Länge erreicht hat, noch nicht zu erſehen, wo der Verfaſſer eigentlich hinaus will. Indeß ſpricht aus dem Verfahren, ſoweit es vorliegt, ganz Diophant's Manier, wie ſie ſich uns aus den vorhergehenden Sätzen offenbart, weshalb ich, obgleich ich nicht apodiktiſch entſcheiden mag, nicht geneigt bin, mit Schulz [2]) anzunehmen, dieſe Aufgabe ſei ein fremdartiger Zuſatz zu der mit **Prop. IX.** vollendeten Diophantiſchen Schrift. Es iſt wahr, dem in der Einleitung mit beſtimmten Worten angegebenen Plane zufolge könnte man das Werk mit **Prop. IX.** als vollkommen abgeſchloſſen betrachten. Bedenken wir aber auch Folgendes, was vielleicht die Annahme der Echtheit dieſer Aufgabe zu rechtfertigen im Stande iſt. In dem fünften Satze **(Prop. VIII.)** hat Diophant als Merkmal (ὅρος) einer Polygonzahl angegeben, daß der Ausdruck $8(a-2)P+(a-4)^2$ ein Quadrat werde. Die Anwendung dieſer Formel konnte und mußte leicht auf die Bemerkung führen, daß es für ein gegebenes P ſehr häufig mehre Werthe für a gebe, welche den Ausdruck zu einem Quadrate machen, mit andern Worten, daß dieſelbe Zahl P verſchiedenen Ordnungen von Polygonalzahlen angehören könne. So iſt, um nur einige nahe liegende Beiſpiele anzuführen, die Zahl 36 zugleich dreieckige, viereckige und dreizehneckige, und auch ſechsunddreißigeckige Zahl; 225 iſt vier-, acht-, vierundzwanzig-, ſechsundſiebzig- und zweihun-

2) Anm. S. 619. „Daß dieſer Satz ein Bruchſtück iſt, hindert nicht, das Ganze dennoch als geſchloſſen zu betrachten. So wie der Verfaſſer ſeinen Plan gleich in dem erſten Satze beſtimmt angegeben hat, ſo iſt er mit dem achten und neunten ausgeführt; das hier gegebene Bruchſtück hat alſo ganz das Anſehen eines fremdartigen Zuſatzes, der ohne Beeinträchtigung des Ganzen weggelaſſen werden kann.“

Digitized by Google

dertfünfundzwanzigeckige Zahl; 540 iſt Polygonalzahl von 7, 10, 21, 181 und 540 Seiten, 561 von 3, 6, 12, 39, 188 und 561 Seiten; 616 von 7, 13, 31, 104 und 616 Seiten; und ſo unzählige andere. Es ſcheint alſo ziemlich natürlich, daß der Verfaſſer, nachdem er die Vieldeutigkeit ſeiner Formel oder vielmehr ſeiner Regel erkannt hatte, der dem urſprünglichen Plane zufolge bereits abgeſchloſſenen Abhandlung nun noch die Aufgabe hinzufügte, wie man dieſe Vieldeutigkeit der Regel löſen und anwenden könne. Auch iſt es ja bei andern alten und neuern mathematiſchen Werken nichts Ungewöhnliches, daß dem abgeſchloſſenen Syſtem von Lehrſätzen ein Anhang von Aufgaben, die den Gegenſtand betreffen, hinzugefügt wird. Es iſt alſo wohl daraus, daß dieſe Aufgabe nicht ebenſo wie der Inhalt des vorhergehenden Lehrſatzes in der Einleitung angekündigt wird, nicht mit allzu großer Gewißheit deren Unechtheit zu ſchließen. Wie Diophant die Aufgabe gelöſt habe, läßt ſich, wie geſagt, aus dem Bruchſtücke nicht entnehmen; wenigſtens iſt mir es nicht gelungen, in dem Vorhandenen einen ſichern Fingerzeig auf das verloren gegangene Ziel des Weges zu entdecken. Bachet hat in ſeiner Zugabe zu dieſer Schrift die Aufgabe mit Hilfe des Satzes von Nikomachus gelöſt, daß nämlich jede Polygonzahl von a Seiten die Summe von $a-2$ dreieckigen Zahlen iſt, deren eine dieſelbe Seite hat, wie das Polygon, die übrigen aber die um 1 kleinere Seite [3]).

---

3) **Appendicis ad Librum de Numeris Polygonis Lib. I. Prop. 19.** ***Proposito quolibet numero, investigare quot modis polygonus dici possit.*** Bezeichnen wir eine Polygonzahl, deren Seite n und deren Winkelanzahl a iſt, mit $n^{(a)}$, ſo iſt nach Nikomachus II, 12.

$$n^{(a)} = n^{(3)} + (a-3)(n-1)^{(3)}$$

Dividiren wir nun durch die dreieckige Zahl $(n-1)^{(3)}$, ſo wird

$$\frac{n^{(a)}}{(n-1)^{(3)}} = a-3+\frac{n^{(3)}}{(n-1)^{(3)}}$$

$$= a-2+\frac{n^{(3)}-(n-1)^{(3)}}{(n-1)^{(3)}}$$

$$= a-2+\frac{n}{(n-1)^{(3)}}.$$

Hierauf gründet ſich die Regel Bachet's: Man dividire die gegebene Zahl durch

Übrigens erhellt aus dieſer Darlegung des Inhalts, daß Diophant keineswegs die Abſicht hatte, eine vollſtändige Theorie der Polygonzahlen zu ſchreiben, ſondern daß er vielmehr nur bezweckte, *eine* Eigenſchaft derſelben allgemein wiſſenſchaftlich zu beweiſen. Denn wenn wir auch die abgebrochene Aufgabe **Prop. X.** als noch zur Sache gehörend anerkennen, ſo verbietet doch jedenfalls die Faſſung der Einleitung die Annahme, daß hinter dieſer Aufgabe vielleicht noch bedeutende theoretiſche Zuſätze und Erweiterungen des abgehandelten Stoffes gefolgt ſeien.

Nach dieſer Recognoſcirung des Stoffes wollen wir unſer Augenmerk auf die Art der Behandlung deſſelben werfen. Was zunächſt das Mittel der Operationen anlangt, ſo finden wir hier die in Euklid's arithmetiſchen Büchern begründete Methode der linearen Arithmetik wieder, welche darin beſteht, daß allgemeine Zahlenausdrücke, als deren Symbole wir die Buchſtaben verwenden, durch Linien veranſchaulicht werden. Ich habe über dieſe Methode oben ſchon einmal geſprochen. Sie iſt nicht eigentlich als eine geometriſche Operation, als eine Operation mit räumlichen Größen zu betrachten, ſondern als eine Veranſchaulichung des unſichtbaren Begriffs der Zahl in Geſtalt einer Linie. Es iſt darum nicht ganz genau, wenn *Schulz* in ſeiner Anmerkung zu dem erſten Satze (**Prop. II.**) ſagt: „*Bemerkenswerth iſt hier und bei den folgenden Sätzen die unmittelbare Anwendung der von Theilung der Linien geltenden Sätze und geometriſcher Conſtructionen auf Zahlen, worin Diophantus, deſſen Theorie der Polygonzahlen ſich übrigens an die Bücher 7. 8. 9. der Elemente des Euklides anſchließt, von der*

---

alle vorhergehenden dreieckigen Zahlen; ſo oft nun dieſe Diviſion einen Reſt läßt, der um 1 größer iſt als die Wurzel der dreieckigen Zahl, ſo iſt die gegebene Zahl eine Polygonzahl, deren Seite der Reſt und deren Winkelanzahl der um 2 vermehrte Quotient iſt. Vorher aber hat man zu unterſuchen, ob die gegebene Zahl ſelbſt dreieckige Zahl iſt. Läßt die Diviſion $\frac{n^{(a)}}{(n-1)^{(3)}}$ keinen Reſt, ſo hat man den Quotienten um 1 zu klein zu nehmen und zu verſuchen, ob der Diviſor als Reſt betrachtet der Aufgabe genügt. Das geſchieht z. B. immer, wenn die gegebene Zahl ein Vielfaches von 3 iſt. Denn drei iſt die dreieckige Zahl von der Seitr 2, alſo der Reſt 3 um 1 größer als dieſe Seite; demnach iſt $3p$ immer ein $(p+1)$Eck von der Seite 3, z. B. 21 ein Achteck.

ſtrengen Methode des Letzteren abweicht.“ Es ſind nicht geometriſche Conſtructionen im ſtrengen Sinne des Worts, durch welche Diophant ſeine Zahlenſätze beweiſt und die er auf Zahlen anwendet und deren Reſultate er rückwärts auf Zahlen überträgt, ſondern es ſind wirkliche Zahlenoperationen, in denen nur die Zahlen durch Linien dem Auge dargeſtellt werden. Was aber namentlich die im zweiten Buche der Elemente ausgeſprochenen geometriſchen Sätze über die Theilung der Linien betrifft, ſo iſt mit Sicherheit anzunehmen, daß deren Übertragung auf die Arithmetik längſt ſtattgefunden hatte, und wir haben oben geſehen, daß Diophant bei der Auflöſung ſeiner Aufgaben nicht nur Sätze, wie $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ und ähnliche, ſondern auch die bei Euklides ſich nicht vorfindende Formel $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ als reine Zahlenſätze gekannt und als bekannt vorausgeſetzt hat. Wie ſehr ſich ſein Verfahren von einer rein geometriſchen Conſtruction unterſcheidet, wird am beſten aus einem Beiſpiel einleuchten. Wählen wir dazu gleich den erſten Satz:

Wenn drei Zahlen von gleichem Unterſchiede ſind, ſo iſt das achtfache Product der beiden größern, addirt zu dem Quadrate der kleinſten, ein Quadrat, deſſen Wurzel iſt die Summe der größten und der doppelten mittlern.

„Drei Zahlen AB, BG, BD haben gleichen Unterſchied, ſo iſt zu zeigen, daß das achtfache Product von AB in BG, addirt zu dem Quadrate von BD ein Quadrat giebt, deſſen Wurzel gleich iſt der Summe von AB und $2BG$. Da nun AB gleich iſt $BG + GD$, ſo iſt $8AB \cdot BG$ gleich dem achtfachen Quadrat von BG und dem achtfachen Product von BG in GD. Es iſt alſo auch das vierfache Product von AB in BG gleich dem vierfachen Quadrat von BG und dem vierfachen Product von BG in GD. Aber das vierfache Product von BG in GD nebſt dem Quadrate von BD iſt gleich dem Quadrate von AB. — [Nach Eukl. II, 8.; aber auch in den Aufgaben wendet Diophant ſehr oft den Satz $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$ an.] — Es iſt alſo zu unterſuchen, wie das Quadrat von AB nebſt dem vierfachen Producte von AB in BG und dem vierfachen Quadrate von BG ein

Quadrat gebe. Wenn wir AE gleich BG ſetzen, ſo verwandeln wir das vierfache Product von AB in BG, in das vierfache Product von BA in AE. Dieſes zugeſetzt zu dem vierfachen Quadrate von GB, das iſt, AE, giebt das vierfache Product von BE in EA, und dazu addirt das Quadrat von AB, giebt zur Summe das Quadrat von BE und EA als einer einzigen Linie. Aber BE und EA zuſammen genommen ſind gleich AB und $2AE$ oder $2BG$, und das ſollte gezeigt werden."

Um das Verfahren mehr zu veranſchaulichen, will ich es ſo darſtellen. Es ſoll bewieſen werden, daß

$$8AB\cdot BG+BD^2=[AB+2BG]^2$$

Nun iſt nach der Vorausſetzung $AB-BG=BG-BD=DG$, alſo $AB=BG+GD$, folglich

$$8AB\cdot BG=8BG^2+8BG\cdot GD$$

alſo auch $4AB\cdot BG=4BG^2+4BG\cdot GD$

addirt man nun (was Diophant nicht ausgedrückt hat) auf beiden Seiten $4AB\cdot BG+BD^2$, ſo wird

$$8AB.BG+BD^2=4AB\cdot BG+4BG^2+4BG\cdot GD+BD^2$$

Aber $4BG\cdot GD+BD^2=(BG+GD)^2=AB^2$

daher $8AB\cdot BG+BD^2=AB^2+4AB\cdot BG+4BG^2$

Läßt ſich nun beweiſen, daß die rechte Seite dieſer Gleichung ein Quadrat iſt, ſo wird auch die linke ein Quadrat ſein. In dieſer Formel iſt es nun zwar ganz augenſcheinlich, daß die Seite rechts das Quadrat von $AB+2BG$ iſt. Diophant aber fährt ſo fort, daß er $AE=BG$ macht, ſo wird

$$4AB\cdot BG=4AB\cdot AE$$

$$4BG^2=4AE$$

alſo $4AB\cdot BG+4BG^2=4\cdot AE(AB+AE)$

$$=4AE\cdot EB$$

und dazu noch AB^2 addirt giebt

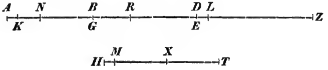
$$8AB\cdot BG+BD^2=4AE\cdot EB+AB^2$$

aber AB iſt $=BE-EA$, folglich nach demſelben Satze, der oben ſchon angewandt ward, $4AE\cdot EB+AB^2=(AE+EB)^2$. Aber $AE+EB$ iſt $=AB+2AE=AB+2BG$, alſo iſt der Satz bewieſen.

Da der Hauptſatz ſich ganz auf den vierten Hilfsſatz ſtützt,

Digitized by Google

ſo möge auch die etwas verwickeltere Ableitung deſſelben hier einen Platz finden.



Seien von der Einheit an (dieſe nicht mitgezählt) die Zahlen AB, GD, EZ von gleichem Unterſchiede, und HT die Anzahl aller dieſer Zahlen nebſt der Einheit, ſo ſagt der Satz, wenn wir die Summe der Zahlen 1, AB, GD, $EZ = S$ ſetzen,

$$8S(AB-1)+(AB-3)^2=[(AB-1)(2HT-1)+2]^2$$

Da nach dem zweiten Satze $EZ-1=(AB-1)(HT-1)$ iſt, ſo ſei $AK=DL=HM=1$; dann iſt alſo $LZ=KB\cdot MT$. Sei ferner $KN=2$ (ſo daß $NB=AB-3$ wird), ſo ſuchen wir zu beweiſen, daß

$$8S\cdot KB+NB^2=[KB\cdot(HT+TM)+2]^2.$$

Nun iſt $S=\frac{1}{2}(ZE+EL)TH$ (das iſt $(ZE+1)HT$, nach Satz 3.), aber $ZE+EL=ZL+2EL$, alſo

$S=\frac{1}{2}ZL\cdot TH+EL\cdot TH$, alſo auch, da $LZ=KB\cdot MG$,

$S=\frac{1}{2}KB\cdot MT\cdot TH+EL\cdot TH.$

Halbiren wir MT in X, ſo wird

$S=KB\cdot TH\cdot TX+TH$ (weil $EL=1$ iſt) ſein.

Wir müſſen alſo ſuchen, ob $KB\cdot TH\cdot TX+TH$, wenn man es mit $8KB$ multiplicirt und NB^2 dazu addirt, ein Quadrat werde. Es giebt aber

$$8KB^2\cdot TH\cdot TX+8KB\cdot TH+NB^2$$

oder $4KB^2\cdot TH\cdot TM+8KB\cdot TH+NB^2$

Von dieſem Ausdrucke iſt alſo zu zeigen, daß er ein Quadrat iſt. Aber $8KB\cdot TH$ iſt gleich $4KB\cdot HM+4KB(HT+TM)$ (weil $2TH=MH+(TH+TM)$ iſt); daher haben wir zu unterſuchen, ob

$$4KB^2\cdot HT\cdot TM+4KB\cdot HM+4KB(HT+TM)+NB^2$$

ein Quadrat werde. Aber $4KB\cdot HM$ iſt $=2KB\cdot KN$ (weil $HM=1$, $KN=2$ iſt) und dieſes addirt zu NB^2 iſt $=KB^2+KN^2$ (Eukl. II, 4.). Darum haben wir zu unterſuchen, ob auch

$$4KB^2\cdot HT\cdot TM+4KB(HT+TM)+KB^2+KN^2$$

Digitized by Google

ein Quadrat werde. Ferner aber läßt ſich KB^2 verwandeln in $KB^2 \cdot HM^2$ (weil $HM = 1$ iſt), und dieſes addirt zu $4KB^2 \cdot HT \cdot TM$ iſt gleich $KB^2(HT+TM)^2$. Es iſt alſo zu unterſuchen, ob

$$KB^2(HT+TM)^2+4KB(HT+TM)+KN^2$$

ein Quadrat wird. Wenn wir nun $KB(HT+TM)$ gleich der Zahl NR ſetzen, ſo wird auch $KB^2(HT+TM)^2=NR^2$ ſein, wie in dem folgenden Satze gezeigt werden wird (ὅπερ ἑξῆς δειχθήσεται ſ. o.). Es iſt alſo zu unterſuchen, ob

$$NR^2+KN^2+4NR$$

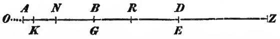
ein Quadrat ſei. Aber $4NR$ iſt $=2NR \cdot NK$, weil $NK=2$ geſetzt iſt. Es fragt ſich daher, ob

$$NR^2+KN^2+2NR \cdot KN$$

ein Quadrat ſei. Es iſt dieſes aber das Quadrat von KR, deſſen Seite KR, wenn man 2 (oder KN) davon abzieht, eine Zahl NR giebt, welche das Product aus dem beſtändigen Unterſchiede KB in die Summe $HT+TM$ iſt, und dieſe Summe iſt, wenn man 1, nämlich HM, dazu addirt, die doppelte Anzahl aller angenommenen Zahlen.

Dieſer ſehr elegante und theilweiſe überraſchende Beweis zeigt wohl ganz klar, daß, wenn auch aus Mangel an Rechnungsſymbolen von dem Verfaſſer räumliche Anſchauungen zu Hilfe genommen werden, hier doch von geometriſcher Conſtruction nicht eigentlich die Rede ſein kann; einer ſolchen Annahme widerſpricht nicht nur der Geiſt, in welchem die ganze Deduction des Satzes gehalten iſt, ſondern auch formel die vorkommenden Producte aus vier Dimenſionen. Von Geometrie findet ſich auch hier weiter nichts, als die Anwendung der Sätze aus Euklid's zweitem Buche, welche aber, ich wiederhole es, ſchon längſt auf die Arithmetik übertragen waren.

Ganz eigenthümlich iſt der Gang, den Diophant in dem Beweiſe ſeines Hauptſatzes nimmt, den ich deshalb vollſtändig mittheilen will. Das Schema iſt, wie in dem vorigen Satze



„Wir haben nämlich gezeigt, daß die Summe aller vorliegenden Zahlen mit $8KB$ multiplicirt und zu NB^2 addirt, gleich dem Quadrate von KR iſt. Setzen wir nun AO auch gleich der Ein-

Digitized by Google

heit, ſo iſt $KO=2$; es iſt aber auch $KN=2$, daher haben die drei Zahlen BO, BK, BN gleichen Unterſchied. Daher iſt (nach dem erſten Satze) das achtfache Product der beiden größern, OB, BK nebſt dem Quadrate der kleinſten, BN, gleich einem Quadrate, deſſen Wurzel iſt die Summe der größten und der doppelten mittlern Zahl, das heißt, es iſt

$$8OB\cdot BK+BN^2=[OB+2BK]^2$$

Wenn man aber von der Seite dieſes Quadrats, $OB+2BK$, 2 wegnimmt, nämlich OK, ſo bleibt $3BK$ übrig, das iſt das Product von BK in 3; 3 aber iſt um 1 kleiner als das Doppelte von 2 (der beſtändigen Differenz der drei Zahlen BO, BK, BN). Da alſo die Summe aller Zahlen, die Einheit mitgerechnet, demſelben Geſetze unterliegt, welchem die Zahl OB (ἐπεὶ οὖν ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων σὺν τῇ μονάδι τὸ αὐτὸ πρόβλημα ποιεῖ τῷ $\overline{οβ}$), die Zahl OB aber beliebig und allemal eine Polygonzahl iſt, und zwar die erſte nach der Einheit (weil AO die Einheit iſt, die zweite Zahl aber AB iſt), und ihre Seite 2 iſt; ſo iſt auch die Summe aller eine der OB gleichnamige Polygonzahl; und zwar iſt die Anzahl der Winkel um $OK=2$ größer als der beſtändige Unterſchied KB, und ihre Seite iſt HT, das iſt, die Anzahl der vorliegenden Zahlen ſammt der Einheit. Es iſt alſo bewieſen, was Hypſikles in der Definition ſagt, u. ſ. w."

Der Schluß, den Diophant hier macht, iſt alſo, nach unſerer Weiſe dargeſtellt, folgender. Wenn man eine von 1 anfangende arithmetiſche Progreſſion hat,

$$1,\ b+1,\ 2b+1,\ 3b+1\ \ldots\ldots\ (n-1)b+1,$$

deren Summe wir S nennen wollen, ſo iſt in dem vierten Satze bewieſen worden, daß

$$8Sb+(b-2)^2=[b(2n-1)+2]^2$$

iſt. Nimmt man nun die drei Zahlen $b+2$, b, $b-2$, welche auch eine arithmetiſche Progreſſion bilden, deren Differenz 2 iſt, ſo iſt nach dem erſten Satze

$$8b(b+2)+(b-2)^2=[(b+2)+2b]^2$$
$$=[3b+2]^2$$

Nun iſt $b+2$ die Summe der beiden erſten Glieder der Reihe 1, $b+1$ u. ſ. w.; ſeine Stellenzahl iſt 2, alſo entſpricht 3, in der Wurzel des Quadrats der Coefficient von b, dem Ausdruck $2n-1$. Folglich gehören die Zahlen S und $b+2$ demſelben Geſetze an.

Da nun $b+2$ eine Polygonalzahl von der Winkelzahl $b+2$ iſt, ſo iſt auch S eine Polygonalzahl von der Winkelzahl $b+2$; das heißt, die Summe irgend einer arithmetiſchen Reihe, die von 1 anfängt, iſt eine Polygonzahl, deren Winkelanzahl um 2 größer iſt als die beſtändige Differenz der Reihe.

Es ſoll mich freuen, wenn es mir gelungen iſt, zu zeigen, wie auch in dieſer Gattung des arithmetiſchen Vortrages Diophant ſeinen ganz eigenthümlichen Weg geht und wie er nicht bloß in der numeriſchen Auflöſung der unbeſtimmten Aufgaben, ſondern auch in der Behandlung ſolcher allgemeinen Zahlenlehren alle ſeine uns bekannten Vorgänger bedeutend überragt. Zugleich nehmen wir auf eine geraume Zeit von dieſem Schriftſteller Abſchied. Wir haben jetzt gezeigt, was er an und für ſich geleiſtet hat, und ſo viel es ſich thun ließ, was aber leider nur ſehr unvollkommen geſchehen konnte, nachgewieſen, in welchem Zuſammenhange das von ihm Geleiſtete zu ſeiner Vergangenheit ſteht. Künftig werden wir noch einmal auf ihn zurückkommen, um zu ſehen, wie er auf die geiſtige Richtung der Folgezeit eingewirkt hat, was, wie wir ſchon oben berührt haben, in Europa erſt ſehr ſpät, erſt gegen das Ende des ſechzehnten Jahrhunderts zu geſchehen anfing.

Digitized by Google

Zwölftes Kapitel.

Die arithmetiſchen Epigramme der Griechen.

In Diophantus hat ſich die Algebra der Griechen zuerſt in einem klaren Selbſtbewußtſein entwickelt, und zugleich hat die ganze Größe der Kunſt ſich in dieſem einzelnen Geiſte concentrirt, ſo daß das, was wir außerhalb Diophant von Algebra finden, nur ſehr ſpärlich verſtreute Brocken ſind. Wir haben oben von den erſten Spuren algebraiſcher Vorſtellungen, die ſich bei den ältern Arithmetikern finden, geſprochen. Nicht viel bedeutender ſind die wenigen Anklänge an dieſe Kunſt, die wir nach Diophant wahrnehmen. Es iſt bis jetzt kein mathematiſcher Schriftſteller der Griechen auch nur dem Namen nach bekannt geworden, der die Fortbildung oder Anwendung der Diophantiſchen Lehre ſich hätte angelegen ſein laſſen. Dagegen hat die Poeſie mit ihren Schwingen das Gebiet dieſer Wiſſenſchaft mehrmals berührt. Es befindet ſich nämlich in der unter dem Namen der Anthologie bekannten Sammlung kleinerer Griechiſchen Gedichte, von Konſtantin Krephalas und Maximus Planudes zuſammengetragen, eine Anzahl ſogenannter Epigramme, welche algebraiſche Aufgaben in das Gewand irgend einer hiſtoriſchen oder zierlich geſtellten Räthſelfrage kleiden. Als ein Beiſpiel der Art haben wir ſchon die letzte (33ſte) Aufgabe des fünften Buchs bei Diophantus kennen gelernt, deren Überſetzung und Auflöſung ich oben mitgetheilt habe. Vielleicht daß ſolche verſificirte arithmetiſche Räthſel zu Diophant's Zeit bereits in der Mode waren, und er ein ſolches nachbildete oder veränderte, um es ſeiner Methode der unbeſtimmten Analytik anzupaſſen. Denn ich bin nicht geneigt, der von Bachet aufgeſtellten Vermuthung beizutreten, daß Diophant nur zu einem vorgefundenen Epigramme die Auflöſung gegeben habe, da die Auflöſung dieſes Räthſels der ganzen Gewandtheit dieſes Meiſters bedarf und ſich ſo genau ſeinen eigenthümlichen Kunſtgrif-

Digitized by Google

ſen anpaßt, daß es ſicher nur eben ſeiner Auflöſung zu gute aufgeſtellt iſt; auch finden wir in der ganzen übrigen Sammlung dieſer arithmetiſchen Epigramme kein einziges, welches ſich über die Gleichungen des erſten Grades erhübe, und nur eine ſcheinbare Ausnahme werden wir unten kennen lernen. Bei Gelegenheit dieſer Diophantiſchen Aufgabe, welche, beiläufig geſagt, das erſte war, was von Diophant's Werk im Original erſchienen iſt, indem Vieta ſie am Ende ſeiner Zetetika bereits Griechiſch mittheilte, hat Bachet in ſeinen Commentar fünfundvierzig ſolcher arithmetiſcher Epigramme aus dem damals noch ungedruckten Palatiniſchen (Heidelberger) Codex der Griechiſchen Anthologie eingerückt [1]), welche von da in Heilbronners Geſchichte der Mathematik übergegangen ſind und ſich in den neuern Ausgaben der Anthologie von Brunck und Jacobs zum Theil verbeſſert wiederfinden. Erne Auswahl aus denſelben hat endlich Schulz in metriſcher Überſetzung als Anhang zum fünften Buche ſeines Diophantus gegeben.

Bachet giebt nur ganz unbeſtimmt Metrodorus als den Verfaſſer des größten Theils dieſer Gedichte an, indem er an dem angeführten Orte ſagt: **Unum est quod moneam, maximum horum epigrammatum partem Metrodoro tribui, quibusdam vero alia nomina esse praefixa, quaedam denique incertos habere authores.** Die erſten vierundzwanzig finden ſich bei Brunck [2]) ebenfalls unter der unbeſtimmten Überſchrift: Προβλήματα ἀριθμητικὰ Μητροδώρου τὰ πλεῖστα; dagegen giebt er Bachet's fünfundvierzigſtes Epigramm unter Euklide's Namen [3]). Die Ausgabe von Jacobs bezeichnet beſtimmter die Epigramme 10—40 als dem Metrodorus angehörig; Bachet's erſtes ſchreibt ſie einem gewiſſen Sokrates zu, ob dem berühmten Philoſophen, mag da-

---

1) p. 349.: Quoniam vero argutum epigramma, incertum an ab ipso confictum, vel ab alio quopiam mutuatum, nobis exhibuit Diophantus, placet hoc loco elegantissima aliquot epigrammata proferre, non injucundas quaestiones de rebus arithmeticis continentia, quae nondum edita fuerunt, quaeque pridem e codice probatissimo Palatino excerpta tradidit nobis vir eruditissimus Claudius Salmasius etc. — Indeß ſind die fünf letzten ſchon vor Bachet in den ältern Ausgaben der Anthologie gedruckt worden. S. Leſſing, Zur Geſchichte der Literatur Th. I. S. 421.

2) Analecta vet. poet. Graec. T. II. p. 477 sqq.

3) Ibid. T. I. p. 168.

hingeſtellt bleiben; die übrigen, bei Bachet 2—9 und 41—44, führen die Überſchrift ἀδέσποτα, herrenloſe, anonyme[4]. Außerdem giebt Jacobs aber unter Metrodorus Namen noch eines, welches ich, da es in den übrigen Ausgaben dieſer Räthſel fehlt, hier Deutſch mittheilen will, obgleich es durch Zierlichkeit der Einkleidung ſich eben nicht auszeichnet.

Siehe, Sonne und Mond und des ewig kreiſenden Himmels
Schweifende Pilger vertheilten dem Manne alſo das Leben.
Bei der geliebten Mutter ein Sechſtel der Jahre verweilen
Hilflos ſoll er; ein Achtel darauf mit mancherlei Sorgen
Kämpfen; die heimiſche Ruh, und Weib und Kind, die geliebten,
Gönnen die Götter ihm nur in einem Drittel des Lebens.
Dann unter Scythiſchem Schwerdt ſiehſt du die Gattin, den Knaben
Fallen; beweinend die Theuren mit bittern Thränen, gelangſt nach
Siebenundzwanzig Jahren du an die Grenze des Lebens.

Scheinbar arithmetiſch iſt noch ein anonymes Monoſtichon, bei Jacobs a. a. O. Nr. 8., bei Brunck Bd. 3. S. 334., welches ſo lautet:

Ἕξ, ἕν, πέντε, δύο, τρία, τέσσαρα κῦβος ἐλαύνει,

wo der Gebrauch des Worts κῦβος (—υ) ſtatt κύβος (υυ) auffallend iſt. Schwerlich iſt wohl gemeint, daß $(6+1)(5+2)(3+4)$ ein Kubus iſt, ſondern es iſt hier wahrſcheinlich an den Spielwürfel zu denken, welcher die Zahlen eins bis ſechs zeigt.

Übrigens iſt kaum nöthig zu bemerken, daß die Namenangaben in der Anthologie von wenig Auctorität ſind. Zumal trägt es augenſcheinlich den Stempel der Fiction zur Schau, wenn dergleichen poetiſch=mathematiſche Spielereien einem oder dem andern der alten berühmten Mathematiker zugeſchrieben werden. Sicher gehören alle dieſe Räthſel einem viel ſpätern Zeitalter und einem ſpätern Geſchmacke an, und Euklides hat an Bachet's letztem Epigramme gewiß ebenſowenig Antheil als Archimedes an einem andern, welches wir zum Beſchluſſe dieſes Kapitels betrachten werden.

Da alle dieſe Aufgaben einander ſehr ähnlich ſind, ſo wäre es hier an ganz unrechtem Orte, eine große Anzahl derſelben mitzutheilen. Die meiſten führen auf eine Gleichung von der Form

---

4) Anthologia Graeca T. II. p. 547 sqq. p. 579 sqq. p. 763. Dieſe und ähnliche Räthſelſpiele hat Jacobs im Abſchnitt XIV. unter der Überſchrift: Προβλήματα ἀριθμητικὰ, αἰνίγματα, χρησμοί zuſammengeſtellt.

$$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\cdots\right)x+a=x$$

und nur wenige ſind darunter, die eine andere Geſtalt haben, wie etwa folgende, bei Bachet die achte:

Sechs Pfund ſchwer, ſechs Schalen von Gold verehrete Kröſus,
Aber ein einziges Loth ſteckte in jeglicher mehr.

(Überſ. v. Schulz.)

Auch findet ſich darunter ſchon in verſchiedenen Einkleidungen die berühmte Aufgabe von dem Gefäße, welches durch mehre Röhren gefüllt wird; z. B. Nr. 23. (Bachet).

Von vier Röhren füllet das Becken die erſte in einem
Tage, die zweite in zwei, die dritte in dreien, die vierte
Braucht vier Tage; wieviel Zeit brauchen ſie alle zuſammen?

Ebenſo berühmt iſt die Art der Aufgaben geworden, in welchen verlangt wird, durch gegenſeitiges Abgeben an einander ein gewiſſes Verhältniß herzuſtellen. Dieſer Art iſt unter andern das vorgeblich Euklidiſche Problem Nr. 45.

Eſel und Maulthier ſchritten einher beladen mit Säcken.
Unter dem Drucke der Laſt ſchwer ſtöhnt' und ſeufzte der Eſel.
Jenes bemerkt es und ſprach zu dem kummerbeladnen Gefährten:
„Älterchen, ſprich, was weinſt du und jammerſt ſchier wie ein Mägdlein?
„Doppelt ſoviel als du grad' trüg' ich, gäbſt du ein Maaß mir;
„Nämſt du mir eines, ſo trügen wir dann erſt beide daſſelbe."
Geometer, du kundiger, ſprich, wieviel ſie getragen.

Zum Beſchluſſe gebe ich nun noch die Überſetzung des oben S. 255. Griechiſch mitgetheilten Epigramms [5]), in welchem Metrodorus das Lebensalter Diophant's beſtimmt.

Hier dies Grabmal deckt Diophantus. Schauet das Wunder!
Durch des Entſchlafenen Kunſt lehret ſein Alter der Stein.
Knabe zu ſein gewährte ihm Gott ein Sechſtel des Lebens;
Noch ein Zwölftel dazu, ſproßt' auf der Wange der Bart;
Dazu ein Siebentel noch, da ſchloß er das Bündniß der Ehe,
Nach fünf Jahren entſprang aus der Verbindung ein Sohn.
Wehe das Kind, das vielgeliebte, die Hälfte der Jahre
Hatt' es des Vaters erreicht, als es dem Schickſal erlag.
Drauf vier Jahre hindurch durch der Größen Betrachtung den Kummer
Von ſich ſcheuchend auch er kam an das irdiſche Ziel.

Die

5) S. Jacobs XIV. 126. Brunck T. II. p. 483. T. III. p. 229. Bachet Nr. 19.

Digitized by Google

Die äußere Einkleidung dieſer Aufgabe iſt wegen der hineingelegten Beziehung des Inhalts zur Auflöſung jedenfalls geiſtreich zu nennen, wenn auch nicht eben Diophantiſche Kunſt erfordert wird, um aus dieſen Angaben die Lebensjahre des großen Arithmetikers zu berechnen. Soviel iſt aber wohl gewiß, daß hier von dem berühmten und von keinem andern Diophant die Rede iſt.

Sind nun dieſe Angaben, welche alle ohne Ausnahme den Gleichungen des erſten Grades angehören und ſich ſehr füglich auch ohne Algebra löſen laſſen, ſchon eben darum nicht von großer Bedeutung, ſo wird ihr Werth für die Geſchichte der Wiſſenſchaft dadurch noch geringer, daß uns bei keiner einzigen die Art, wie man ſie gelöſt hat, mitgetheilt wird. Das bloße Aufſtellen eines Problems kann aber niemals als Maaßſtab für den wiſſenſchaftlichen Standpunct Deſſen, der es ſtellte, gebraucht werden, da es ſehr wohl möglich iſt, daß Jemand eine Aufgabe ſtellt, die er ſelbſt nicht aufzulöſen vermag, wovon uns ſogleich ein hiſtoriſches Beiſpiel völlig überzeugen wird.

Es hat nämlich Leſſing die Anzahl der arithmetiſchen Epigramme der Anthologie um eines vermehrt, welches er im Jahre 1773 aus einem Wolfenbütteler Codex bekannt machte[6]), und das ſich in vielfacher Hinſicht von den übrigen unterſcheidet, beſonders aber in kritiſcher Beziehung unſere Aufmerkſamkeit in Anſpruch nimmt. Leſſing war ſelbſt nicht genug Mathematiker, um die in der That ſchwierige Aufgabe von dieſer Seite beurtheilen und behandeln zu können; er theilt daher an dem angeführten Orte die Auflöſung eines Andern, Chr. Leiſte, mit, leider aber mit vielen Druckfehlern, welche bei den ſehr großen Zahlenreſultaten höchſt unangenehm ſind. Späterhin iſt daſſelbe Gedicht noch einmal Gegenſtand einer beſondern kleinen Abhandlung geworden, welche den Titel führt: „Altes griechiſches Epigramm, mathematiſchen Inhalts, von Leſſing erſt einmal zum Drucke befördert, jetzt neu abgedruckt und mathematiſch und kritiſch behandelt von Dr. J. Struve und Dr. K. L. Struve, Vater und Sohn. Altona 1821. 8vo.“ Der Antheil des Letztern beſchränkt ſich auf die Reviſion des Textes, der allerdings in Leſſings Ausgabe nicht ganz rein iſt; der Erſtere dagegen hat die mathematiſche Auflöſung des Problems gegeben,

6) Zur Geſchichte der Literatur Bd. I. S. 421—446.

die ſich übrigens von der achtundvierzig Jahre früher von Leiſte mitgetheilten faſt nur durch größere Ausführlichkeit, welche häufig in eine jenem Schriftſteller eigne unangenehme Weitſchweifigkeit ausartet, unterſcheidet; denn auf ſechsunddreißig Seiten führt Struve die Sache nicht um einen weſentlichen Schritt weiter als Leiſte auf acht Seiten gethan hatte.

Die Überſchrift bemüht ſich, das Gedicht in Archimedes und Eratoſthenes Zeitalter hinaufzurücken, ohne es geradezu dem erſtgenannten Mathematiker als Verfaſſer zuzuſchreiben; ſie lautet nämlich:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ
ὅπερ ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν
τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν,
ἐν τῇ πρὸς ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ τὸν ΚΥΡΗΝΑΙΟΝ
ἐπιστολῇ.

„Ein Problem, welches Archimedes unter andern Epigrammen aufgefunden hatte und welches er den in Alexandria mit dergleichen ſich beſchäftigenden Gelehrten zur Auflöſung zuſchickte, in einem an Eratoſthenes von Kyrene gerichteten Briefe.“

Mit Recht ſprechen ſowohl Struve, als auch ſchon vor ihm Klügel[7]) dem Räthſel dieſes hohe Alter durchaus ab; denn in der That, die ganze Art und Weiſe, in der es vorgetragen wird, ſowie auch die Sprache verrathen zu deutlich eine ſehr viel ſpätere Abfaſſungszeit, wenn auch nicht gerade, wie Klügel glaubt, aus dem Inhalte und der Auflöſung geſchloſſen werden kann, daß der Verfaſſer bereits die dekadiſche Arithmetik, das heißt, unſer jetziges Zahlenſyſtem gekannt habe; denn der Verfaſſer hat, wie wir unten ſehen werden, ſein Problem nicht aufgelöſt, woher aus der Schwierigkeit des Problems durchaus kein Schluß auf des Verfaſſers Kenntniſſe gezogen werden kann.

Bevor ich dieſen Punct aber näher erörtere, folge hier zunächſt das Gedicht ſelbſt in einer metriſchen Überſetzung, deren Holprigkeit man theils mit der völlig unpoetiſchen Beſchaffenheit des Gegenſtandes, theils damit entſchuldigen möge, daß das Original in der That nicht viel fließender klingt.

---

7) Mathem. Wörterbuch Th. I. S. 184.

Digitized by Google

Sage mir an, o Freund, die Zahl von Helios Rindern,
Sorgſam ſinnend darob, haſt an der Weisheit du Theil,
Wie groß war die Heerde, die einſt auf Thrinakria's Fluren
Weidete. Vierfach getheilt war ſie in Haufen gereiht
Mannigfaltig an Farbe. Denn *milchweiß* waren die einen,
Aber in *bläulichem* Glanz ſtrahlte die andere Schaar,
Gelb die dritte und *ſcheckig* die vierte der Schaaren. Es faßte
Stiere jegliche Schaar mächtig in Haufen gedrängt,
Wohl geordnet nach folgendem Maaß. (I.) Die *weißlichen* kamen
Grade der *bläulichen* Hälft' und noch dem Drittel dazu
Nebſt den *gelben* geſammt an Zahl gleich; dieſes bedenke.
(II.) Aber die *bläuliche* Schaar war ein Viertel gerad'
Nebſt einem Fünftel der *bunten* und allen *gelben* zuſammen.
(III.) Die noch übrige Schaar, Stiere von *ſcheckiger* Haut,
War dem Siebentel gleich und dem ſechſten Theile der *weißen*,
Nebſt den *gelben* geſammt wieder gerechnet dazu.
Aber die *weiblichen Rinder* verhielten ſich alſo. (IV.) Die *weißen*
Waren der *bläulichen* Schaar, Stieren und Kühen zuſammt,
Drittem Theile und viertem, gehörig addiret, genau gleich.
(V.) Drauf die *blauen* ſodann waren dem vierten und dem
Fünften Theile zuſammen der *ſcheckigen* Rinder an Zahl gleich,
Stieren und Kühen zugleich, die auf den Weiden man ſah.
(VI.) Aber der *gelben* Heerde nun fünftem Theile und ſechſtem
Waren die *ſcheckigen* gleich, zählſt du die Menge genau.
(VII.) Endlich die *gelben* erſchienen der Hälfte des Drittels an Zahl gleich
Alles weißlichen Vieh's, nebſt ihrem ſiebenten Theil.
Freund, nennſt du nun genau die Menge von Helios Rindern,
Sagſt du beſonders die Zahl feiſter *Stiere* mir an,
Sagſt, wie viele da waren der *Kühe* von jeglicher Farbe,
Nicht unkundig fürwahr nennt man im Rechnen dich dann.

Jedermann ſieht und fühlt, daß hier die Aufgabe zu Ende iſt. Es wird nach dem Reſultate, nach der aus den aufgeſtellten Bedingungen zu beſtimmenden Anzahl der Stiere und Kühe von jeder Farbe gefragt, und demjenigen, der die Auflöſung angiebt, der Ruhm eines tüchtigen Rechners zugeſichert. Bis hieher haben wir eine gewöhnliche unbeſtimmte Aufgabe des erſten Grades, welche für acht Unbekannte ſieben Gleichungen hergiebt, alſo unendlich viele Auflöſungen zuläßt, von denen aber vielleicht nur *eine* Combination in die bildliche Einkleidung der Aufgabe paſſen wird, weil wir für das fruchtbare und ſeit *Homer's* Zeiten als rinderreich bekannte Sicilien nicht eine zu winzige Anzahl annehmen, andrerſeits aber auch nicht die ganze Inſel mit Hornvieh überſchwemmen dürfen. Indeß

wird der Erfolg zeigen, daß wir in die erſtere Verlegenheit gar nicht kommen.

Ich habe nach Struve's Vorgang die Stellen des Gedichts, aus welchen die Data zu den Gleichungen hervorgehen, mit den Römiſchen Zahlen bezeichnet; folgen wir nun auch noch demſelben Schriftſteller in der Bezeichnung der einzelnen Unbekannten, welche er ſehr zweckmäßig ſo wählt, daß er die Anzahl der Rinder jeder Farbe, der weißen, blauen, gelben und ſcheckigen, durch die Anfangsbuchſtaben dieſer Farbenadjectiva, und zwar die Stiere durch die großen, die Kühe durch die entſprechenden kleinen Buchſtaben ausdrückt, ſo erhalten wir folgende ſieben Gleichungen:

$$\text{I.}\quad W = (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})B + G = \tfrac{5}{6}B + G$$
$$\text{II.}\quad B = (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5})S + G = \tfrac{9}{20}S + G$$
$$\text{III.}\quad S = (\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7})W + G = \tfrac{13}{42}W + G$$

Dieſe drei Gleichungen gelten bloß den Stieren; durch die folgenden vier wird für die Beſtimmung der Kühe geſorgt:

$$\text{IV.}\quad w = (\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})(B+b) = \tfrac{7}{12}B + \tfrac{7}{12}b$$
$$\text{V.}\quad b = (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5})(S+s) = \tfrac{9}{20}S + \tfrac{9}{20}s$$
$$\text{VI.}\quad s = (\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6})(G+g) = \tfrac{11}{30}G + \tfrac{11}{30}g$$
$$\text{VII.}\quad g = (\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7})(W+w) = \tfrac{13}{42}W + \tfrac{13}{42}w.$$

Wenn wir nun zunächſt die erſten drei Gleichungen, welche bloß die großen Buchſtaben enthalten, betrachten, und W, B, S durch G ausdrücken, ſo erhalten wir für die Stiere folgende Reſultate:

$$W = \frac{2226}{891}G$$
$$B = \frac{1602}{891}G$$
$$S = \frac{1580}{891}G$$

Da aber doch offenbar in der Aufgabe nur von ganzen Stieren die Rede ſein kann, ſo ſetzen wir, um für alle vier Farben ganze Zahlen zu erhalten, G gleich einem unbeſtimmten Vielfachen von 891, ſo wird

$$W = 2226m$$
$$B = 1602m$$
$$S = 1580m$$
$$G = 891m$$

Subſtituiren wir dieſe Werthe in die vier folgenden Gleichungen, ſo ergeben ſich daraus folgende Reſultate für die Anzahl der Kühe.

Digitized by Google

$$w = \frac{7206360}{4657} m$$

$$b = \frac{4893246}{4657} m$$

$$s = \frac{3515820}{4657} m$$

$$g = \frac{5439213}{4657} m$$

Nun müſſen wir abermals, um auch hier ganze Werthe zu erhalten, $m = 4657\,n$ ſetzen, ſo erhalten die acht geſuchten Zahlen folgende Werthe:

$$\begin{array}{llll} W = 10\,366\,482\,n & & w = 7\,206\,360\,n \\ B = 7\,460\,514\,n & & b = 4\,893\,246\,n \\ S = 7\,358\,060\,n & & s = 3\,515\,820\,n \\ G = 4\,149\,387\,n & & g = 5\,739\,213\,n \end{array}$$

Nehmen wir hier nun die kleinſten Werthe, indem wir $n = 1$ ſetzen, ſo erhalten wir auf Sicilien eine Geſammtzahl von 50 389 082 Rindern. Nun umfaßt Sicilien gegen 500 Quadratmeilen; es kämen alſo im Durchſchnitt auf jede Quadratmeile mehr als 100000 Stück Hornvieh, ſo daß jedes Stück zu ſeinem jährlichen Unterhalte nur etwa 40 Quadratruthen Land behielte, vorausgeſetzt, daß ganz Sicilien Wieſe wäre. Aber Sicilien war auch von jeher ein ergiebiges Korn- und Weizenland, und dieſer Umſtand würde dem Rindvieh noch ein bedeutendes Terrain entziehen. Demnach iſt das aus den in der Aufgabe geſtellten Bedingungen hervorgehende kleinſte mögliche Reſultat ſchon ſehr viel zu groß, und der Verfaſſer hat alſo nicht, wie es doch ein vernünftiger Rechenmeiſter immer thun ſollte, das Reſultat bedacht, bevor er die Aufgabe niederſchrieb. Faſſen wir dieſe Erſcheinung zuſammen mit der nicht ſehr klaſſiſchen Sprache und den ſcheinbar poetiſchen, im Grunde aber nur die metriſchen Linken ausfüllenden geſchmackloſen Ausſchmückungen, ſo ſcheinen wir zu dem Schluſſe berechtigt zu ſein, daß das vorliegende Epigramm ein Erzeugniß der Zeit des geſunkenen Geſchmacks und der urtheilsloſen, unüberlegten Nachahmung iſt, welches ſich durch den Mißbrauch der großen Namen Archimedes und Eratoſthenes Auctorität bei ſeinen Zeitgenoſſen erzwingen will. Ja vielleicht dürfte der Umſtand, daß Krephalas und Planudes, die doch nach ſolchen Räthſeln und ähnlichen innerlich werthloſen Künſteleien eifrig haſchten, unſer Epigramm in ihre Sammlungen nicht aufgenommen haben, ein noch ungünſtigeres Reſultat für ſeine Abfaſſungszeit liefern und es wohl gar über das vierzehnte Jahrhundert hinausſchieben.

Aber wir ſind noch lange nicht damit fertig. Entweder der Verfaſſer ſelbſt, oder, was wahrſcheinlicher iſt, ein ſpäterer Leſer, war mit den gewonnenen ſchon ganz reſpectablen Reſultaten der Aufgabe noch nicht zufrieden, ſondern fügte derſelben noch zwei neue Bedingungen hinzu, welche trotz ihrer ſcheinbaren Anſpruchloſigkeit die Rinderzahl Siciliens dermaßen vergrößern, daß, wenn man die ganze Erde in einen Kuhſtall des Sonnengottes verwandelte, ſie doch ſchwerlich im Stande ſein würde, dieſe Anzahl zu faſſen. Nachdem nämlich das Epigramm, wie wir geſehen haben, bereits einen vollſtändigen rhetoriſchen Schluß erhalten und ein allen beſcheidenen Anforderungen vollkommen genügendes Reſultat geliefert hat, hebt es noch einmal von Neuem an, und benutzt den Umſtand, daß in dem zweiten Verſe dem Ausrechner Weisheit (*εἰ μετέχεις σοφίης*) zugemuthet war, von der nachher in dem Schlußverſe nicht die Rede iſt, welcher bloß ſagt:

Οὐκ ἄϊδρίς κε λέγοι, οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής.

Da ſagt nun der Fortſetzer:

Οὐ μήν πώ γε σοφοῖς ἐναρίθμιος, ἀλλ' ἴθι φράζευ
Καὶ τάδε πάντα βοῶν ἠελίοιο πάθη.

u. ſ. w. Der Anhang lautet Deutſch vollſtändig ſo:

Doch zu den Weiſen noch zählt man dich nicht; drum komm' noch und ſage
Auch dies Alles mir an, was bei den Rindern ſich fand.
(VIII.) Wenn ſich die weißen Stiere verbanden in ſämmtlicher Anzahl
Mit den blauen, ſodann ſtanden geregelt ſie da
Gleich an Länge und Breite; es füllte dann ihre Menge
Ganz Thrinakria's Flur, ziegelgeſtaltig geformt.
(IX.) Stellten ſich aber zuſammen die gelben und ſcheckigen Stiere,
Einer voran, und dazu mehrend die andern gereiht,
Bildeten ſie vollſtändig ein Dreieck; und keine von andern
Farben kamen hinzu, noch auch fehlten ſie dran [8]).

---

8) οὔτε προσόντων.
Ἀλλοχρόων ταύρων, οὔτ' ἐπιλειπομένων.
Über dieſen letzten müßigen Gegenſatz ſiehe K. L. Struve S. 45. 46. Unter ähnlichen Beiſpielen ſolcher Gegenſätze, von denen nur der eine Theil in den Sinn paßt, führt Struve die Worte aus Sophokles Antigone an (v. 1108): ἴτ', ἴτ' ὀπάονες, οἵ τ' ὄντες, οἵ τ' ἀπόντες; „geht, geht, Gefährten, wer hier iſt und wer nicht hier iſt!“

Findeſt dieſes du noch, und kannſt im Gehirn du es faſſen,
Giebſt du die Zahlen mir an jeder der Schaaren, o Freund,
Dann geh rühmend als Sieger einher, dann ſei du bewußt dir,
Ein fruchttragender Baum ſeiſt in der Weisheit du jetzt.

Es kommen alſo zu den vorigen ſieben Bedingungen noch folgende beiden hinzu:

VIII. $W + B$ ſoll eine Quadratzahl, und
IX. $S + G$ ſoll eine dreieckige Zahl ſein.

Beide Bedingungen treffen für die kleinſten der oben gefundenen Werthe nicht zu. Laſſen wir einſtweilen die neunte unbeachtet, und faſſen allein die achte ins Auge, ſo iſt

$$W + B = 17\,826\,996\, n$$

Aber 17 826 996 iſt ein Product der Factoren $3 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$, unter denen 4 der einzige quadratiſche iſt; wir müſſen alſo, damit die Bedingung VIII. erfüllt werde, n mindeſtens $= 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$, das iſt $= 4456749$ ſetzen, und damit die acht oben gefundenen Zahlen multiplicieren. Weil es nun aber immer noch möglich iſt, daß die ſo gefundenen Werthe für S und G der neunten Bedingung nicht entſprechen, ſo müſſen wir der Sicherheit wegen dieſen Werthen noch einen unbeſtimmten quadratiſchen Factor p^2 geben. Somit erhalten wir nun

$$W = 46\,200\,808\,287\,018\, p^2 \qquad w = 32\,116\,937\,723\,640\, p^2$$
$$B = 33\,249\,638\,308\,986\, p^2 \qquad b = 21\,807\,969\,217\,254\, p^2$$
$$S = 32\,793\,026\,546\,940\, p^2 \qquad s = 15\,669\,127\,269\,180\, p^2$$
$$G = 18\,492\,776\,362\,863\, p^2 \qquad g = 24\,241\,207\,098\,537\, p^2$$

Jetzt iſt allerdings $W + B$ eine Quadratzahl, deren Wurzel $8\,913\,498\, p$ iſt; aber es iſt auch die Anzahl der Rinder Siciliens dadurch, ſelbſt wenn wir dem p den kleinſten Werth $= 1$ geben, auf mehr als 224 Billionen angewachſen, ſo daß wir jetzt etwa 450 Tauſend Millionen Stück auf die Quadratmeile, oder, risum teneatis amici, beinahe 800 Stück auf jeden Quadratfuß erhalten. Und die Rinder des Sonnengottes werden überall als ſehr wohl genährt geſchildert!

Aber der Unſinn wird noch ärger, wenn wir die neunte Bedingung hinzunehmen. Es ſoll nämlich auch noch $S + G$ eine dreieckige Zahl, alſo das Achtfache, wenn man 1 dazu addirt, eine Qua-

dratzahl werden. Machen wir nun den Verſuch mit den Werthen, wenn $p = 1$ iſt, ſo iſt

$$S + G = 51\,285\,802\,909\,803, \text{ alſo}$$
$$8(S + G) + 1 = 410\,286\,423\,278\,425$$

Und das ſoll ein Quadrat ſein. Dividiren wir aber dieſe letzte Zahl durch den quadratiſchen Factor 25, ſo erhalten wir den Quotienten

$$16\,411\,456\,931\,137$$

welcher nicht Quadratzahl iſt, weil keine Quadratzahl auf die Ziffer 7 ausgehen kann. Wir können alſo nicht $p = 1$ ſetzen, ſondern müſſen dafür einen andern und zwar größern Werth ſuchen, damit $8(S + G) + 1$ ein Quadrat werde. Nennen wir nun der Kürze halber die für den Werth $p = 1$ gefundene Summe für $S + G$ einfach A, ſo kommt es darauf an, für p einen ganzen Zahlenwerth zu finden, welcher der Gleichung

$$8Ap^2 + 1 = q^2$$

entſpricht. Da nun glücklicherweiſe $8A$ keine Quadratzahl iſt, ſo iſt die Auflöſung dieſer Gleichung, theoretiſch betrachtet, durchaus möglich, und würde auch unter andern Umſtänden ohne eben große Schwierigkeit zu bewerkſtelligen ſein; ſie wird aber in dem vorliegenden Falle unausführbar wegen der enormen Größe des Coefficienten $8A$, deſſen Quadratwurzel man in einen Kettenbruch verwandeln ſoll. Darum wird wohl, wenn nicht einmal Jemand durch Zufall auf einen paſſenden Werth von p geräth, die letzte neunte Bedingung des vorliegenden Problems noch einige Zeit unerfüllt bleiben, zumal die Löſung derſelben durchaus kein wiſſenſchaftliches Intereſſe hat. Soviel nur läßt ſich leicht einſehen, daß der kleinſte ganze Werth für p ſehr groß werden wird.

Leſſing hat ein in ſeinem Codex befindliches Scholion zu dieſem ſogenannten Epigramme mit abdrucken laſſen, welches, ohne auf die Art der Ausrechnung und Behandlung der Aufgabe einzugehen, acht Zahlen für die acht unbekannten Größen angiebt. Dieſe Zahlen des Scholiaſten entſprechen vollkommen den erſten ſieben Bedingungen der Aufgabe, und wir würden ſie erhalten, wenn wir oben $n = 80$ ſetzten. Seine Verſicherung aber, daß durch dieſe Zahlen auch die achte und neunte Bedingung erledigt werde, iſt unwahr; denn die Zahlen paſſen zu keiner von beiden Bedingungen.

Wenn indeß das Stück der Aufgabe, welches die beiden letzten Forderungen ausſpricht, ſich ſchon aus formellen Rückſichten, die ich eben berührt habe, als ein ſpäter hinzugefügter Anhang kund giebt, ſo wird dieſer Verdacht noch bedeutend unterſtützt, wenn wir folgende Puncte bedenken.

Erſtens iſt es auffallend, daß in dieſem Theile der Aufgabe die Kühe ganz unberückſichtigt und nur die Stiere Gegenſtand der Rechnung bleiben.

Zweitens beweiſt die unvernünftige Größe der Zahlen, welche allein ſchon aus der achten Bedingung hervorgehen, daß Derjenige, der dieſe und die folgende Bedingung hinzufügte, gar nicht mehr an die bildliche Einkleidung der Aufgabe, das heißt, an Siciliens Hornvieh gedacht hat. Es iſt ihm ohne alle Rückſichten auf Wahrſcheinlichkeit und Möglichkeit bloß darum zu thun, die Rechnung mit neuen Schwierigkeiten zu belaſten, die er freilich, wie wir mit der größten Sicherheit behaupten können, ſelbſt nicht gelöſt hat. Es ſcheint in der That, als wenn irgend ein fader Wortklauber ſich an dem Ausdrucke σοφίη im zweiten Verſe geſtoßen, und bloß darum noch auf gutes Glück hin zwei Forderungen hinzugefügt habe, um auch dieſe σοφίη dem Ausrechner zuſprechen zu können. Was nun aber aus dem Reſultat werde, und ob es überhaupt noch möglich ſei, ein ſolches zu finden, nach ſolchen Nebenſachen fragte der φιλόλογος nicht, war auch wahrſcheinlich nicht im Stande, das einzuſehen.

Drittens aber verräth ein offenbarer Unſinn in den Worten des Anhangs, daß wir es hier mit einem Menſchen zu thun haben, der ſich um keinen Zuſammenhang kümmerte, und dem es bloß galt, ein Paar regelrechte Verſe anzuſchmieden. Es heißt, wenn die weißen und blauen Stiere ſich in ein Quadrat zuſammenſtellen, ſo füllen ſie die ganze dreieckige, ziegelförmige Inſel. Das Original nämlich lautet:

Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπεὶ μιξαίατο (?) πληθὺν
Κυανέοις ἵσταιτ᾽ ἔμπεδον ἰσόμετροι
Εἰς βάθος εἰς εὖρός τε· τὰ δ᾽αὖ περιμήκεα πάντη
Πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.

Abgeſehen davon, daß hier die Hauptbedingung, daß nämlich $W+B$ eine Quadratzahl werden ſoll, ziemlich undeutlich ausge-

drückt iſt und faſt errathen werden muß, laſſen ſich folgende Fragen billig aufwerfen. Erſtens, wie kann die Inſel Thrinakria (Thrinakia, Trinakia, und am genaueſten Trinakria, mit drei Vorgebirgen), die dreieckige, ziegelförmig ſein? Aber hier iſt vielleicht, wie K. L. Struve annimmt[9]), eine falſche Leſeart eingedrungen und ſtatt πλίνϑου irgend etwas anderes zu leſen. Wie kann aber, fragen wir zweitens, das ziemlich dreieckige Sicilien von einer quadratförmig aufgeſtellten Rinderheerde ganz bedeckt werden? Wie kann man, wenn wir die Sache rein geometriſch betrachten, in ein Dreieck ein Quadrat beſchreiben, welches den ganzen Flächenraum jenes einnimmt? Drittens aber, wenn die weißen und blauen Stiere die ganze Inſel anfüllen, wo bleiben dann die ſcheckigen und gelben Stiere und ſämmtliche Kühe? Offenbar hat den alten Knaſterbart, wie J. Struve ihn nennt, Gedankenloſigkeit und ſchaler Wortprunk zu dem vollendeteſten Unſinn hingeriſſen, abgeſehen davon, daß er nicht verſtanden hat, was er ſchrieb, und nicht gewußt hat, daß die Erfüllung der ohne Verſtand von ihm angeflickten Bedingungen, wenn ſie auch vernünftig ausgeſprochen worden wären, mit unüberwindlichen Schwierigkeiten zu kämpfen habe.

Da alſo die verſchiedenen Bedingungen, welche die Auflöſung dieſes Problems erſchweren und welche demſelben einen Platz unter den Diophantiſchen Aufgaben zu beanſpruchen ſcheinen, keineswegs von dem Verfaſſer aus Überlegung und Sachkenntniß zuſammengeſtellt, ſondern völlig ins Blaue hinein zuſammengewürfelt ſind, ſo wird dadurch dieſe Erſcheinung, die unter andern Umſtänden höchſt intereſſant hätte ſein können, für die Geſchichte der Algebra ganz werthlos; ihr Inhalt berechtigt durchaus zu gar keinem Schluſſe in Betreff des Zuſtandes der Wiſſenſchaft, oder höchſtens zu dem ſubjectiv ſehr ungünſtigen, daß der Verfaſſer, wenigſtens des Anhangs, es in der Algebra nicht ſehr weit gebracht haben könne.

Jacobs hat dieſes Epigramm in ſeine Ausgabe der Anthologie aus unbekannten Gründen nicht aufgenommen. Sicher aber könnte ein künftiger Herausgeber daſſelbe an der oben bezeichneten Stelle abbrechen, oder wenigſtens den Anhang als unecht bemerklich machen, wenn wir nämlich unter unecht hier ſoviel verſtehen, daß dieſer Anhang von einem andern Verfaſſer herrührt als der erſte

9) S. ſeine Note n. S. 42. 43.

Theil des Gedichts. In anderm Sinne könnte man das ganze Gedicht unecht nennen, denn aus Archimedes Zeitalter rührt auch der erſte Theil nicht her. Schwerlich würde Archimedes die einfache Aufgabe, wie der erſte Theil ſie ſtellt, für würdig gehalten haben, ſie den Alexandriniſchen Gelehrten zur Auflöſung zuzuſchicken; an eine Betrachtung der dreieckigen Zahlen iſt aber in jener Zeit wohl noch nicht zu denken; wenigſtens haben wir dafür kein anderes vollwichtigeres Zeugniß.

Zuſätze und Berichtigungen.

Zu S. 3. Note 7.

Die Worte Menage's, *At Proclus in IV. primi Euclidis testatur*, heißen nicht, wie ich aus Übereilung niedergeſchrieben habe, Proklus ſage das im vierten Buche ſeines Commentars über Euklid's erſtes Buch, ſondern offenbar: Proklus in ſeinem Commentar zum vierten Satze des erſten Buchs der Elemente. Aber auch ſo iſt das Citat falſch und was ich weiter darüber geſagt habe, hat in voller Kraft ſeine Richtigkeit. Die Stellen, in welchen Eudemus von Proklus citirt wird, ſind folgende:

Ad Def. VIII. (Lib. II. pag. 35.): Εὔδημος μὲν ὁ περιπατητικὸς βιβλίον περὶ γωνίας γράψας, ποιότητα αὐτὴν εἶναι συνεχώρησεν.

Ad Prop. XV. (Lib. III. pag. 79.): τοῦτο τοίνυν τὸ θεώρημα δεικνυσιν, ὅτι δύο εὐθειῶν ἀλλήλας τεμνουσῶν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι εἰσίν· εὑρημένον μὲν, ὥς φησιν Εὔδημος, ὑπὸ Θαλοῦ πρώτου.

Ad Prop. XXIII. (Lib. III. p. 87.): Πρόβλημα τοῦτο Οἰνοπίδου μὲν εὕρημα μᾶλλον, ὥς φησιν Εὔδημος. ***(Barocius:*** **Problema hoc quoque est, quod *Oenopidis* quidem potius *quam Euclidis* inventum lucrum est, ut ait *Eudemus.)***

Ad Prop. XXVI. (Lib. III. p. 92.): Εὔδημος δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς Θαλῆν τοῦτο ἀνάγει τὸ θεώρημα· τὴν γὰρ τῶν ἐν θαλάττῃ πλοίων ἀπόστασιν, δι' οὗ τρόπου φασὶν αὐτὸν δεικνῦναι, τούτῳ προχρῆσθαι φησὶν ἀναγκαῖον.

Ad Prop. XXXII. (Lib. IV. pag. 99.): Εὔδημος δὲ ὁ περιπατητικὸς εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀναπέμπει τὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος εὕρεσιν, ὅτι τρίγωνον ἅπαν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας.

Ad Prop. XLIV. (Lib. IV. pag. 109.): Ἔστι γὰρ ἀρχαία φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα.

Dagegen nennt Proklus in dem Commentar zu Prop. IV. pag. 63—66. weder Eudemus noch Thales. Wollten wir aber IV. als einen Druckfehler für V. anſehen, ſo finden wir p. 67. 68. allerdings Thales citirt, aber nicht Eudemus. Es heißt da nämlich: τῷ μὲν οὖν Θαλῇ τῷ παλαιῷ πολλῶν τε ἄλλων εὑρέσεως ἕνεκα καὶ τοῦτε τοῦ θεωρήματος χάρις· λέγεται γὰρ

δὴ πρῶτος ἐκεῖνος ἐπιστῆσαι καὶ εἰπεῖν, ὡς ἄρα παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσίν, etc.

Zu S. 7. Note 14.

Außer dem Anfange des fünften Buchs ſind noch folgende einzelne Abſchnitte von Pappus Werke im Original gedruckt worden:

1. Lib. IV. prop. 25—29, über die Quadratrix des Dinoſtratus, mit lateiniſcher Überſetzung in
   Jos. Torelli Veronensis geometrica. Veronae, 1769. 8vo. pag. 89—104.
2. Ein Stück der Vorrede des ſiebenten Buchs, der Anfang und die Euklid's Data betreffende Stelle, in der Vorrede von
   Euclidis quae supersunt omnia gr. et lat. Ex rec. *D. Gregorii.* Oxon. 1703. fol.
3. Die ganze Vorrede und die erſten einundzwanzig Sätze des ſiebenten Buchs, des Apollonius sectio rationis und sectio spatii betreffend in
   Apollonii Pergaei de sect. rationis libri duo (ex arab. ms. lat. versi). Acc. ejusd. de sect. spatii libri duo restituti. Praemitt. *Pappi Alex.* praef. ad VII. collect. math. nunc. primum graece edita, c. lemmat. *Pappi* ad hos Apollonii libros. Op. et st. *Edm. Halley.* Oxon. 1706. 8vo.
4. Die folgenden Sätze, 22—64, deſſelben Buchs, die sectio determinata betreffend, in
   Apollonius Batavus auct. *Willebrodi Snellii,* seu resuscitata Apollonii geometria περὶ διωρισμένης τομῆς s. de sect. determ. Lugd. Bat. 1608. 4to.
5. Die Sätze 96—118, deſſelben Buchs über Apollonius Schrift de tactionibus, in
   Apollonii Pergaei de tactionibus quae supersunt, ac max. lemmata *Pappi* in hos libros, nunc prim. ed. a *J. W. Camerer.* Gotha, 1795. 8vo.
6. Die Lemmata zu Apollonius Kegelſchnitten, lib. VII. prop. 165—234, in
   Apollonii Pergaei conicorum libri IV. priores cum *Pappi Alex.* lemmatibus et *Eutocii Ascal.* comment. ed. *Edm. Hallejus.* Oxon. 1710. fol.
7. Einige andere Lemmata des ſiebenten Buchs ſollen ſich befinden in
   M. Meibomii de proportionibus dialogus. Hafniae, 1655. fol. pag. 154 sqq.

Vergl. Reimer in Boſſut Geſch. d. Math. Bd. 1. S. 389. 390.
Schöll, Geſch. d. griech. Literatur, Bd. 2. S. 235 flg. Bd. 3. S. 336.

Zu S. 24.

Ich habe Gelegenheit gehabt, während des Drucks das Werk von Hollenberg, freilich nur flüchtig, anzuſehen. Die kleine Schrift führt den Namen des Verfaſſers, den ich oben aus Rogg's Handbuch der math. Literatur entnommen

hatte, nicht auf dem Titel; ihren Inhalt bildet ein numerirtes, alphabetiſch geordnetes Verzeichniß von Mathematikern, über welche einige oberflächliche, nicht ſehr beträchtliche Nachrichten ertheilt werden, die ſich auf fremde ungenannte Auctoritäten ſtützen. Das Werk iſt alſo ohne wiſſenſchaftliche Bedeutung.

Zu S. 51. Note 28.

Die in dieſer Note gemachte Bemerkung kann ich, da ich inzwiſchen in den Beſitz von Roſen's Ausgabe der Algebra von Mohammed ben Muſa gekommen bin, jetzt dahin beſtimmen, daß die Leſeart العلمين ſich wirklich in Roſen's Text befindet, alſo ſchon da Druckfehler iſt; aus Roſen's Überſetzung geht indeß nicht deutlich hervor, ob er العلمين oder العملين geleſen habe; er überſetzt nämlich die Stelle ſo: **This science has therefore been called by the name of these two rules, namely the rule of *jebr* or restoration, and of *mokābalah* or reduction, on account of the frequent use that is made of them.** Ungenau iſt hier in der Überſetzung die Trennung der Worte jebr und mokābalah; nur die Verbindung beider Namen, aljebr v'almokābalah, iſt der Name der Wiſſenſchaft, nicht der eine und der andere.

Zu S. 73.

Beachtenswerth iſt ein Beiſpiel eines Hebräiſchen Zahlenausdrucks, in welchem ſich ohne allen Zweifel ein Stellenwerth der Ziffern findet. Es heißt nämlich in der Maſorah hinter dem Pentateuch: „die Anzahl der Verſe im ganzen Geſetz iſt fünftauſend achthundert fünf und vierzig," und nun heißt es in der gewöhnlichen Weiſe:

יאיר ה ח מ ה יהיה שבעתים סימן׃

wo die Buchſtaben des geſperrt gedruckten Wortes החמה, wenn man ihre Zahlenwerthe addirt, jene Zahl geben ſollen. Nun iſt aber als Zahl ה = 5, ח = 8, מ = 40; daß das erſte ה nicht fünf, ſondern fünftauſend bedeutet, iſt nach dem oben Geſagten ganz in der Ordnung; aber auch der zweite Buchſtabe, ח, kann nicht acht, ſondern muß achthundert gelten; es iſt alſo hier die Theorie, vermöge welcher die Tauſender wieder durch die Einheitszeichen ausgedrückt werden, noch einen Schritt weiter, nämlich auf die Hunderter ausgedehnt, ein Fortſchritt, den die Griechen nicht gemacht haben. In der Zahl החמה iſt nur noch übrig, für מ den Buchſtaben ד zu ſubſtituiren, um eine ganz in unſerm heutigen Poſitionsſyſtem ausgedruckte Zahl zu erhalten.

Zu S. 94. Z. 6 flg.

Was ich über die Ausgaben des Boethius geſagt habe, iſt dahin zu berichtigen, daß die Geſammtausgabe von Boethius Werken (Venedig 1492), welche ich während des Druckes zu Geſichte bekommen habe, die zu der fraglichen Stelle gehörige Figur gar nicht enthält, ſondern nur einen leeren Platz, in welchen dieſelbe wahrſcheinlich ſpäter hat eingedruckt werden ſollen. Vergl. Geom. lib. I. fol. 215. Die Textesworte ſind durch Druckfehler und einige bedeutende Auslaſſungen ent-

Digitized by Google

ſtellt. — S. 93. Z. 6. 7. iſt das Punctum hinter cognoverant zu ſtreichen, und die Worte „a posterioribus appellabatur abacus" in Parentheſe zu ſetzen.

Zu S. 102. Note 61.

Für die wahre Bedeutung des Worts صفر, Ziffer, der zufolge es nur die Null bezeichnet, kann ich noch eine Auctorität beibringen, nämlich das Zeugniß eines Jüdiſchen Mathematikers, Eliab ben Abraham Migrachi, deſſen Arithmetik im Jahre 1533 zu Konſtantinopel unter folgendem Titel herausgekommen iſt:

ספר המספר להחכם האלהי מוהר״ר אליה המזרחי ז״ל
בקוסטנטינא קרית ארוננו הגדול והאדיר שולטאן
שולימאן ירום הודו ויתנשא: בשנת שתים עשרה
למלכו: .... בשנת כי גר הייתי בארץ נכריה:

Hier heißt es Fol. בא, nachdem der Verfaſſer über die neun erſten Ziffern und ihren Gebrauch geſprochen hat, alſo:

ואולם הסימן העשירי שהוא כדמות גלגל הנה הוא בלתי
מורה כמות כלל ונקרא בלשון לעז נ״ולא והוא נגזר מינו
אשר יורה בלשונם על האין׳ ובלשון ישמעאל ס״פרא אשר
יורה ג״כ בלשונם על ההעדר׳ ובלשון יון אודן אשר יורה
גם כן על האין:

„Was aber das zehnte Zeichen anlangt, welches die Geſtalt eines Kreiſes hat, ſo bezeichnet dieſes im Allgemeinen keine Größe; es heißt in der fremden (Spaniſchen?) Sprache Nulla, und dieſes bedeutet daſelbſt ſoviel wie Nichts; in der Arabiſchen Sprache heißt es Siphra, welches ebenfalls Mangel (Abweſenheit) bedeutet; in der Griechiſchen Sprache heißt es Uden, und auch dieſes heißt Nichts."

Bemerkenswerth iſt, daß der Verfaſſer, während er ganz richtig *nulla* und οὐδὲν durch das einfache Wort אין, Nichts, ausdrückt, den Arabiſchen Ausdruck siphra wiedergiebt durch העדר (Inf. Niph.), das Fehlen, der Mangel ebenfalls ganz angemeſſen der Arabiſchen Bedeutung des Worts, deſſen Stammverbum, wie wir oben geſehen haben, leer ſein bedeutet. Es läßt ſich kaum bezweifeln, daß der gelehrte, in Konſtantinopel lebende Jude Arabiſch verſtanden und Arabiſche Mathematiker gekannt habe, und factiſch ſpricht für dieſe Vermuthung, daß er manche Kunſtausdrücke aus dem Arabiſchen entlehnt, z. B. הנדסא (auch הנדסה geſchrieben), Arab. هندسة, Geometrie; מעוקב, Kubikzahl, unhebräiſch und wahrſcheinlich transponirt das Arab. مكعّب; הכה, Hiph. v. נכה, multipliciren, überſetzt aus dem Arab. ضرب, welches ſo wie הכה ſchlagen bedeutet, während ungenauere Schriftſteller für multipliciren

den Ausdruck כפל, verdoppeln, gebrauchen, und andere mehr. Indeß ſind Griechiſche Mathematiker ſeine Hauptquelle geweſen; er citirt unzähligemal Euklides אקלידש (ganz in der Arabiſchen Form اقليدس, nur einmal, fol. כא״ג׳, אקלידאש geſchrieben), und mehrmals die Arithmetik von Nikomachus Geraſenus, z. B. fol. ה׳ב und [בספר הארֿתמטיקא לניקומֿכוש הגהרֿשיני], ebenſo ח׳ג und כ׳א; öfters citirt er die Arithmetik, worunter aber immer Nikomachus zu verſtehen iſt, z. B. ג׳א: ואומר שהמספר הנה גדרוהו הראשונים בספר הארֿתמטיקא בהעברה מן המאמר שהוא קבוץ האחדים „Die Alten haben in dem Buche Arithmetik ungenau die Zahl ſo definirt, daß ſie eine Summe von Einheiten ſei." Bei Nikom. 1. 7. *μονάδων σύστημα*; ähnlich fol. ה׳ב. Ebenſo zeigt er mehrmals, daß er Griechiſch verſteht (ſ. fol. ב׳א, ז׳א, ג׳ז, ד׳ז). Unter dieſen Umſtänden mag es ein verdächtiges Licht auf ſeine Auctorität in Betreff des Worts siphra werfen, daß er von dieſem Worte den bei Griechiſchen Wörtern im Syriſchen gebräuchlichen Pluralis auf —as bildet; es findet ſich nämlich סיפרש fol. ג׳ב und oft, und סיפראש fol. ד׳ד und oft. Indeß iſt dieſe grammatiſche Form wohl kein entſcheidender Grund, der uns zu der Annahme beſtimmen könnte, daß der Verfaſſer das Wort ***siphra*** nur aus Griechiſchen Schriftſtellern, etwa aus Maximus Planudes, kennen gelernt habe.

Zu S. 114. 115.

Ähnliche Verbindungen zweier Brüche kommen bei Diophant öfter vor, in welchen der zweite Bruch nicht Theile der Einheit, ſondern Theile des vorhergehenden Nenners anzeigt. So bedeutet, um nur ein Beiſpiel anzuführen, in der Aufgabe II, 36. der Ausdruck $\overline{\mu\varepsilon}^{\,\varsigma\sim}$ *καὶ ἥμισυ* nicht $\frac{45}{6}+\frac{1}{2}$, ſondern $\frac{45}{6}+\frac{1}{12}$. Ein Ausdruck der Art iſt als eine Ellipſe zu betrachten, indem hinter dem zweiten Bruche noch einmal die vorige Benennung wiederholt werden ſollte, hier alſo *καὶ ἥμισυ ἕκτου*, und die Hälfte eines Sechſtels. In dieſer vollſtändigeren Weiſe finden wir ſolche Brüche häufig bei den Arabiſchen Mathematikern ausgedrückt; ſo giebt zum Beiſpiel **Behâ-eddîn p. 281.** folgende Regel für die Berechnung des Kubikinhalts der Kugel: الق من مكعب القطر سُبعهُ ونصف سُبعه ومن الباقي كذلك ومن الباقي كذلك

„Nimm von dem Kubus des Durchmeſſers ein Siebentel und die Hälfte eines Siebentels, von dem Reſte ebenſo, und von dem zweiten Reſte auf dieſelbe Weiſe." Das heißt, für den Durchmeſſer $=1$ iſt der Inhalt der Kugel $=1-\frac{3}{14}-\frac{3}{14}(1-\frac{3}{14})-\frac{3}{14}[1-\frac{3}{14}-\frac{3}{14}(1-\frac{3}{14})]$ $=\frac{1331}{2744}$, ein Werth, der ſo viel zu klein iſt, daß aus ihm $\pi=2{,}91$ folgen würde. Darum ſchlägt der Perſiſche Überſetzer, Ruſchen Ali, vor, das erſte Mal $\frac{3}{14}$, das zweite Mal aber $\frac{1}{7}$ oder $\frac{3}{21}$ des erſten Reſtes abzuziehen; und dieſe

Regel

Regel drückt er in ganz analoger Weiſe ſo aus: از مكعب قطر سبع ونصف سبع او را كم كنند بعد از آن از باقي دو سبع وثلث سبع باقي كم كنند زيرا كه دو سبع وثلث سبع باقي برابر ثلث باقيست „Man zieht von dem Kubus des Durchmeſſers ein Siebentel und die Hälfte eines Siebentels, dann aber von dem Reſte zwei Siebentel und ein Drittel eines Siebentels des Reſtes ab; denn zwei Siebentel und ein Drittel eines Siebentels des Reſtes ſind gleich einem Drittel des Reſtes.“ Danach würde $\frac{1}{6}x = \frac{11}{14} - \frac{11}{42} = \frac{11}{21}$, alſo $x = \frac{22}{7}$. Die hier gebrauchten Brüche wären ebenſo zu ſchreiben, wie ich es S. 115. mit der Diophantiſchen gethan habe, $\frac{1\frac{1}{2}}{7}$, $\frac{2\frac{1}{3}}{7}$.

Zum ſechſten Kapitel S. 245.

Ich hatte, als ich dieſes Kapitel niederſchrieb, keine Ausgabe der Griechiſchen Anthologie bei der Hand, weshalb das, was ich dort über die in der Anthologie ſich findenden Erwähnungen Diophant's geſagt habe, einiger Erweiterungen und Berichtigungen bedarf.

Diophant's Name wird überhaupt in ſechs Epigrammen genannt; einmal in dem oben mitgetheilten arithmetiſchen Epigramme des Metrodorus, in welchem ohne Zweifel unſer Arithmetiker gemeint iſt. Als Datum zur Beſtimmung von Diophant's Lebensalter iſt indeß dieſes Argument wenig brauchbar, weil wir über Metrodorus noch weniger wiſſen, als über Diophant; und wir können daher über dieſe Erwähnung unſers Auctors nicht mehr ſagen, als Brunck T. III. p. 229. 230.: Si de auctore hujus epigrammatis constaret, et compertum esset Metrodori esse Scepsii, Diophanti Alexandrini, de quo hic agitur, aetas accuratius definiri posset.

Von den fünf übrigen Epigrammen, welche den Namen Diophantus nennen, werden in der Ausgabe von Jacobs, Abſchnitt XI. (Συμποτικὰ, σκωπτικά) drei, nämlich Nr. 103. 245. 257. einem gewiſſen Lukillus, die beiden andern Nr. 111. und 114., einem gewiſſen Nikarchus zugeſchrieben; in der Ausgabe von Brunck dagegen werden vier derſelben dem Erſteren, der hier übrigens Lukilius heißt, zugetheilt (T. II. p. 324 sqq. No. 37. 41. 62. 113.), während das fünfte, bei Jacobs Nr. 111. als anonym, ἀδέσποτον bezeichnet wird (T. III. p. 172.). In allen fünfen iſt aber ganz ſicher nicht von dem großen Arithmetiker die Rede; vielmehr iſt der Gegenſtand derſelben ein winziger Aſtrolog oder Aſtronom dieſes Namens, der mit ausgelaſſenem Muthwillen lächerlich gemacht wird, eine Situation, die wir mit dem hohen Genie des Arithmetikers ſchwerlich identificiren können. Schulz hat in der Vorrede ſeiner Überſetzung des Diophantus vier von dieſen Epigrammen deutſch mitgetheilt, die ich mir hier abzuſchreiben erlaube.

I.

Aus Atomen beſtehe die Welt, ſo lehrt' Epikurus,
Kleineres meinte er wohl, gäb es o Alkimos nicht.

Aus Diophanten hätt' er geſagt, dafern Diophantus
Mit ihm lebte, der viel kleiner iſt als ein Atom.
Oder auch ſo: aus Atomen beſteht das übrige Weltall,
Aus Diophanten beſteht wiederum jedes Atom.
(Von Lukillus, Jacobs Nr. 103.)

II.

Als Diophantus der Winzige ſich zu erhängen beſchloſſen,
Nahm er ein Spinnegeweb' ſchnürte die Kehle ſich zu.
(Von Nikarchus, Jac. Nr. 111.)

III.

Als Diophantus den Arzt Hermogenes neulich im Traum ſah,
Schützt' ihn kein Amulet, ſchlafend empfing er den Tod.
(Von Lukillus, Jac. Nr. 257.)

IV.

Zu Hermogenes ſprach dem Arzt Diophantus der Sternwart,
Nur neun Monden noch ſei er zu leben beſtimmt.
Lachend erwiederte der: was doch neun Monden beſagen,
Grüble du aus, ich ſelbſt gebe dir kurzen Beſcheid.
Sprach's und berührt' ihn bloß mit der Hand, und ſeht, — Diophantus,
Während er Andere ſchreckt, zappelte ſelber ſich todt.
(Von Nikarchus, Jac. Nr. 114.)

Das fünfte der angeführten Epigramme iſt weniger intereſſant, weshalb auch wahrſcheinlich Schulz es nicht überſetzt hat. Sicher iſt bei dieſen lächerlichen Hyperbeln nicht an den würdigen Arithmetiker zu denken, und faſt möchte ich annehmen, daß Diophantus hier ein bloß angenommener Name ſei, an den ein einmal beſtimmter Begriff angeknüpft wird, etwa wie Haug in einer großen Anzahl von Epigrammen Wahls lange Naſe perſiflirt. Schon allein der Umſtand, daß Diophant hier auf drei ganz verſchiedene Weiſen ums Leben kommt, iſt hinreichend, an jeder hiſtoriſchen Grundlage zweifeln zu laſſen. Es bleibt übrigens der Anſicht eines Jeden anheimgeſtellt, in wieweit er den hier erwähnten Aſtronomen mit dem von Hypatia commentirten combiniren will.

Sind nun dieſe Epigramme auch nicht, wie Bachet glaubte, als Zeugen für das Zeitalter unſers Diophantus zu gebrauchen, ſo können wir doch eine nützliche Bemerkung daraus entnehmen, die nämlich, daß ſowohl in dem Epigramme von Metrodorus, als in denen von Lukillus und Nikarchus der Name durchweg Διόφαντος, nicht Διοφάντης geſchrieben wird; und ebenſo lautet der Name bei Theon Alexandrinus (ſ. S. 251.).

C 41068

Berlin, gedruckt bei Trowitzſch und Sohn.

Digitized by Google

Verzeichniß der Druckfehler.

S. 7 Z. 8 v. u. l. zweiten ſt. erſten.
= 10 = 11 = = = immorari.
= = = 6 = = = Frobesius.
= 14 = 2 = = = loro ſt. eoro.
= 20 = 4 = = = hatten.
= 31 = 11 = = = Aryabhattas.
= 35 = 5 = = = asseverat.
= 42 = 4.5 = = = Ulee (die Engliſche Schreibart für Ali).
= 47 = 9 v. o. l. opponere.
= = Note 23. l. Burgo.
= 49 Z. 1 v. o. l. وهو.
= = = 13 = = = أكثر.
= 55 = 8 = = = deren ſt. dem.
= = = 10 = = = wörtlichen.
= 63 = 24 = = = Azteken.
= = = 25 = = = Cundinamarca.
= 64 = 12 = = = dem I.
= 70 = 16 = = = Falativa.
= 75 = 14 = = iſt das Wort Stellvertreter wegzuſtreichen.
= 92 = 11 v. o. l. Unterglieder.
= 94 = 26 = = = die vorliegende Stelle.
= 94 = 3.4 = = = loquitur.
= 101 Note 58. l. kurzen ſt. Augen.
= 104 Z. 18 v. o. l. nichts.
= 113 = 8 = = = ربع و نصف ربع.
= 127 = 11 v. u. l. 6000 ſt. 60.
= = = 6 = = = 6000 (ſtatt der erſten 60).
= 136 = 12 v. o. l. ward.
= 137 = 10 v. u. l. totidem Sexagenas.
= 150 = 8 v. o. l. ſpätere.
= = = 12 = = = in rationalen Zahlen.
= 159 Satz 31. Jede Primzahl u. ſ. w.
= 164 Z. 12 v. u. l. $\frac{2^n-2}{2n}=\frac{2^{n-1}-1}{n}$.
= 166 = 1 = = = δύναται.

S. 169 Z. 17 v. o. ſind die Werthe von CE und ED vertauſcht.
= 171 = 3 v. o. iſt bloß zu ſtreichen.
= 185 = 16 = = l. تاريخ.
= 197 = 7 = = = alſo ſt. als.
= 208 = 15 = = = $n+1:n$.
= 218 = 18 v. u. l. ἀριθμητική, geſchrieben habe,
= 223 = 5 v. u. l. an und für ſich.
= 228 = 12.13 v. o. l. $6n$ ſt. bn (viermal).
= = = 19 v. o. l. εἰ ſt. ἐκ.
= 231 = 23 = = = compendiose.
= 234 = 2 v. u. l. aber ſt. oder.
= 235 = 17 v. o. iſt der wegzuſtreichen.
= 239 = 9 = = l. Zehn ſt. Zahl.
= 246 = 20 = = = ὅς, ἀδελφοῖς. Ebenſo Z. 21.
= 252 = 2 v. u. l. εὐφυῶς.
= 255 = 7 = = = Δωδεκάτην.
= = = 1 = = = Τῇδε.
= 256 = 1 v. o. l. uns ſt. nur.
= 258 = 19 = = = vor ſt. von.
= 298 = 16 = = = δυναμοδυναμοστόν.
= 299 = 11 v. o. l. $\frac{6\frac{1}{4}}{x^2}$
= 303 = 9 v. u. l. عشرة.
= 309 = 21 v. o. l. ſetze.
= 326 = 1 v. u. l. est ſt. ut.
= 327 = 11 v. o. l. Xilander.
= 329 = 3 v. u. l. zweiten ſt. erſten.
= 330 = 12 = = = $x=\frac{m^2-C}{B}$
= 333 = 11 v. o. l. Nombres, G. I. p. 71. 3me éd.
= 336 = 10 v. o. l. der ſt. die.
= 338 = 11 = = = erhalten.
= 341 = 20 = = = y_1^2 ſt. z^2.

Digitized by Google

S. 350 Z. 9 = = = $x+1$ ſt. des einen $x-1$.
= 358 = 1 v. u. l. dieſer ſt. dieſen.
= 365 = 3 = = = Quadrat ſt. Qua=
= 367 = 1 v. o. l. nur ſt. nun.
= = = 8.9 = = = wie Diophant beſonders.
= 368 = 11 v. o. l. III. ſt. II.
= 369 = 6 = = = nur ſt. nun.
= 370 = 3 v. u. l. Zwei ſolche Quadratzahlen.
= 373 = 10 v. u. l. m ſt. er.
= 374 = 16 = = iſt größer einmal zu ſtreichen.
= 380 = 6 v. u. l. k_1x ſt. k_1x^2.
= 384 = 1.2 = = = $=c^2$ ſt. $=b^2$.
= 386 = 12 = = = δῦᾱ.
= 388 = 12 = = = anzunehmen.
= 398 = 21 v. o. l. ἴσας.
= 400 = 4 = = iſt gabe wegzuſtreichen.
= = = 1 v. u. l. $> \frac{66,57}{19}$.
= 403 = 9 v. o. l. werden.
= 408 = 2 v. u. l. jedes.
= 413 = 7 v. o. l. Quadrate ſt. Ausdrücke.
= 415 = 18 v. o. l. 8 ſt. 9.
= 420 = 14 v. u. l. $m^3abc =$
= 428 = 7 v. o. l. <1 ſt. >1.

S. 435 Z. 6 v. u. l. zwei Quadratzahlen.
= 439 = 10 = = = melius.
= = = 14 v. o. l. Potenzen iſt immer durch die Differenz der Wurzeln theilbar. Es bleibt hier noch übrig, die Diviſion $\frac{a^n - b^n}{a-b}$ wirklich auszuführen. Darum kann man denſelben Satz auch als Aufgabe ſtellen: Man ſoll die Differenz zweier gleichnamigen Potenzen durch u. ſ. w.
= 444 = 12 v. u. l. $4x^2+4x+6$.
= 448 = 9 = = = $2pq$.
= 449 = 12 v. o. l. r ſt. p.
= 450 = 18 = = = ergeben.
= 453 = 10 v. u. l. hatte.
= 455 = 10 v. o. l. hätte.
= 461 = 6 = = = πάλιν ἑκάτερος τούτων.
= 472 = 10 v. u. l. $=4AE^2$.
= 477 = 14 = = = Kephalas.
= = = 11 = = = oder ſonſt zierlich.
= 485 = 11 = = = Lücken.
= = = 5 = = = Kephalas.
= 495 = 7 v. o. l. Mizrachi.

Digitized by Google